

FOR THE PEOPLE FOR EDVCATION FOR SCIENCE

LIBRARY

OF

THE AMERICAN MUSEUM

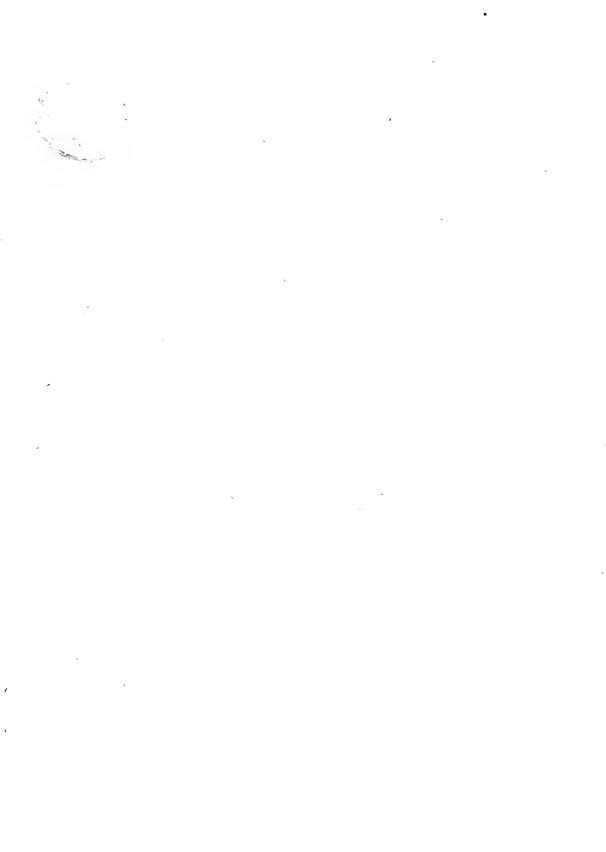
OF

NATURAL HISTORY



/







MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST. PÉTERSBOURG.

TOME VII.

AVEC

L'HISTOIRE DE L'ACADÉMIE
POUR LES ANNÉES 1815 ET 1816.

St. PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

1 8 2 0.

Publié par ordre de l'Académie, et avec l'obligation d'envoyer, où il convient, le nombre d'exemplaires fixé par la loi.

> N. Fufs Secrétaire perpétuel.

TABLE DES MATIÈRES.

Histoire de l'Académie Impériale des Sciences.

Années 1815 et 1816.

						Page
I.	Evènemens mémorables	**	•	•	•	3
II.	Changemens arrivés dans l'Académie:					
	1. Membres décédés					Â
	2. Nouvelles réceptions			•		6
	3. Nouveaux membres du Comité .	•			٠	7
	4. Gratifications, décorations, avancemens					8
	5. Distinctions littéraires			*	,	•
III.	Présens faits à l'Académie :					
	1. Pour la bibliotheque			,		•
	2. Pour le cabinet de curiosités			•	•	19
	3. Pour le cabinet d'instrumens de Mathématique	ie				20
	4. Pour le cabinet de Minéralogie .		•	•		21
	5. Pour la bibliothèque de l'Observatoire					22
IV.	Mémoires et autres ouvrages manus	crits	prés	entés	à	
	l'Académie		•			22
V.	Observations, expériences et notices i	ntére	ssante	s fai	tes	
	ct communiquées à l'Académ	nie		•		30
VI.	Rapports présentés par des Académi	ciens	chai	gés	de	•
	commissions particulieres	•	•			35
VII.	Voyage scientifique fait par ordre de	l'Aca	démie	2		43
VIII.	Ouvrages publiés par l'Académie					ibid.
IX.	Questions proposées par l'Académie	3	•	,	•	44
	A A A					

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

I.	Section	des	sciences	mathémat	iques.
----	---------	-----	----------	----------	--------

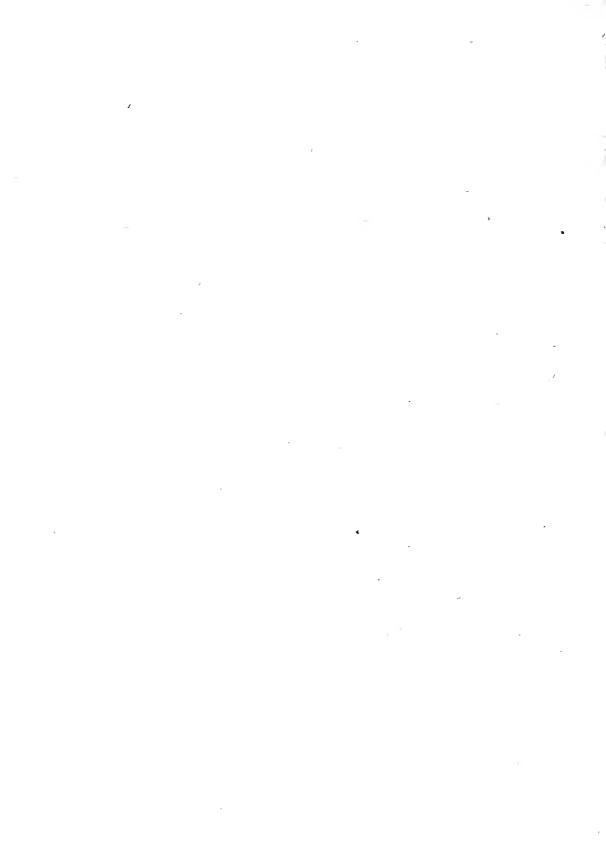
L. Euler. Problème de Géométrie résolu par l'Analyse de Diophante		I	Page 3
L. Euler. De casibus, quibus formulam $x^{+} + mxxyy + y^{4}$ ad qu	and water ma		3
cere licet	iadratum	rcqu_	10
L. Euler. Solutio problematis mechanici	•	•	23
L. Euler. De problemate Trajectoriarum orthogonalium ad superficies	translato		33
N. Fu/s. De sphaeris osculantibus	ttansiato	'	61
	•	•	
F. T Schubert. Demonstration du théorème de Taylor	•	•	71
Littrow. Disquisitiones ad theoriam epicyclorum pertinentes	•	•	80
Littrow. De summatione serierum	•	•	110
F. T. Schubert. De transformatione seriei in fractionem continuam	•	•	139
V. Wisniewski. Mesure de la hauteur du mont Elbrus au dessus du ni			
N. Fuss. Recherches sur deux séries dont la sommation a été proposé	e par la	Socie-	
té Royale des Sciences de Copenhague	•	•	194
N. Fufs. Supplementum ad diesertationem: Investigatio terminorum seri	ci ex dat	is pro-	
ductis terminorum contiguorum	•	•	214
V. Wisnievski. Vérification de la Latitude de l'Observatoire de l'Acad	émie	•	225
F. T. Schubert. De l'aberration des étoiles fixes		•	247
P. D. Bazaine. Mémoire sur l'application à la Géométrie plane de plu tés de l'Hyperboloïde de révolution et du cone, et résoluti	*	-	
problemes relatifs aux courbes du 2 degré			255
J. Sniadecki. Observations astronomiques, faites à l'Observatoire de 1	'Universi	ité <i>Im</i>	
periale de Vilna		•	286
Tr C 1 '			
II. Section des sciences physiques	S.		
B. Séverguine. Sur la pierre Chinoise nommée You			297
Tilésius. De piscium australium novo genere icone illustrato.	•		301
Tilésius. De Geckone australi agrapode, nec non de generum natura	lium in	Zoolo-	
gia systematica dignitate tuenda, atque de Geckonibus in gen			311
B. Séverguine. Sur une cochlide du Gouvernement de Twer			350
C. P. Thimberg. Coleoptera Capensia, antennarum clava solida et perfe	oliata		362

		\mathbf{P}_{age}
N. Nordenskiöld. De Rumänzovite, fossili Fennico novo, disquisitio .		373
G. J. Billberg, Novae Insectorum species descriptae	•	381
P. Zagorski. De supernumerario sive abducente aecessorio oculi musculo, in	cadave	-
re hominis observato		396
C.P. Thunberg. Ursus Brasiliensis, nova quaedam species, descripta et deli	neata	400
B. Petrow. Extrait des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg.		e
MDCCCVIII		403
777 G		
III. Section des sciences politiques.		
H. Storch. De l'emploi du crédit, pour subvenir aux beseins du Gouvernemen	nt, dan	S
les états modernes, et particulièrement en Russie		411
H. Storch. Des variations dans les prix des marchandises		432
C. T. Herrmann. Sur l'état actuel de l'arpentage en Russie		439
C. T. Herrmann. Recherches statistiques sur la septieme revision .	•	449
IV. Section d'Histoire et de Philologie.		1
Ouvaroff. Examen critique de la fable d'Hercule, commentée par Dupuis		459
C. M. Frühn. Epitaphium Cuffoum Mehtense, anni p. C. n. MCLXXIV.		481
C. M. Frühn. Onyx Cuficus Sorano - Neapolitanus		518

•

•

•



HISTOIRE

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES SCIENCES.

ANNÉES 1815 ET 1816.



HISTOIRE

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Années 1815 et 1816.

I.

EVÈNEMENS MÉMORABLES.

Le Secrétaire lut une Communication adressée à l'Académie par M^{gr}. le Ministre du Culte, Prince Alexandre Golitzyn, qui fait savoir qu'ayant été nommé très-gracieusement à faire les fonctions du Ministre de l'Instruction qui vient d'obtenir sa dimission, l'Académie doit s'adresser directement à Son Excellence, pour les affaires qui concernent ce Ministère.

Mécredi, 13 Septembre 1816, Mgr. le Prince Golitzyn, en fonction de Ministre de l'Instruction, vint visiter l'Académie à 10 heures du matin. Mrs. les Académiciens, assemblés dans la salle de la bibliothèque, requirent Son Excellence, et le Secrétaire ent l'honneur de Lui présenter ceux qui ne Lui étoient pas encore connus personnellement. Mgr. le Ministre visita successivement la Bibliothèque, le Muséum d'Histoire naturelle, les Cabinets d'Anatomie, de Mineralogie, de Physique, de Curiosités, celui de Pierre le Grand, le Medailler, l'Observatoire, le grand Globe de Gottorp, le Com te d'Administration, la Salle des Conférences et l'Archive, et quita l'Académie à 2 heures, en temoignant aux Académiciens sa saus-

faction du bon ordre, ainsi que ses regrèts de ce que des collections aussi précieuses et instructives n'eussent pas un Local assez spacieux, pour être exposées avec tout l'avantage qui convient au nombre et à la beauté des objèts qui les composent.

II.

CHANGEMENS ARRIVÉS DANS L'ACADÉMIE.

1) Membres décédés.

Académicien extraordinaire:

Mr. Thimothée Smélovski, Professeur de Pharmacie et Académieien de l'Académie IMPÉRIALE de Médéeine et de Chirurgie, Membre de la Société libre économique, Conseiller de Collège et Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4°. degré, décéda le 21 Octobre 1815, dans la 46°. année de son âge, à la suite d'une apoplexie abdominale. Le Défunt fut reçu Adjoint de l'Académie pour la Botanique le 19 Mai 1802 et Académicien extraordinaire le 14 Août 1803.

Membres honoraires de l'Intérieur:

Mr. Bénoit François Jéan Hermann, Capitaine en Chef des Mines de la 4^{me} classe et Chevalier de l'ordre de S^{te}. Anne de la 4^{re} classe, mourût à St. Pétersbourg le 31 Janvier 1815, dans la 64^{me} année de son àge. Le Défunt avoit eté agrègé le 9 Janvier 1786 et avoit excreé les fonctions d'Académicien effectif depuis 1796 jusqu'en 1801.

S. E. Mr. le Comte Jean Potozki, Conseiller privé, Membre du Collège des Affaires étrangères, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 2^{de} classe, de l'Aigle blane et de Stanislas. Le Definit avoit été élu Membre honoraire le 29 Janvier 1806, et mourait à Tulezme en Podolie en Janvier 1816.

Membres honoraires externes:

Mr. Thomas Bugge, Conseiller de Justice de S. M. le Roi de Danemark, Membre et Secrétaire perpétuel de la Societé Royale des Sciences de Copenhague, Directeur de son Observatoire et du Bureau des Longitudes, Chevalier de l'ordre de Danebrog, mourût le 15 Janvier 1815, dans la 74^{me} année de son âge. Le Defunt avoit été reçu le 5 Octobre 1803.

Mr. Everard Auguste Guillaume de Zimmermann, Conseiller d'Etat privé de S. A. S. M^{gr}. le Duc de Brunswik, Directeur du Gymnase illustre Ducal, connu sous le nom de Carolinum etc., décéda à Brunswik le 4 Juillet 1815. Le Defunt avoit été reçu au nombre des Honoraires de l'Academie le 28 Juillet 1794, et au nombre des pensionnaires, à la suite d'un ordre spéciel de feu l'Empéreur Paul I. de glorieuse mémoire, le 1 Octobre 1797.

Mr. Abel Burja, Professeur de Mathématiques de l'Académie militaire et membre de l'Académie Royale des Sciences de Berlin, etc. décéda à Berlin le 10 Fevier 1816, dans la 64^{me} année de son àge. Le Defunt avoit été reçu le 28 Juillet 1794.

Mr. Laurent Florentin Fréderic de Crell, Conseiller de Cour de S. M. le Roi d'Hannovre, et Professeur de Médecine à l'Université de Gottingue, mourut le 7 Juin 1816, agé de 73 ans. Le Défunt avoit éte reçu le 23 Octobre 1786.

Correspondans de l'Intérieur:

Mr. Jean George André Brückner, Conseiller d'Etat. Le Défunt avoit été reçu le 13 Avril 1808.

Mr. Pierre Changuine, Conseiller des Mines à Barnaoul, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 4^e. classe, mort à Barnaoul le 3 Juin 1816 dans la 75^e. année de son âge. Le Défunt avoit été reçu Correspondant de l'Académie, le 31 Août 1795.

Mr. Léon de Waxell, Colonnel des Ingénieurs des voyes de Communication, mort le 6 Septembre 1816. Le Defunt avoit été reen Correspondant le 29 Février 1804.

Correspondans externes:

Mr. Eugène Melchior Louis Patrin, Correspondant de l'A-cadémie depuis 1779.

Mr. le Docteur Jean Jérome Schroeter, Conseiller de Justice de S. M. Britannique, Grand-Baillif à Lilienthal dans le Royaume d'Hannovre et Chevalier; membre de plusieurs Académies, mort à Lilienthal le 29 Août 1816, agé de 71 ans. Le Défunt avoit été reçu au nombre de Correspondans le 28 Juillet 1794.

2) Nouvelles réceptions.

a. Académiciens ordinaires:

Mr. Vincent Wisnievski, pour l'Astronomie, élu le 15 Février 1815.

Mr. Alexandre Nicolas Scherer, pour la Chymie, élu le 16 Août 1815.

Mr. Philippe Krug, pour l'Histoire, élu le 16 Août 1815.

Mr. Basile Petroff, pour la Physique expérimentale, élu le 16 Août 1815.

b. Membre honoraire de l'Intérieur:

S. E. Mr. Alexandre Khvostoff, Conseiller privé, Chef de la Banque IMPÉRIALE, Membre de l'Académie IMPÉRIALE Russe et Chevalier; reçu le 8 Mars 1815.

c. Membres honoraires externes:

S. E. Sir Gore Ouseley, Baronet, Ambassadeur extraordinaire de S. M. Britannique à la Cour de Perse; reçu le 8 Mars 1815.

Mr. le Major James Reunel, Membre de la Société Royale des Sciences de Londres et de l'Institut de France; reçu le 4 Octobre 1815.

Mr. Simonde de Sismondi, Membre du Conseil de Commerce, Arts et Agriculture du Canton de Léman, à Genève; reçu le 26 Juin 1816.

Mr. Jean Baptiste Say, ancien Membre du Tribunat, Professeur d'Economie politique à l'Athénée Royal de Paris; reçu le 26 Juin 1816.

d. Correspondans de l'Intérieur:

Mr. le Docteur Chrétien Steven, Conseiller de Collèges, Sur-Intendant des établissemens de la Couronne pour la Culture des soyes, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4^e. degré; reçu le 22 Février 1815.

Mr. Alexis de Mairoff, Colonnel des Ingénieurs de la Suite de SA MAJESTÉ L'EMPEREUR, Chevalier de l'ordre de St. George du 4^{me} degré et de St. Vladimir 4^e. classe; reçu le 23 Août 1815.

Mr. le Docteur Maurice d'Engelhardt, Gentilhomme Livonien; élu le 31 Janvier 1816.

Mr. Michel Buldakoff, Conseiller de Cour, Directeur de la Régence de la Compagnie Russe-Américaine, et Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4°. degré; élu le 31 Janvier 1816.

Mr. Fréderic Parrot, Docteur en Médecine et Chirurgie; élu le 11 Septembre 1816.

Mr. Chrétien de Beck, Conseiller d'Etat actuel et Chevalier; élu le 27 Novembre 1816.

e. Correspondans externes:

Mr. le Baron d'Eschwegue, Lieutenant - Colonnel au Scrvice du Roi de Portugal; reçu le 22 Février 1815.

Mr. Auguste de Kotzebue, Conseiller d'Etat et Chevalier, Consul-général à Königsberg, Membre de l'Académic Royale des Sciences de Berlin; reçu le 4 Octobre 1815.

Mr. Henry de Struvé, Conseiller de Collèges et Chevalier, Chargé des Affaires de SA MAJESTE IMPÉRIALE près des villes hanséatiques; élu le 31 Janvier 1316.

f. Au nombre des Elères:

Le Pensionnaire de l'Académie, Mr. Paul Fuss, pour les Mathématiques; reçu le 1 Février 1815.

3) Election de membres du Comité d'Administration:

Mr. l'Academicien Severguine, pour deux ans, à la place de Mr. l'Académicien Schubert; élu le 16 Août 1815.

Mr. l'Académicien Schubert, pour deux ans, à la place de 5. E. Mr. l'Académicien Fuss; élu le 14 Août 1816.

4) Gratifications, Décorations et Avancemens civils:

Mr. l'Académicien extraordinaire Herrmann notifia: que par un Oukaze SUPRÈME, daté du 17 Février 1816, SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR a daigné très-gracieusement l'avancer au rang de Conseiller d'Etat, en sa qualité de Chef du Bureau statistique auprès du Ministère de la Police.

Mr. l'Académicien Storch notifia, qu'ayant fait présenter des exemplaires de son Cours d'Économie politique à L. L. M. M. le Roi de France et le Roi de Prusse, il a reçu de ces Souverains deux beaux cadeaux: du premier un Solitaire de 3000 Roubles, et du second une bague de 1000 Roubles de valeur.

Mr. l'Académicien Zagorski remit une copie d'un Oukaze SUPREME, daté du 4 Septembre 1816, par lequel lui et Mr. l'Académicien Pétroff, en leur qualité d'Académiciens de l'Académic IMPERIALE de Médecine et de Chirurgie, ont été avancés au rang de Conseillers d'Etat, avec l'ancienneté fixée par la loi.

Son Excellence Mgr. le Ministre en fonction fit savoir à l'A-cadémic que sur sa représentation, SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR, par un Oukaze donné le 9 Décembre 1816 au Chapître des ordres, a daigné très-gracieusement accorder à Mr. l'Académicien Kruq l'ordre de Ste. Anne de la 2^{de} classe.

Mr. l'Académicien Schubert sut avancé, par un Oukaze SU-PRÈME du 20 Décembre 1816, au rang de Conseiller d'Etat actuel.

Le Secrétaire notifia à la Conférence que Mr. l'Académicien extraordinaire *Herrmann*, en sa qualité de Professeur de l'Institut pédagogique, a obtenu la décoration de l'ordre de S^{te}. Anne de la 2^{de} classe.

5) Distinctions littéraires:

Mrs. les Académiciens Fuss et Schubert furent reçus au nombre des Membres honoraires de l'Académie Américaine des Sciences et Arts à Boston en Massachusetts, en Novembre 1812.

Mr. l'Académicien extraordinaire Schérer, sut reçu membre honoraire de l'Université IMPÉRIALE de Vilna, le 15 Mai 18 f5.

S. E. Mr. l'Académicien Fuss fut reçu par l'Académie Impériale et Royale des Sciences et Arts à Padoue au nombre de ses Membres honoraires externes le 16 Avril 1816.

III.

PRÉSENS FAITS À L'ACADÉMIE.

1) Pour la Bibliothèque:

De la part du Comité de Censure de l'Université IMPÉRIALE de Dorpat :

Cent - vingt - neuf dissertations et autres brochures imprimées dans son arrondissement.

De la part de l'Université IMPÉRIALE d'Abo:

- 1°) Les dissertations académiques qui ont été publiées à Abo dans le courant de l'année 1814.
- 2°) Orationes panegyricae trilingues, quibus paci Parisiis, die XVIII. Maii anno 1814 compositae, simulque Augusto orbis pacificatori Alexandro I. gratulabunda plausit Academia Aboensis. Aboae 1815. 4°.
- 3°) Tentamen mineralogico-chemicum de Pargasite; auctoribus Bonsdorff et Lindewall. Aboae. 1816. 4°.

De la part du Département IMPÉRIAL de l'Amirauté:

1° 1 Морскій місяцослові на літо 1816. С. П. бургі 1815. 8°.

2° / Морскін місяцословь на літо 1817. С. П. бургь 1816. 8°.

- De la part de l'Académie Américaine des Sciences et Arts de
 - Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. III. Part. 1 et 2. Cambridge 1809 and 1815. 4°.
- De la part de l'Académie Royale des Sciences de Stokholm:
 - 1°) Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar, försten och sednare hälften of är 1814. Stokholm 1814. 8°.
 - 2°) Kongl. Vetenskaps Akademiens Handlingar, for är 1815. Stokholm 1815. 8°. (en deux volumes.)
 - 3°) Svensk Botanik, utgifven af. G. I. Billberg, med text föfattad af Oloff Swartz, Sjuude Bandet, Häftet 73 84. Stokholm 1812 1815. 8°. (Douze cahiers.)
- De la part de la Société Royale vétérinaire de Copenhague:

 Analyse des travaux de la Société Royale vétérinaire à Copenhague. 2^d rapport. Copenhague 1815. 4°.
- De la part de la Société des amis Scrutateurs de la nature à Berlin:
 - 1°) Der Gesellschaft naturforschender Freunde Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde. VI. Jahrg. 4^{tes} Quartal und VII. Jahrg. 1^{stes} Quartal. Berlin 1814-1815. 4°.
 - 2°) Der Gesellschaft naturforschender Freunde in Berlin, Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde. VII. Jahrg. 2^{tes} und 3^{tes} Quartal. Berlin 1815. 4°.
- De la part de la Société Royale des Sciences de Londres:
 Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for
 the year 1814. Part 1 and 2. London 1814. 4°.
- De la part de la Société Royale des Sciences d'Edinbourg:
 Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. VII. Part.
 2. Edinbourg 1814. 4°.

De la part de l'Académie IMPÉRIALE Russe :

- 1°) Изврстія Россійской Анадеміи. Книжка 1-я. С. П. бургва 1815. 8°.
- П. С. С. П. бургі. 1815. 8°.
 - 3°) Изврстія Россійской Академін, Книжка 2-я. С. П. бургь. 1816. 8°.

De la part de l'Académie Royale des Sciences de Munich:

- 1°) Denkschriften der königlichen Akademie der Wissenschaften zu München für das Jahr 1813. München 1814. 4°.
- 2°) Von den bisherigen Versuchen über längere Voraussicht der Witterung; von A. Ellinger. München 1815. 4°.
- 3°) Bruchstück einer Bairiscen Handelsgeschichte, aus der Regierung Herzog Ludwigs des Strengen, vom J. 1253 1294; von Karl H. v. Lang. München 1815. 4°.
- 4°) Ueber einige seltene und unbekannte Schaumünzen Herzogs Albert V; von E. I. Streber. München 1814. 4°.
- 5°) Ueber die Gottheiten von Samothrace; von L. W. Schelling. München 1815. 8°.
- 6°) Beiträge über den Einfluss der Himmelskörper auf unsere Atmosphäre; von A. Ellinger. München 1814. 8°.
- 7°) Vorschläge zur Einrichtung einer Staatsverwaltung im Allgegemeinen; von C. F. v. Wiebeking. München 1815. 8°.
- 3°) Ueber die leichtesten Methoden, hölzerne Brücken für den anrückenden Feind unbrauchbar zu machen. München 1813. 8°.

De la part de la Société Wernerienne établie à Edinbourg:

Memoirs of the Wernerian Natural History - Society. Vol. I. for the years 1311. 12. 13. Edinburgh 1811 et 1814. 8°.

- De la part de l'Académic IMPÉRIALE de Médecine et de Chirurgie:
 - Всеобщій Журналь врачебной науки, издаваемый Императорскою Медико Хирургическою Академією. N°. I. II. С. II. бургь 1816—8°.
- De la part de l'Académie Royale des Sciences de Göttingue:
 Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gœttingensis recentiores. Vol. I. ad annos 1808—1811. Gœttingae 1811. 4°.
- De la part de l'Académie Impériale et Royale des Sciences de Padoue:
 - Statuto della I. R. Accademia di Scienze, lettere ed arti di Padova, e Catalogo degli Accademici. Podova 1816. 4°.
- De la part de l'Université IMPÉRIALE de Dorpat:
 - Praelectiones semestres, in Caesarea universitate litteraria, quae Dorpati constituta est, a Cal. Aug. anni MDCCCXVI habendae, indicuntur a Rectore et Senatu academico. Dorpati 1816. folio.
- De la part de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin:
 - Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin, aus den Jahren 1804 1811; nebst der Geschichte der Akademie aus diesem Zeitraum. Berlin 1815. 4°.
- De la part de Mr. l'Academicien extraordinaire Langsdorff:

 Bemerkungen auf einer Reise um die Welt in den Jahren 1803

 1897; von G. H. v. Langsdorff, mit 17 Kupfern. Frankfurth a. M. 1812. 4°.
- De la part de Mr. le Comte La Place:

 Théorie analytique des probabilités; par Mr. le Comte La Place;

 2^{de} édition. Paris 1814. 4°.
- De la part de Mr. le Professeur Gustave Ewers à Dorpat:

 1°) Kritische Vorarbeiten zur Geschichte der Russen; 1 tes und
 2 tes Buch; von Joh. Phil. Gustav Ewers. Dorpat 1814. 4°.

- 2°) Geschichte der Russen. Versuch eines Handbuchs; von Joh. Phil. G. Ewers. 1 ter Theil. Dorpat 1846. 8°.
- De la part de Mr. le Professeur Gadolin à Abo:
 - 1°) О употребленін горячих в паровы при винокуренін. Сочиненіе И. Гад лина.
 - 2°) Dissertationes Academicae, Historiam doctrinae de affinitatibus chemicis exhibentes. Abo 1815. 4°.
- De la part de Mr. l'Académicien Zakharoff:
 - Desiderii Spreti, Historici Ravennatis de amplitudine, eversione et restauratione urbis Ravennae, libri- tres, a Camillo Spreti in italicum idioma versi et notis illustrati. Vol. I. et voluminis II. Pars 1 et 2. Ravennae 1793 1796. 4°.
- De la part de Mr. Jean Sniadecki, Recteur de l'Université de Wilna:
 - Pisma rozmaite Jana Sniadeckiego. Tom. 1 et 2. w Wilnie. 1814. 8°.
- De la part de Mr. le Professeur Morgenstern à Dorpat :
 - 1°) Dörptische Beyträge für Freunde der Philosophie, Litteratur und Kunst. Jahrg. 1814. 1 te Hälfte. Dorpat 1816. 8°.
 - 2°) Grundrifs einer Einleitung zur Aesthetik, mit Andeutungen zur Geschichte derselben; von Karl Morgenstern. Dorpat 1815. 8°.
 - 3°) Praelectiones semestres in Caesarea Universitate litteraria; quae Dorpati constituta est, a Calend. Aug. anni 1815 habendae. Insunt C. Morgenstern Symbolae criticae in Platonis Politiam ab Astio denuo editam. Dorpati. folio.
 - 4°) Dörptische Beyträge für Freunde der Philosophie, Litteratur und Kunst, von Carl Morgenstern. Jahrg. 1814. 2^{te} Hälfte. Dorpat und Leipzig 1815. 8°.

- De la part de Mr. le Professeur Stoïkovitch :
 - 1°) Начальныя острванія Физической Географіи Аванасія Стойковича и пр. Харькові 1813. 8°.
 - 2°) Система Физики, сочиненіе Аванасія Стойковича и пр. Книга I и II. Вь Харьковь 1813. 4°.
- De la part de S. E. Mr. le Général d'Auvray:
 - Dictionnaire chinois, françois et latin, publié par Mr. de Guignes, Résident de France à la Chine. Paris 1813. gr. in folio.
- De la part de Mr. le Docteur Wollaston :
 - 1°) On the elementary particles of certain cristals.
 - 2°) On a method of freezing at a distance.
 - 3°) On a method of drawing extremely fine wires, and a description of a single lens micrometre.
 - 4°) On a periscopic Camera obscura and microscope.
 - 5°) On a synoptic scale of chemical equivalents.
- De la part de Sir Humphry Davy:
 - 1°) Some experiments on a new substance, which becomes a violet coloured gas by heat.
 - 2°) An account of some new experiments on the fluoric compounds.
- De la part de S. E. Mr. le Conseiller d'Etat actuel d'Ouvaroff: Essai sur les mystères de l'Eleusis. St. Pétersbourg 1815. 8°.
- De la part de Mr. le Conseiller privé Léonhard à Hanau:
 - 1°) Taschenbuch für die gesammte Mineralogie, mit Hinsicht auf die neucsten Entdeckungen. VIII Jahrg. 2^{te} Abtheilung. Frankfurth a. M. 1814. 8°.
 - 2°) IX Jahrgang 1^{te} u. 2^{te} Abtheilung. Frankf. a. M. 1815. 8°.

- 3°) Darstellung der Farben als äußeres Kennzeichen der Naturkörper.
- De la part de Mr. le Conseiller de Légation de Struve:

 Mineralogische Beyträge, vorzüglich in Hinsicht auf Würtemberg
 und den Schwarzwald; von H. S. Gotha 1807. 8°.
- De la part de Mr. le Conseiller médicinal et Chevalier Klaproth à Berlin:
 - Chemische Abhandlungen gemischten Inhalts, von M. H. Klaproth. Berlin 1815 8°.
- De la part de Mr. le Professeur Develey à Lausanne: Elémens de Géométric; par Em. Develey. Paris 1812. 8°.
- De la part de Mr. de Zimmermann à Brunsvic: Rufsland's glorreiche Selbstaufopferung zur Rettung der Menschheit. Leipzig 1815. 8°.
- De la part de Mr. le Professeur Bojanus á Filna: Introductio in Anatomen comparatam, Oratio academica. Auctore Lud. Henr. Bojanus. Vilna 1815. 8°.
- De la part de Mr. l'Academicien Storch:

 Cours d'Économie politique, ou Exposition des principes qui déterminent la prospérité des nations. Ouvrage qui a servi à l'instruction de Leurs Aitesses Impériales les Grands Dues Nicolas et Michel; par Henry Storch etc. St. Pétersbourg
- De la part de Mr. le Conseiller de Collèges Parrot à Dorpat? Grundrifs der Physik der Erde und Geologie, zum Gebrauch der akademischen Vorlesungen; von G. F. Parrot. Riga 1815.8°.

1815 in 8°. Tome I - VI.

De la part de Mr. le Conseiller de Collè es Fischer à Moscou:

Описаніе курицы имбющей віз профиліз фигуру человіта,
сіз присовокупленіемі пізкоторых із наблюденій и ен изо-

- браженія; изданное Профессоромь Фишеромь. Москва 1815. 8°.
- De la part de Mr. le Conseiller d'Etat et Chevalier Alelung: Catharinen der Großen Verdienste um d'e vergleichende Sprachkunde; von Fried. Adelung. St. Petersburg 1815. 4°.
- De la part de Mr. le Professeur Jason Petroff:

 Начальныя основанія Бопганики, для преподаваніи. С П.
 бургь 1815. 8².
- De la part de Mr. Bessel, Astronome à Königsberg:
 Untersuchung der Größe und des Einflusses des Vorrückens der
 Nachtgleichen; von F. W. Bessel. Berlin 1815. 4°.
- De la part de Mr. l'Abbé Antonio Scoppa:

 Des beautés poëtiques de toutes les langues, considérées sous le rapport de l'accent et du rhythme. Ouvrage couronné par la 2^{de} classe de l'Institut. Paris 1816. 8°.
- De la part de Mr. le Conseiller de Cour Grindel:

 Versuch über die künstliehen Gührungs-Mittel, nach dem itzigen

 Zustande der Wissenschaft entwickelt und mit Hinsicht auf die
 innländischen Brannteweinbrennereyen; von Dr. D. H. Grindel.

 Riga 1816. 8°.
- De la part de Mr. le Professeur Degouroff à Kharkoff: De la civilisation des Tatares Nogaïs, dans le midi de la Russie Européenne; par le Professeur Degouroff. Kharkoff 1816. 8°.
- De la part de Mr. l'Astronome Schröter à Lilienthal:

 Beobachtungen und Bemerkungen über den großen Kometen von
 1811; von Dr. Joh. Hier. Schröter. Göttingen 1815. 8°.
- De la part de Mr. l'Académicien Bode à Berlin:
 Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1818, nebst einer Sammlung der neuesten in die astronomischen Wissenschaften einschlagenden Abhandlungen; herausgegeben von I. E. Bode. Berlin 1815. 8°.

- De la part de Mr. le Professeur et Chev. Thunberg à Upsala: Douze dissertations publiées à Upsala en 1815.
- De la part de Mr. Noël de la Morinière:
 - Histoire générale des pèches anciennes et modernes, dans les mers et les fleuves des deux continens; par S. B. I. Noël de la Morinière. Tome I. Paris 1815. 4°.
- De la part de Mr. le Lieutenant des Ingénieurs Scuastianoff:
 Основанія :начершашельной Геомешріи, для употребленія воспитанниками Института Корпуса Инженеровь Путей Сообщенія. Сочиненіе Г. Потье, Корпуса Инженеровь Подполковника и пр. Переводь Инженерь-Порутчика Сетваєтьянова. С. II. бургь 1816. 8°.

'De la part des Auteurs et Éditeurs:

- Słovnik Jesyka Polskiego, przez M. Samuiła Bogumiła Linde etc. Tom I. Czesc. I. A F. w Warzawie 1807. 4°. (Retardé)
- Słovnik Jesyka Polskiego, przez M. Samuiła B. Linde etc. Tom. VI. i ostatni. U Z. w Warszawie 4814. 4°.
- Abel Burja'.s Lehren der hylodynamischen Philosophie. Berlin 1812. 3°.
- Anleitung den Seidenbau im Freyen zu betreiben; von Franz Ritter Edeln von Heintl u. s. w. Wien 1815. 8°.
- Новой, простой и дешевой способь бъленія пеньки, и пеньковой пряжи. Изобрьтеніе Порушчика Щепочкина. С. П. бургь 1815. 3°.
- О усовершенешвованін винокуренія посредствомі выгоднійшей посуды для броженія, и нечи для виннаго куба. Сочиненіе Кол. Сов. и Кав. Гр. Энгельманна и пр. С. II. бургіз 1815. 8°.
- Widerlegung einiger Stellen der in N°. 92 der Göttingenschen gelehrten Anzeigen von 1813 eingerückten Beurtheilung eines zu Paris erschienenen Werks: Memoire explicatif sur la Sphere Caucasienne etc. von Peter Körner. Paris 1813. 4°.

- Encore quelques argumens contre le Zodiaque. Paris 1814. 8°.
- Astronomical observations, made at the Royal Observatory at Greenwich, in the year 1811, by John Pond. Esq. Vol. I. London 1812 in folio.
- Топо Медическое описаніе містечка Кемпна, что ві Великой-Польші, гді быль віз 1813 и 1814 годахі времянной гошпиналь для Императорской Россійской Гвардіи. Сочинено Главнымі Врачемі сего гошпиналя А. Владимирскимі. С. П. бургі 1815. 8°.
- Epistolae Sodalium Socraticorum philomatiae, cum praefatione et appendicibus Guilielmi Leonhardi Mahne, Rectoris Zierizcani Gymnasii. Zierizcae. 1813. 8°.
- Das Majestäts Verbrechen aus den Geboten Gottes und der Vernunft, so wie auch aus den alten und den neuen Staats-Gesetzgebungen, philosophisch - juridisch erklärt und eritisch festgesetzt; von Dr. Helmuth Winter. Berlin 1815. 8°.
- Meteorologisches Jahrbuch von 1813, mit Rücksicht auf die hieher gehörigen meteorischen und astronomischen Beobachtungen, nebst den Aspecten der Sonne, der Planeten und vorzüglich des Mondes; vom Canonicus Augustin Stark etc. Augsburg 1814. 4°.
- Beschreibung der meteorologischen Instrumente, nebst einer Anleitung zum Gebrauch derselben bey den Beobachtungen, mit 5-Kupfertafeln; vom Canonicus Augustin Stark etc. Augsb. 1815. 4°,
- Recherches sur l'acide prussique; par Mr. Gay-Lussac. Paris 1815. 8°.
- Reise in die Krym und den Kaukasus; von Moritz v. Engelhardt und Fried. Parrot; mit Kupfern und Karten. 1^{ter} und 2^{ter} Theil. Berlin 1815. 8°.
- Alexander, Keizer van Rufsland, in Holland en te Zaardam in 1814; door Jacobus Scheltema, te Amsterdam 1814. 8°.
- Peter de Groote, Keizer van Rufsland, in Holland en te Zaardam in 1697 en 1717, 'door M. Jacobus Scheltema 1 en 2 Deel, Te Amsterdam 1814. 8°.

- Coup d'œil géognostique sur le Nord de l'Europe en général, et particulièrement de la Russie; par le Comte G. de Razoumovski etc. St. Pétersbourg 1816. 8°.
- Primitiae Florae Galiciae Austriacae utriusque; Auctore Besser. M. D. Pars 1 et 2. Viennae 1809. 8°.
- Supplementum II et III. ad Catalogum plantarum in horto botanico Gymnasii Volhyniensis Cremeneci cultarum. Auctore Besser. Cremeneci 1814. 8°.
- On the laws which regulate the polarisation of light by reflexion from transparent bodies; by David Brewster. London 1815. 4°.
- Nereis Britannica, containing all the species of Fuci, natives of the British coasts, with a description in English and Latin, and plates coloured from nature; by John Stackhouse. Bath 1801. gr. fol. royal.
- Theophrasti Ercsii de Historia plantarum libri decem; curante John Stackhouse. Oxonii 1843. Pars I et H. 8°.
- Extracts from Bruce's Travels in Abyssinia, and other modern authorities respecting the Balsam and Myrrh Tree's; by John Stackhouse. Bath 1815. 8°.
- Kurze Beschreibung der Vögel Liv und Esthlands; von Dr. Bernhard Meier etc. mit einer Kupfertafel. Nürnberg 1815. 8°.
- Praktische Darstellung der Ziegelhüttenkunde; von Joh. Nepom. Schonauer etc. Salzburg 1815. 8°.

2) Pour le Cabinet de Curiosités:

De la part de Mr. l'Académicien catraordinaire Langsdorff:

- 1°) La continuation de la suite de ses empreintes des papillons du Brésil, au nombre de trente.
- 2°) Seize peaux d'oiseaux du Brésil.
- 3°) Deux œufs de Kaiman.
- De la part de Mr. l'Académicien Severguine: Un cacadou empaille.

- De la part de Mr. le Secrétaire de Collège Fedor Kolessof à Yakoutsk:
 - Un crane de Rhinoceros, avec sa machoire inférieure et un fragment de défense de Mamouth, trouvés l'un dans la rivière Kolyma en 1812, et l'autre sur les bords de la mer glaciale en 1811.
- Reçu du Comptoir de la Cour , par ordre de S. E. Mgr. le Ministre :

Une collection de cent oiseaux empaillés, arrivés de l'Angleterre.

- De la part de Mr. le Conseiller de Cour et Chev. Buldakoff:
 - 1°) Une peau de Loup noir, variété qu'on trouve fréquemment. dans la Sibérie orientale.
 - 2°) Une peau du Baïbak. (Arctomys Bobak.)

Envoyés par un Anonyme::

- 1°) Un tronc de peuplier noir à deux tiges réunies par une grosse branche de traverse, et
- 2°) un morceau de granite à filons de gypse.
- De la part de Mr. le Conseiller de Collèges et Chevalier. Steven à Symphéropol :

Le Crane d'un chien marin, de l'espèce de Phoca barbata...

De la part de la Régence de Sarskoye Sélo:

Une vigogne amenée par le vaisseau Souvoroff et morte, dans la ménagerie.

- Par Ordre de SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR: Une corne on dent de Narval (Licorne de mer.)...
 - 3) Pour le Cabinet d'instrumens mathématiques :
- De la part de Mr. le Conseiller de Cour et Chev. Karsakoff:
 Uni Astrolabe de poche, d'une construction simple et d'un usage:

facile, exécuté içi à St. Pétersbourg d'après les idées de l'inventeur.

- 4) Pour le Cabinet de Minéralogie:
- De la part de Mr. le Docteur Hamel :
 - 1°) Un morceau de la pierre à chaux flexible qu'on a trouvée en petite quantité près de Sunderland.
 - 2°) Huit pièces de Schiste alumineux de Rensrewshire dans ses différens degrés de décomposition.
 - 3°) Une lampe de l'invention de Sir Humphry Davy, propre à prevenir les malheurs qui arrivent si souvent dans les mines de charbon de terre, par l'inflammation du gaz hydrogène carbonné; avec la déscription.
- De la part de Mr. l'Académicien Zakharoff:

 Un goniomètre de l'invention de Carangeau, la même dont Haüve se sert dans ses recherches cristallographiques.
- De la part de Mr. le Docteur Ure à Glasgow: Un tuyau de verre contenant du Jode
- De la part de Mr. le Docteur Lyall à Edinbourg: Quelques minéraux des environs d'Edinbourg, consistans en porphyres, basaltes, schistes etc.; en tout huit numeros.
- De la part de Mr. le Minéralogiste Etter: Un morceau d'étain noir de Cornouaille.
- De la part de Mr. l'Académicien Schérer: Un morceau de Quartz bleu de Finlande.
- À la suite d'un ordre SUPRÈME:

 Une pétrification, appellée pain pétrifié, qui a été trouvé à Tver, dans la rivière Tverza.
- Envoyée de Petrozavodsk:
 Une caisse, contenant 145 pièces de minéraux.

- 5) Pour la Bibliothèque de l'Observatoire:
- De la part de Mr. Pasquich, Directeur de l'Observatoire Royal d'Ofen:
 - 1°) Epitome elementorum Astronomiae sphaerico calculatoriae; Auctore I. Pasquich etc. Pars 1 et 2, cum appendice Viennae 1811. 4°.
 - 2°) Nachricht von der neuen Königlich Ungarschen Universitäts Sternwarte zu Ofen. Ofen 1813. 8°.
- De la part de Mr. l'Académicien Bode à Berlin:
 - 1°) Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1818; herausgegeben von I. E. Bode. Berlin 1815. 8°.
 - 2°) Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1819; herausgegeben von I. E. Bode Berlin 1816. 8°.
- De la part de Mr. le Docteur Bessel à Königsberg:
 - Astronomische Beobachtungen auf der Königl. Universitäts-Sternwarte in Königsberg; von F. W. Bessel. 1^{te} Abtheilung, vom 12 November 1813 bis den 31 December 1814. Königsberg 1815. folio.

IV.

MÉMOIRES ET AUTRES OUVRAGES MANUSCRITS PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

- O привых влиніях в зажигательными называемых в; par S. E. Mr. Fuls.
- O вліянін влиматовь на образованіе ископаемыхь тьль; par Mr. Severguine.
- O пошерь дерева от рубки дровь; раг Mr. Zakharoff.
- O употребленіи віз домашнемі крашеній лишаеві; par le même.
- O пріугоповленій синей краски изв красной канусты; par Mr. Zakharoff.
- Kurzer Auszug meiner Bemerkungen über Brasilien, und besonders die Kapitanie Minas Geraes; par Mr. le Lieutenant Colonnel Baron d'Eschwégue.

- Decades tres Eleutherorum novorum, descripsit I. Fr. Eschholz.
- О необыкновенной уродливости дѣтородных в частей и о раздвоенной хребтовой кости. Сочинение Г. Лобенвейна и пр. переведено св Латинскаго; раз Mr. Zagorski.
- Извреше о убитом вы Сибири, не подалену от Змвиногорскаго рудника Тигры, и о каменномы щеглы, сообщенное Г. Спасскимы, Корреспондентомы Академін Наукы, сы примычаніями Александра Севастыянова.
- Plantarum novarum aut minus cognitarum Pentas prima; par Mr. le Docteur Trinius.
- Determinatio temporis per observatas distantias siderum ab objecto dato terrestri, ipsiusque objecti situs; par Mr. Littrow.
- Выписка учиненнымь наблюденіямь о погодахь и воздушных в явленіяхь вь Пензенской Губерніи и увздв, вь сель Машвевкь вь 1814 году; раг Мг. Europeus.
- Dissertatio de plantis naviformibus; par Mr. Smélovski.
- Versuch einer systematischen Übersicht der chemisch untersuchten Mineral - Wässer Rufslands, nebst einigen vorläufigen Bemerkungen über die Classification der Mineral-Wässer; par Mr. Schérer.
- Über das alte Nordische Jul-Fest, welches im X^{ten} Jahrhundert unter dem Namen το Γοτθικον auch am Hofe in Konstantinopel gefeyert ward; par Mr. Krug.
- Полный Лашинско-Россійскій Ботаническій Словарь, св означеніємь вв ономі місторожденія и продолженія жизни верхів по сіє время извістивкі растівній; раг Mr. Snélovsky.
- De piscatu Wolgensi; par S. E. Mr. Ozeretskovski.
- De praeparatis ad piscatum Wolgensem; par le même.
- Sur la formation du sucre, lors de la préparation du malt et l'échaudement de la farine avec de l'eau bouillante; par Mr. Kirchhoff.
- Наблюденія надь выпаренісмь воды, сибга и льда вы шынкспомы мість; par Mr. Petroff.

- Résultats statistiques sur l'étendue de la surface et sur la population de l'Empire de Russie, depuis 1803 jusqu'en 1811 inclusivement; par Mr. Herrmann.
- Fortsetzung der Untersuchung über die Bestimmung der Anzahl imaginürer Wurzeln, die sich in einer gegebenen algebraischen Gleichung, deren Wurzeln nicht möglich sind, befinden; par Mr. le Docteur Kupfer.
- Histoire de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences, année 1813; par S. E. Mr. Fuss.
- Histoire de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences, :année 1814; par le même.
- Über die Porphyrgebirge am Flusse Akstapha in Georgien; par Mr. Schlégelmilch.
- De transformatione seriei in fractionem continuam; par Mr. Schubert.
- Oписаніе компаса сь діоппірами новой конструкцій полеваго прямоугольника для употребленія при сьемкахь вь поль; раг Mr. Karsakoff.
- Разсужденіе о свойствахь, отношенін и употребленін гиперболическихь функцій; раг S. E. Mr. Fuß.
- Врашное изслъдование унавшаго изб антмосферы порошка или мнимой съры; par l'Élève Mr. Moukhine.
- Замічанія ві проізді кі городу Осташкову; par S.E. Mr. Ozeretskovski.
- Observations astronomiques, faites à l'Observatoire de l'Université IMPÉRIALE de Vilna en 1814; par Mr. Sniadecki.
- Выписна учиненнымь вв С. Пешербургь при Императорской Академін Наукь наблюденіямь о погодахь и воздушныхь явленіяхь и перемьнахь вь 1814 году; par l'Elève Mr. Tarkhanoff.
- Новые опышы о разложенін алмаза и другихь угольныхь веществь; par Mr. Zakharoff.
- De Descensu gravium super arcu Lemniscatae; par S. E. Mr. Fuss.

- Descriptiones quatuor Proteae novarum specierum; par Mr. Thunberg.
- Les observations météorologiques, faites par le Chirurgien-Major Vyssotsky en 1812, dans la ville de Torjok et en 1813 et 1814 dans la ville d'Ostachkoff du Gouvernement de Tver.
- Геометрія ві пространствахі, или приложеніе Алгебраическаго Анализа кіз начершательной Геометріи. Сочиненіе Алекетя Маюрова.
- Vuës générales sur l'étât de l'agriculture en Russie, depuis 1804 jusqu'en 1810 inclusivement; par Mr. Herrmann.
- De parallelepipedi obliquanguli soliditate; par Mr. Littrow.
- Разсунденіе физіологическое о живошной шеплошь; par Mr. Zagorski.
- De nova Medusarum specie; par Mr. Tilésius.
- Idées sur la population du Caucase, et sur l'origine des Géorgiens; par Mr. Steven.
- Замьчанія мон по дорогь изь Москвы вь Бьлоруссію вь 1807 году; рат Mr. Zinovieff.
- Разсужденіе о зарожденій чревныхв, или во внутренностяхв другихв живошныхв обитающихв червей, и о средствахв кв истребленію ихв служащихв. Сочиненіе Блоха, перевель на Россійскій языкв и ивсколькими примвчаніями дополниль Александрв Севастьяновв.
- Observations de la grande Comète de l'an 1811, faites à Novo-Tcherkask au mois d'Août 1812; par Mr. Wisnievski.
- Über die Malz Essigbereitung, die Bleyzucker- und Bleyweis Fabrikation in den Rheingegenden; par Mr. Nassé.
- Continuatio Prodromi Florae Petropolitanae; par Mr. Smélovski.
- Novae species generis plantarum cryptogamarum Hydnum dicti, quae hucusque non sunt in Flora Petropolitana indicatae ac descriptae, cum effigiebus ad naturam delineatis; par le même.
- Anzeige eines Werks über die chemische Litteratur; par Mr. Scherer.
- О древних в начершаніях в и надписях в, отпрывных в в нолу-

4

денной Сибири, близь Саянскихь и Алтайскихь ropb; par Mr. Spasski.

Ladoga, im Gegensatz von Novgorod; par Mr. Krug.

- О городь Гашчинь; par S. E. Mr. Ozeretskovski.
- O пі пошорых войствах в логариемической спирали; par Mr. Collins.
- Николая Фуса ръшеніе разных вопросовь о состояніи равновьсія обремененных в связанных в бревень, о силах в состава, и о давленіи на столбы служащіе подпорами. Сь Латинскаго перевель Императорской Академіи Наукь воспитанникь Павель Фусь.
- Des Maxima et Minima d'une fonction de plusieurs variables; par Mr. Schubert.
- Extrait des Observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg, par feu Mr. Inochodzoff, année 1806, d'apres le vieux Style; rédigé par Basile Pétroff.
- О вигорозачатін віз живопиныхіз и віз растініяхіз; par S. E. Mr. Ozeretskovski.
- Determinatio latitudinis geographicae Observatorii Casaniensis; par Mr. le Professeur Littrow.
- Минералогическія замічанія, учиненныя на пуши изb Моздока вb Тифлись; par Mr. Schlégelmilch.
- Calcul des observations de la Comète de 1815, faites à l'Observatoire de St. Pétersbourg; par Mr. Schubert.
- Über die Sicherungsmittel gegen Feuersgefahr, durch Verminderung der Zündbarkeit des Holzes, Leinenzeugs, Papiers etc.; par Mr. Kirchhoff.
- Démonstration d'un théorème fondamental de la Géométrie élémentaire; par Mr. Kausler.
- Ganz einfache Art eine Zambonische Säule zu construiren; par Mr. le Docteur Grindel.
- Über das Phosphoresciren; par le même.

Разсужденія о наружных отличительных признавах ископаемых тран; par Mr. Séverguine.

Новая Система Минераловь, основанная на наружных опличительных в признавахь; par le même.

Opposition de Jupiter et Occultations observées à l'Observatoire de de l'Académie; par Mr. Schubert.

Nova linearum parallelarum theoria; par Mr. Kausler.

Выппека учиненнымь Қазанской Губернік, Чебоксарскаго увзда вь деревнь Нерадовь наблюденіямь о погодахь и воздушныхь явленіяхь и перемьнахь вь 1815 году; раг Mr. Lokhtine.

Sur les moyens de supprimer la papier monnaie en Russie; par · Mr. Storch.

O жидкихb частяхb человъческого тыла, и вы особенности о крови; par Mr. Zagorski.

Arundo Wilhelmsii; par Mr. Ledebour.

Descriptio et analysis chemica Steinheilithi; par Mr. Gadolin.

Описаніе. города Луги; par Mr. Tchadayeff.

O Poceiйских b бобрах b строющих b плотины; par Mr. Sévastianoff.

Mésure de la hauteur du mont Elbrus audessus du niveau de la mer; par Mr. Wisnievski.

Über die Reinigung des Phosphors; par Mr. Schérer.

O термитахь просто называемыхь былыми муравьями; par Mr. Sévastianoff.

Über eine Stelle in den Bertinischen Annalen, das Volk Rhos betreffend: par Mr. Krug.

Николая Фуса рфшеніе нфкоторых ргидравлических в вопросовь, касательно вышеканія жидкосшей извідилиндрических в сосудовь; переведено св Французскаго и умножено примічаніями воспиталанком в Императ орской Академін Наукі Навлом Фусомь.

Продолженіе наблюденій діланных в безпрерывно два мітелца надіз выпареніемі дь.; а и сніта віз шінчешомі мітелі при различных і градусах і холода; раг Мг. Pétroff.

- Des progrès de la population en Russie, par Gouvernemens, d'apprès la 4^{me}, 5^{me} et 6^{me} Révision. 1^{re} partie; par Mr. Herrmann.
- Описаніе простопародных в лікарствь, какія віз Москві и віз окрестностях в ен простыми людьми потребляются, и віз каких в болівнях в; раг S. E. Mr. Ozeretskovski.
- Мешеорологическія наблюденія 1815 года, діланныя Тверской Губернін віз городі Осташкові Штабі. Лікаремі Высоц-кимі.
- Способь распознавать настояще драгоценные камни отво подложных и подделанных раг Mr. Séverguine.
- Общія понятія о мекустві граненія, шлифованія и полированія камней; par le même.
- Recherches sur deux séries, pour servir de réponse à une quesstion d'Analyse, proposée par la Société Royale des Sciences de: Copenhague; par S. E. Mr. Fuss.
- Des progrès de la population en Russie, par Gouvernemens, d'après, la 4^{me}, 5^{me} et 6^{me} révision. 2^{de} partie; par Mr. Herrmann.
- Recherches sur un problème de la théorie des fonctions équiformes; par Mr. Collins...
- Observations astronomiques, faites à l'Observatoire de l'Université IMPÉRIALE de Vilna en 1815 et 1816 nouveau Style; par Mr. Sniadecki.
- Выписка учиненнымы вы Санкшпептербургы при Императорской Академік Наукы наблюденіямы о погодахы и воздущныхы явленіяхы и перемынахы вы 1815 году; рак Mr. Tarkhanoff.
- O прымских домашних в и диких в млекопитающих в, таквже пинцах в, рыбах в, земноводных в и насвкомых в; раг Mr. Sévastianoff.
- Die Versertigung eines seinen Rum ähnlichen Geistes, mlt Hülse des künstlichen Zuckers; par Mr. Grindel.
- Продолженіе метеорологических вы наблюденій, учиненных вы Змыйногорскомы рудникь, сы 10-го Іюля 1814 по 10-е Іюля 1816 года; раг Mr. Spasski.

- Anleitung zur Bereitung mehrerer Gattungen von künstlichen Mineral Wässern, nebst Bemerkungen über natürliche und künstliche Gesundbrunnen; par Mr. Nassé.
- Примъчанія о разных в предметах в касающихся до каменных в строеній; par Mr Séverguine.
- Calcul de l'opposition de Jupiter, observée à St. Pétersbourg l'an 1816; par Mr. Schubert.
- О Помостровской минеральной водь; par Mr. Zakharoff.
- O животных b Американских b соотв b тетвующих b велблюдам b стараго св b та; par Mr. Sévastianoff.
- Vérification de la Latitude de l'Observatoire de l'Académie IMPÉ-RIALE des Sciences; par Mr. Wisnievski.
- Die Raffinerie des Kampfers, nach den neuesten Verbesserungen beschrieben von A. N. Scherer.
- Извъстіе о Американскихъ животныхъ находящихся нынъ въ Сарско-Сельскомъ звъринцъ; par Mr. Sévastianoff.
- Über den dreyfachen Anfang des Jahrs in Russland; par Mr. Krug.
- Опышы касашельно очищенія меду и діланія изі него сиропа; par Mr. Zagorski.
- Обь употребленін спаржи; рат le même.
- Способь вы очищению обывновеннаго меда, и сдыланию его безцвытнымы; рат le même.
- Способь дълать превосходныя сальныя свъчи; par le même.
- Extrait des Observations météorologiques faites à St. Pétersbourg, année MDCCCVIII, d'après le nouveau Stile; par Mr. Pétroff.
- Физическія примітація, діланныя учителемі 2-го класса при Лужскомі убіздномі училиції, Александромі Чадаевымі, сі 9-го Апріля по 1 є Іюня 1816.
- Supplementum ad dissertationem meam: Investigatio terminorum seriei ex datis productis terminorum contiguorum; par S.E. Mr. Fufs..
- Примъчанія и дополненія кb XII главь 2-го тома Алгебры Эйлера, касательно ръшенія уравненій третьей степени; par Mr. Paul Fus.

Obb удивительных в или чудесных дождяхь (Pluviae prodigiosae); par Mr. Moukhine.

Disquisitio de limitatis in compositione salium proportionibus; par Mr. Gadolin.

Способь красить природныя дерева; par Mr. Zagorski.

Приготовление дерева вы овращению; par le même.

Приготовление праспи; par le même.

Попрываніе дерева лакомії; par le même.

Über die zweite oder mittlere Bergreihe der Pambackischen Gebirgskette; par Mr. Schlegelmilch.

Vom Kartoffelmehl und dessen Benutzung zum Brodtbacken und Branntweinbrennen; par Mr. Kirchhoff.

De Epicurvoidibus; par Mr. Collins.

Вссобщая Исторія о звіриных і прыбных і промыслах і древлик і и повійших і ві морях і и ріках і обоих і материкові; сочиненіе С. Б. І. Носля. Томі і, перевелі Н. Озерецковскій.

T. .

OBSERVATIONS, EXPÉRIENCES ET NOTICES INTÉRESSANTES, FAITES ET COMMUNIQUÉES À L'ACADÉMIE.

tre présenté de sa part: Beobachtung der Wintersonnenwende des Jahrs 1814 in Konigsberg. Dans sa lettre au Secrétaire Mr. Bessel observe: qu'il lui a toujours paru inconcevable, comment tant d'Astronomes, avec des cercles si différens, ont pu trouver l'obliquité de l'Ecliptique en hyver notablement plus petite qu'en êtc. Ses observations des deux Solstices de l'année passée, communiquées l'une et l'autre à l'Académie, ne les font différer que de l'année passée, compuniquées l'une et l'autre à l'Académie, ne les font différer que de l'année passée, compuniquées l'une et l'autre à l'Académie, ne les font différer que de l'année passée, compuniquées l'une et l'autre à l'Académie, ne les font différer que de l'année passée, compuniques sont à distance égale de l'équateur. Mr. Bessel est por-

té à eroire que les différences notables que d'autres Astronomes avoient trouvées, doïvent être attribuées à l'influence de la chaleur du soleil sur les instrumens, contre laquelle on ne s'étoit pas prémuni avec assez de soin. Enfin, en comparant sa détermination de l'obliquité de l'Ecliptique avec celle qu'il a déduite des observations de Bradley de l'an 1755, Mr. Bessel a trouvé une diminution annuelle de 0".464.

- 2°) Mr. l'Académicien extraordinaire Schérer notifia à la Conférence: qu'au mois de Mars de l'année passée il est tombé des pierres météoriques à Sawataipola, près de Frederiksham, sur la surface glacée d'un lac; que des prejugés populaires ont empêché les païsans qui étoient spectateurs de ce phénomène, de les ramasser. Les pierres restèrent sur la glace et tombèrent au fond de l'eau lors du dégèl du printems. Mr. Schérer ajoute que dans le même mois de la même année il est tombé aux environs de Kharkoff un Aërolithe du poids de 50 livres, qui contient du chrome d'après l'Analyse de Mr. Giese, dont Mr. Schérer promet de donner des détails plus circonstanciés dans la suite.
- 3°) Mr. l'Académicien extraordinaire Schérer, présenta l'analyse faite par Mr. le Professeur Giese de la pierre météorique du poids de 50 livres, tombée de l'Atmosphère aux environs de Kharkoff au mois de Mars 1814. D'après son analyse cet Aërolithe contient:

Silice	-	~	0,44
Fer métallique	-	-	0,24
Nickel	-	-	0, 25
Magnésie -	-	-	0,18
Argille	***	~	0,03
Manganèse -	-	-	0,01
Oxide de Chrome		-	0,01.
avec un indice de	c n ii	fire	

- 4°) Mr. l'Académicien extraordinaire Scherer présenta un fragment de la pierre météorique, dite pièrre de Kharkoff, dont il a communiqué l'Analyse de Mr. Gicse. Il ajoute, pour rectifier sa première notice, que cet aërolithe n'est pas tombé à Kharkoff ni en Mars 1814, mais dans le cercle de Bakhmout du Gouvernement de Yekaterinoslav le 3 Fevrier 1814. Le fragment fait voir qu'il est d'un grain plus fin ou plus menu que les autres aërolithes connus, et d'une couleur moins foncée.
- 5°) Mr. l'Académicien extraordinaire Herrmann envoya une boëte remplie de pierres prétendues météoriques, tombées avec la grèle à Vilna le 29 Mai 1815, durant un orage. Dans un rapport, que Mr. Herrmann communiqua avec ces pierres, le Gentilhomme de la Chambre, Mr. Liachnitski, mande qu'il en est tombé une grande quantité du poids d'une once jusqu'à une livre, ajoutant qu'on en fait àprésent l'analyse chimique, dont il communiquera le résultat en son tems.
- 6°) Le Secrétaire lut une lettre adressée à l'Académie par le célèbre Elève de Joseph Haydn, Mr. Neukomm, Maître de Chapelle de S. A. Mr. le Prince Talleyrand. Occupé depuis longtems de l'idée de découvrir un moyen sur d'indiquer, de la manière la plus exacte, le mouvement que le Compositeur de Musique a voulu donner à ses ouvrages, Mr. Neukomm croit être parvenu à faire un Chronomètre musical propre à remplir toutes les conditions désirables dans un pareil instrument, et il en transmet un exemplaire à l'Académie, en la priant de vouloir bien seconder ses vuës désintéressées, en donnant à son Chronomètre musical la plus grande publicité possible. La Conférence chargea Mr. l'Académicien Schubert d'examiner le Chronomètre de Mr. Neukomm et de lui en dire son opinion.
- 7°) S. E. Mr. l'Académicien Ozeretskovski notifia d'avoir fait l'acquisition d'un gros bloc de pierre de Labrador, qui vient

d'être déterré en creusant un puits, près le cimetière de Volkova, à la profondeur de cinq toises. — Le bloc abonde en lames luisantes de conleur bleue, verte et rouge. Mr. Ozeretskovski promet de présenter à la Conférence, pour son Cabinet de Minéralogie, des échantillons de ce bloc de Labrador, dès qu'il aura été scié en morceaux.

- 8°) Le Secrétaire lut une communication du Directoire de la Compagnie Russe-Américaine, qui fait savoir à l'Académie: que le Lieutenant de la Flotte Lazareff, commandant le vaisseau de la Compagnie, le Souvoross, a découvert le 27 Septembre 1814 un grouppe de cinq petites îles, dont la plus méridionale se trouve à 13°, 13′, 15′ de latitude australe et à 163°, 31′, 4′ de longitude à l'Ouest de Greenwich. L'avis étoit accompagné d'un extrait du Journal du Lieutenant Lazareff, d'une Carte et d'une vue des îles.
- 9°) Mr. le Docteur Hamel, Correspondant de l'Académie, donne plusieurs notices technologiques et physiques, rassemblées pendant son dernier voyage en Ecosse. Parmi les dernières se trouve un aperçu intéressant des nouvelles découvertes faites par le Docteur Brewster à Edinbourgh, sur la polarisation de la lumière et sur la nouvelle loi qui regit cette polarisation, découverte par Mr. Brewster et prouvée par des expériences directes.
- 40°) S. E. Mgr. le Ministre fait savoir à la Conférence que le Chef de l'Etat Major de SA MAJESTE IMPÉRIALE Lui a envoyé, à la suite d'un ordre SUPREME, et pour être conservée au Musée de l'Académie, une pétrification qu'il appelle pain pétrifié, et qui a été trouvée à Tver, dans la rivière Tverza. En transmettant cet objet, pour être conservé au Cabinet, Mgr. le Ministre ordonne de charger de son examen un Académicien Minéralogiste, et de Lui communiquer son opinion.
- 11°) Mr. l'Académicien Schubert présente, de la part du Départament IMPERIAL de la Marine, trois morceaux de pierres

des roches de l'isle Youssari du golphe de Finlande, dans le voisinage de laquelle l'aiguille de la boussole perd sa direction fixe. Le Département de la Marine présume que le phénomène mentionné doit être attribué aux rochers de cette île, qui renferment peutêtre quelque chose de magnétique. Les pierres surent données à Mr. l'Académicien Severquine, pour être examinées.

- donne connoissance d'une nouvelle invention de Sir Humphry Davy, propre à prévenir les accidens qui arrivent si souvent dans les mines de charbon de terre, par l'inflammation et l'explosion du gaz hydrogène carbonné. C'est par l'usage d'une Lampe de son invention que ce célebre Physicien est parvenu à éclairer les ouvriers dans les mines de charbon, sans les exposer anx dangers de cette explosion. Mr. l'Assesseur de Collège Hamel envoye à l'Académie un exemplaire de cette lampe, avec sa déscription et l'histoire de son invention, en ajoutant qu'il s'est assuré lui-même, par ses propres expériences, instituées dans les mines de Holywell en Flintshire, de l'effet indubitable de cette lampe.
- 13°) Mr. l'Académicien Wisnievsky présenta un rapport corcernant la vérification de la Latitude de l'Observatoire de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences. Dans ce rapport Mr. Wisnievski donne la latitude de l'Observatoire de 59° , 56', 31'', ainsi de 8, 2 secondes plus grande, qu'elle n'avoit été trouvée en 1763 par feu Mr. Roumovski. Ce résultat est fondé sur 46 observations de l'étoile polaire, 32 de l'étoile α d'Andromède, 42 de α de la grande Ourse et 38 de α de l'aigle, en tout sur 158 observations, faites au moyen d'un cercle repétiteur de Troughton, avec toutes les précautions que la nature de ces observations et la qualité de l'instrument exigent.
- 14°) Mr. Pauker, Professeur de Mathématiques et d'Astronomie à Mitau, communique les observations qu'il a instituées dans

la vuë de déterminer plus exactement qu'on ne l'avoit fait jusqu'ici, la position géographique du phare de Domes-Näs sur la côte
de Courlande, qu'il a trouvée: la latitude = 57°, 46′, 6″,2 et la
longitude = 20°, 14′, 28″,50 à l'Est de Paris.

15°) Mr. le Conseiller de Cour et Chevalier de Korsakoff, avantageusement connu par divers instrumens géodétiques qu'il a perfectionnés, présente à la Conférence, un étui contenant six tirelignes de verre de son invention, chacun d'un calibre différent, et qui réunissent à l'avantage de coûter peu de Copeks, celui de pouvoir être employés a dessiner au Pantographe. Comme ce sont les premiers essais de l'inventeur, il pense que ces tirelignes pourront encore être perfectionnés et devenir un instrument très utile aux dessinateurs de plans et de cartes.

VI.

RAPPORTS PRÉSENTÉS PAR DES ACADÉMICIENS CHARGÉS DE COMMISSIONS PARTICULIÈRES.

- 1°) Mr. l'Académicien Séverguine, chargé d'examiner le mémoire de Mr. le Baron d'Eschwègue intitulé: Kurzer Auszug meiner Bemerkungen über Brasilien, und besonders der Kapitanie Minas Geraes, en sit son rapport, contenant en substance: que ce mémoire mérite d'être traduit en Russe et inséré dans le Journal académique, parcequ'il renferme des notices très intéressantes sur le Bresil.
- 2°) Mr. l'Académicien Sévastianoff, chargé d'examiner le mémoire de Mr. le Docteur Eschholtz, ayant pour titre: Decades tres Eccutheratorum nevorum, en sit son rapport contenant en substance: que l'auteur de ce mémoire convaincu de la nécessite indispensable de saire des sous-divisions dans les genres qui sont composés de beaucoup d'espèces, a établi cinq nouveaux genres: 1°. Sectodes; 2°. Mimetes; 3°. Stenodora; 4°. Anthypna; 5°. Anticheira. Mr. Sevastianoff dit que les raisons qui ont porte l'au-

teur à proposer ces changemens, lui paroissent bien fondées, et qu'ayant comparé ses déscriptions avec celles de Fabriziur, et avec les déscriptions et dessins d'Olivier et de Yablonski, ces genres lui semblent effectivement nouveaux, et qu'on ne sauroit réfuser à l'application assidue et aux déscriptions bien faites de Mr. Eschholtz les éloges qui leur sont dus.

- 3°) Mr. l'Académicien Fuss ayant été chargé d'examiner un ouvrage présenté à l'Académie par Mr. de Mairoff, Colonnel des Ingénieurs de la Suite de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE, sous le titre: Геометрія еб пространствахо, или приложене алгебрантеского Анализа ко натертательной Геометыи, il fit à la Conférence l'exposé suivant du contenu de cet ouvrage: L'Auteur, après avoir fait voir comment on détermine la position du point, de la ligne et du plan dans l'espace, passe à la recherche des équations qui résultent de la permutation des coordonnées. Ensuite, ayant traité des surfaces et lignes courbes du second degré, il démontre les propriétés de ces lignes. De là, après avoir traité des surfaces courbes en général et de la position des plans qui les touchent, il passe à la discussion des surfaces dites obliques, engendrées par le mouvement quelconque de la ligne droite, il en cherche les équations et fait voir comment on mene les plans, qui touchent ees surfaces, en appliquant ceei à l'art d'enfiler et eux regles qui en résultent pour l'Architecture navale. Cette courte Analyse de l'ouvrage de Mr. le Colonnel de Mairoff, fait voir que les objets qui y sont traités, sans être absolument neuss, ni présentés d'une manière nouvelle, ne se trouvent ainsi réunis dans aucun corps d'ouvrage publié jusqu'iei en langue Russe, et que sous ce point de vuë, les recherches de Mr. de Mairoff sont recommendables et son travail méritoire.
- 4°) Mr. l'Académicien Schubert, chargé d'examiner le Chronomètre musical de Mr. Neukomm, qui à été présenté à la Conférence, rapporta que cet instrument, dont Mr. Schubert donne une

description très claire, ainsi que de la manière de s'en servir, réunit, comme le Chronomètre musical de Mr. Burja, auquel il ressemble, plusieurs avantages, savoir: 1°. d'indiquer véritablement et avec précision, la juste mésure du tems, dans laquelle le Compositeur veut qu'une piece de musique de sa composition soit exécutée; 2°. de n'être pas sujet à s'arrêter ni à se déranger; 3°) d'être si simple que chacun peut se le procurer à peu de fraix, et qui plus est, le faire sans difficulté lui-même. Comme l'inventeur désintéresse, en présentant son invention à l'Académie, n'a eu d'autre désir que de la voir répandue autant que possible parmi les gens de l'art qui sont dans le cas d'en avoir besoin, la Conférence résolut d'en faire insérer la déscription de Mr. l'Académicien Schubert, dans les gazettes que l'Académie publie.

- rapport concernant cinquante-six especes de pierres calcaires qu'il avoit été chargé d'examiner, conjointement avec Mr. l'Académicien Séverguine, à la suite de la prière adressée a l'Académicien par Mr. le Général Major Barclay de Tolly. Quelques examens pré-liminaires avoient prouvé que toutes ces pierres consistent en chaux carbonatée, en terre silicieuse, en terre argilleuse et en oxide de fer. Par une analyse plus soigneuse Mr. Scherer a determiné les parties constituantes de chacune, et une liste annexée à son rapport fait voir combien chaque numero contient, sur cinquante parties, de chaux, d'acide carbonique, de silice, d'argille et d'oxyde de fer. Mr. l'Académicien Séverguine présenta et lut aussi son rapport, concernant les mêmes pierres à chaux, et ces deux rapports furent transmis à Mr. le Général-Major Barclay de Tolly.
- 6°) Mr. l'Académicien Séverguine présenta et lut son rapport sur les pierres prétendues météoriques, envoyées de Vilna. Ayant examiné et comparé les huit échanullons, présentés à l'Academie par Mr. l'Academicien extraordinaire Herrmann, avec les pierres véritablement metéoriques de la collection academique, eu

égard tant aux caractères extérieur et intérieur qu'à la pésanteur spécifique, Mr. Severguine a trouvé que ces pierres, loin d'être météoriques, sont très communes, pour la plûpart calcaires, et il présume qu'elles ont été jettées, par un ouragan, dans le Fauxbourg de Vilna, des hauteurs qui l'environnent.

- 7°) Mr. l'Académicien Krug, chargé de lire un mémoire de Mr. le Conseiller de Collèges et Chévalier Steven: Sur la population du Caucase et sur l'origine des Géorgiens, en fit son rapport contenant en substance: que l'auteur veut prouver que les Géorgiens ne sont pas aborigines du Caucase, mais qu'ils sont venus de l'Europe. Il tache d'établir cette opinion sur deux raisons, dont l'une est prise de la nature du païs qu'ils habitent, et l'autre de leur langue, mais l'une et l'autre démonstration de leur origine. Européenne ne satisfait pas entièrement, par des raisons que Mr. Krug développe dans son rapport. Il trouve que la question intéressante sur l'origine des Géorgiens n'est pas résolue par le mémoire de Mr. Steven; mais il ajoute qu'il seroit à désirer que ce Savant rempli de connoissances, voulut communiquer à l'Académie beaucoup de notices et observations neuves sur l'état actuel du Caucase et de ses habitans, sur lesquels sa position lui donne toutes les facilités d'obtenir des renseignemens intéressans.
- 8°) Mr. l'Académicien Schérer, chargé par la Conférence d'examiner un échantillon de l'alun fabriqué par Mr. Prètre à Moscou, et transmis à l'Académie par le Département des Manusactures et du Commerce intérieur, en présenta son rapport. La substance en a est: 1°. que cet alun, quant à son extérieur, est parsaitement transparent, et consiste en cristaux octaëdres tels qu'ils sont propres à cette substance; 2°. qu'il se dissout, comme cela doit ètre, dans dixhuit parties d'eau, à une température moyenne, sans montrer d'autre residu qu'une très petite quantité de terre argilleuse ne surpassant pas $\frac{1}{240}$ me de la portion soumise à l'examen; 3°. que ni

la teinture de la noix de galle, ni la solution d'amoniac, n'y produisent le moindre changement de couleur, et que lui ayant trouvé ainsi les signes, qui sont ceux de tout bon alun, de quelque pais et de quelque fabrique qu'il vienne, il n'hésite pas à déclarer que l'alun, qu'on lui a donné à examiner, est d'une bonne qualité, et propre aux usages techniques.

- 9°) Mr. l'Adjoint Collins, chargé d'examiner le mémoire de Mr. le Conseiller de Cour et Professeur Kausler, présenté à l'Académie sous le titre: Nova linearum parallelarum theoria. en fit son rapport contenant en substance: que Mr. Kausler n'a pas été plus heureux que tant d'autres habiles Géomètres-Logiciens qui, s'efforçant d'élever le fameux onzième axiome d'Euclide au rang des theorèmes solidement demontrés, n'ont pu, avec toute leur pénétration, éviter dans le raisonnement un cercle plus ou moins subtilement càché. Selon Mr. Collins, l'auteur de ce mémoire, en se servant du principe de la superposition, démontre rigoureusement huit théorèmes fondés sur la coincidence des secteurs qui dans des cercles égaux répondent à des angles au centre égaux. Mais dans le théorème neuvième il y a une pétition de principe qui rend sa démonstration vicieuse; et avec ce théorème, sur lequel se fondent presque tous les suivans, s'écroule tout l'édifice de cette nouvelle théorie des lignes paralleles.
- 10°) Mr. l'Académicien Séverguine présente son rapport sur la pétrification trouvée à Tver, dans la rivière Tverza. D'après ce rapport c'est une masse de pierre à fusil qui, frappé avec, l'acier, donne des étincelles, et qui renferme les pétrifications de plusieurs crustacés qui n'existent plus ou n'existent que dans des mers éloignées. Cet artholithe, dont on a trouvé de semblables en plusieurs pais, prouve selon Mr. Séverguine, que l'endroit, où il a été trouve, a été autrefois fond de la mer; sa forme extérience est duë au hazard et aux essets des torrens d'eau. Il a été pla-

cé au Cabinet des minéraux indigènes, où se trouve déjà une pièce semblable, qui date du tems de Pierre le Grand (1718).

- 11°) Mr. l'Académicien Séverguine présenta et lut son rapport sur trois fragmens des roches de l'île Youssari, envoyés par le Département IMPERIAL de l'Amirauté. L'examen institué par Mr. Séverguine semble confirmer l'opinion du Département: que le phénomene observé sur l'aiguille de la boussole, dans le voisinage de cette île, provient de la nature de ses rochers. Car une partie de l'échantillon N°. 1, reduite en poudre, a été attirée par un aiman artificiel, et consiste en Trapp mélé de beaucoup de fer. Le second échantillon est aussi du Trapp, mais plus mélé de Quarz et de Mica. Le 3^{me} ressemble au 2^d., avec la différence qu'il est plus grenu et plus ferme, et qu'il donne des étincelles avec l'acier.
- 12°) Mr. l'Académicien Pétroff présenta et lut son rapport concernant les paratonnères des magazins a poudre à Okhta, qu'il a examineés à la suite d'une demande du Département de l'Artillerie du Ministère de la guerre. La substance en est: que ces paratonnères sont en parfaitement bon état dans toutes leurs parties visibles. Il a observé cependant que le puits, où va aboutir le conducteur du petit magazin à poudre, dit Magazin du Laboratoire, ne tient pas l'eau qu'on y verse. C'est pourquoi il propose quelques changemens à faire à ce puits.
- 13°) Mr. l'Académicien Zakharoff chargé d'examiner un mémoire de Mr. le Conseiller de Collèges Grindel, remit son opinion contenant en substance: que les essais faits par Mr. Grinqel, pour tirer de la liqueur sucrée de l'amidon, obtenue par la méthode de Mr. l'Académicien extraordinaire Kirchhoff, un esprit de vin semblable au Rum, sont dignes d'eloges: mais que d'autres Chymistes, et nommément Hermbstädt et Lampadius, s'en sont déja occupes; que de plus cela se pratique ici à St. Pétersbourg depuis as-

sez longtems dans quelques Apothicaireries, lesquelles en mettant en pratique ce même procédé, préparent pour leur usage cet esprit qui, quoiqu'il soit d'un assez bon goût, diffère pourtant sensiblement du Rum, sans que pour cela on puisse nier la possibilité de tirer de l'amidon un esprit qui lui ressemble, surtout apres que le tems l'a amélioré.

- 14°) Mr. l'Académicien Sévastianoff présenta un rapport contenant en substance : qu'il s'est -rendu, a Saiskoye - Selo, et qu'il y a examiné et fait dessiner les animaux apportés de Lima par le vaisseau le Souvoroff, savoir trois paires de Lamas, dont deux femelles sont pleines de 5 mois, un Apako, une Vigogne, un bàtard femmelle, issu d'un Guanako et d'une Vigogne, et enfin deux Tortuës. Un des trois La nas males, de conleur blanche, avec des tàches noires à la tête, le plus grand de tous et le plus sauvage, ressemble au Camelus Huanaeus de Schreber, avec la seule disterence que son col est encore plus tortueux et que son dos est plus vouté. Aussi-a-t-il de grandes défenses de couleur jaunaire, semblables a celles du porc. Aucun de ces animaux n'a les épérons que Buffon leur attribue. Quant aux tortues, Mr. Sévastianoff les a trouvées dans un état d'engourdissement, causé per le froid, leurs yeux etoient fermés et les pattes, ainsi que la tête, retirées sous l'écaille. Les ayant fait transporter dans un appartement chausse et approcher du seu, elles ont montré les pattes et la tête.
- 15°) Mrs. les Académiciens Storch et Sévastiano ff ayant été chargés, a la suite d'un ordre de Mgr. le Ministre en fonction, d'examiner un manuscrit intitule: Καρπαμα κακμέμμικο περεπεμοδ κοπ πιππιτεςκοῦ επεπελε Επροπεί, et de dire leurs avis, le premier sur le mérite de l'original (Tableau des revolutions du système politique de l'Europe depuis la fin du 15^{me} siècle, par Mr. Aucillon), le second sur le mérite de la traduction du premier volume de cet ouvrage, faite par Mr. Rogo ff, ils remirent leurs opinions. La substance en est: 1°, que l'original français mérite d'erre tradait en entier, etant

généralement réconnu pour un des meilleurs ouvrages sur l'histoire moderne et ayant remporté les suffrages des connoisseurs tant en France qu'en Allemagne; 2°, que la traduction du 1° Tome de cet ouvrage, faite par Mr. Rogoff, quoi qu'assez bonne, renserme des tournures et des expressions qui ne sont pas propres à la langue Russe, et qu'elle s'éloigne par - ci par - la du sens de l'original, mais que ces impersections pourront aisément être corrigées par le traducteur qui est doué de talens et de connoissances.

46°) Mr. l'Académicien Krug présenta son rapport sur un ouvrage manuscrit de Mr. Orloff: Исторія царствовянія Романовых дили торжествующей России, св предварительным изображениемо прежняго ея состояния како вившияго тако и внутренняго, согиненная Профессоромо Яковомо Ормовымо. Yuems I. II. III. sur lequel Mgr. le Ministre en fonction avoit demandé l'opinion de la Conférence. La substance en est: que l'auteur a ramassé un grand nombre de matériaux, bons et manvais, comme le hazard les lui a fournis; que beaucoup d'objets très importans sont ou traités très-brièvement ou entièrement omis, tandis que d'autres, bien moins intéressans, le sont avec une grande prolixité; que l'auteur n'est pas impartial et que son ouvrage contient des malentendus qu'il auroit pu éviter. Non obstant ces défauts Mr. Krug pense que l'ouvrage de Mr. Orloff, s'il étoit imprimé sans l'introduction, trouveroit encore assez de lecteurs, surtout parmi la classe à la quelle les livres, où l'auteur a puisé, sont inaccessibles. Quant à l'introduction, qui contient un apperçu de l'état intérieur de la Russie depuis Ruric jusqu'à l'avenement au Throne du Tsar Michailo Fedorovitch, Mr. Krug croit qu'elle ne sauroit être imprimée telle qu'elle est, parcequ'elle fourmille d'erreurs historiques, de fausses citations et d'anachronismes grossiers, ce qu'il prouve par un grand nombre d'exemples, qu'il auroit pu augmenter encore considérablement, s'il eut voulu grossir son rapport.

VII.

VOYAGE SCIENTIFIQUE EXECUTÉ PAR ORDRE DE L'ACADÉMIE.

Mr. l'Académicien extraordinaire Wisnievski fit en 1815 sa dernière excursion et acheva ainsi son voyage astronomique qui a dure huit ans, et dont le résultat sera la determination plus exacte de la position géographique de près de quatre - cens points de la Russie Européenne, voyage entrepris dans la vue de perfectionner la Géographie de l'Empire. Le Dépot IMPERIAL des cartes en a deja profité, pour donner plus de correction à ses travaux, et il en profitera mieux encore, lorsque tous les calculs des observations innombrables que Mr. Wisnievski a instituees, seront achevés.

VIII.

OUVRAGES PUBLIÉS PAR L'ACADEMIE.

- 1°) Mémoires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences de St. Pétersbourg. Tome V, avec l'Histoire de l'Académie pour l'an 1812. St. Pétersbourg 1815. 4°.
- 2°) Умозрительныя Изсладованія Императорской Санктиетербургской Академіи Наука. Тома IV. С. П. бурга 1810. 4°.
- 3°) Технологич свін Журналь. Томь XII. Часть І. II. III. IV. сь фигурами. С. II. бургы 1815. 8°.
- 4°) Untersuchungen zur Erläuterung der ältern Geschichte Rufslands, von A. C. Lehrberg. Herausgegeben von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften durch Ph. Krug. St. Petersburg 1816. 4°.
- 6°) Novi Commentarii Academiae Scientiarum IMPERIALIS Petropolitanae. Tom. XV. pro anno MDCCLXX. 4°. Editio secunda.
- 6°) Продолженіе Технологическаго Журнала состоящее изб Ученых в Извістій и пр. Тома І-то Часть І. П. ПІ. IV. С. П. бургіз 18.6. 8°.

7°) Новая Система Минераловь, основанная на наружных в отличительных в признаках в; сочиненная Василимы Севергинымь. С. П. бургв 1816. 12°.

IX.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR L'ACADÉMIE.

L'Académic avoit proposé dans son dernier programme une question astronomique, concernant la quantité précise des diamètres du soleil et de la lune, pour laquelle le terme de concours avoit été fixé au 1 Janvier 1814, et une question historique, relative à la chronologie comparée et vérifiée des Auteurs Byzantins, qui avoit eu pour terme de concours le 1 Janvier 1815. N'ayant reçu aucune réponse à ces questions, quoique l'une et l'autre eut été proposée pour la seconde fois, l'Académie a résolu de proposer deux autres questions cette année, et parmi les sujets qui ont été soumis à son choix, les problemes suivans ont obtenu la preference.

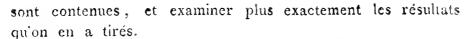
I. Question de Chimie.

On ne sauroit nier que, non obstant les recherches multipliées, instituées sur le mélange des alkalis et des terres, si nous en exceptons la potasse et la soude, les autres nous laissent encore beaucoup à désirer, pour arriver à une connoissance complète des espèces de métalloides réellement existantes.

L'Académie, convaincue de l'importance de ce sujet, d'où dépendent les progrès ultérieurs des sciences physiques, propose un prix qui sera adjugé au Physicien qui lui aura communiqué la série la plus satisfaisante d'expériences propres, instituées sur les mélanges des alkalis et des terres qui jusqu'ici n'ont point encore été complètement examinées.

L'Academie désire de diriger l'attention des Physiciens prin- cipalement sur les points suivans:

1°) Faire la révision de toutes les expériences instituées sur le kali et le natron, et sur les bases métalliformes qui y



- 2°) Soumettre l'ammoniaque à un examen particulier et plus soigneux, afin de prouver d'une manière decisive laquelle des opinions émises sur son mélange est la mieux fondée, et si le prétendu métalloide qu'il contient peut être représenté isolément.
- 3°) Examiner, d'une manière plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici, les substances métalliformes des différentes terres; voir si elles peuvent être produites dans leur état pur et isolé; connoître leurs propriétés, tant dans cet état, que dans la combinaison avec d'autres substances, et indiquer les rapports différens et déterminés dans lesquels elles peuvent être présentées.

Outre le prix, qui sera décerné à l'auteur du mémoire le plus satisfaisant, l'Académie lui promet un nombre de cent exemplaires du mémoire couronné en dédommagement des fraix que pourront occasionner les expériences a faire sur les terres rares.

II. Question d'Economie politique et de Statistique,

Donner un precis complet et raisonné du système d'imposition etabli en Russie sous le règne du Tsar Alexis.

L'Académie, en proposant cette question, a en vue de préparer la comparaison de l'et it actuel des finances de l'Empire avec celui qui a précedé le regne reformateur de Pierre le Grand. Pour parvenir a ce but, elle desire que la question soit envisagée sous tous les points de vue qui peuvent fournir des rapprochemens entre ces deux époques. Elle s'attend d'abord à voir déterminée la valeur des especes, qui avoient cours du tems du Tsar Alexis et dans lesquelles se payaient les impôts. Dans cette determination il ne s'agira pas seulement de la valeur numérique des monnaies, ou de la quantité du metal fin qu'elles contenaient, mais encore de

leur valeur réelle, ou de la quantitité de blé et de choses de première nécessité qu'elles pouvaient alors acheter. L'influence des changemens apportés au système monétaire, pendant la durée de ce règne, est encore un objet d'une grande importance et qui mérite une attention particulière. Ce n'est qu'après avoir déterminé préalablement la valeur du numéraire, qu'on pourra passer à l'objet principal de la question, savoir à l'analyse des impôts établis à cette époque. Pour mettre de l'ordre dans cette recherche, il sera convenable de classer les impôts suivant leur nature: impôts directs et impôts indirects; impôts perçus en argent et impôts prélevés en denrées. On examinera en détail ces différentes branches, la manière de les percevoir, les autorités chargées de les recueillir, les lois fiscales relatives à leur perception, la forme de la régie et des fermes, les fraix de perception, enfin le produit total de chaque espèce d'impôts, et son produit net, c'est-à-dire son produit déduction faite des fraix de perception. Si les données qu'on pourra rassembler sur ces objets, étoient assez completes pour en tirer un résultat général, il seroit à désirer qu'il fut présenté dans une évaluation du montant total des revenus de l'État.

L'Académie croit inutile d'ajouter qu'une pareille exposition historique et statistique ne mérite de confiance qu'autant qu'elle est appuyée sur des preuves et des authorités, et qu'en conséquence elle s'attend à les voir citées dans les ecrits qui lui seront présentés sur cette question.

Le prix est de cent ducats d'Hollande pour la meilleure répouse à chacune de ces deux questions, et le terme de rigueur, après l'expiration duquel aueun memoire ne sera plus admis au concours, est le 1 Janvier 1818.

L'Académie invite les Savans de toutes les nations, sans en exclure ses membres honoraires et ses Correspondans, à concourir pour ces prix. Les Académiciens seuls, appelles à faire la fonction de juges, sont exclus du concours.

Les auteurs n'écriront point leurs noms sur leurs ouvrages, mais seulement une sentence ou dévise, et ils ajouteront à leurs mémoires un billet cacheté, qui portera au dehors la même dévise et au dedans le nom, la qualité et la demeure de l'Auteur. On n'ouvrira que le billet de la pièce couronnée; les autres seront brûlés, sans avoir été décachetés.

Les mémoires doivent être écrits d'un caractère lisible, soit en russe, en français, en allemand ou en latin, et ils seront adressés au Secrétaire perpétuel de l'Académie, qui délivrera à la personne qui lui aura été indiquée par l'auteur anonyme, un récipissé marqué de la dévise et du numéro dont il aura cotté la pièce.

Le mémoire couronné est une propriété de l'Académie et l'auteur ne sauroit le faire imprimer nulle-part sans sa permission formelle. Les autres pièces de concours peuvent être redemandées au Secrétaire, qui les remettra, içi à St. Pétersbourg, à la personne qui se présentera chez lui avec une procuration de l'auteur.



I. SECTION

DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.



PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

RÉSOLU

PAR L'ANALYSE DE DIOPHANTE.

PAR

M. L. E U L E R.

Présenté à la Conférence le 4 Mars 1782.

§. 1.

Le sujet du problème dont il s'agit dans ce mémoire, est tiré de la Trigonométrie rationnelle. On demande les trois côtés x, y, z, d'un triangle dont les lignes tirées des angles par le centre de gravité du triangle soyent toutes trois exprimées en nombres rationnels; c'est - à - dire: on demande trois nombres x, y, z, tels que

J'ai déjà donné, à différentes reprises, des solutions de ce problème, sans qu'aucune m'ait entièrement satisfait. Celle que je présente ici réunit, à beaucoup d'élégance, la plus grande généralité. Mais avant d'entrer en matière il sera bon de faciliter la solution par le Lemme suivant:

LEMME.

§. 2. Deux nombres de la forme:

$$A^2 + 2PAB + B^2$$
 et $A^2 + 2QAB + B^2$,

seront toujours quarrés, lorsque

$$A = 4 (P + Q)$$
 et $B = (P - Q)^2 - 4$.

Démonstration.

Multiplions l'une de ces formes par l'autre, et nous aurons le produit suivant:

 $A^4 + 2(P + Q)A^3B + 2(2PQ + 1)A^2B^2 + 2(P + Q)AB^3 + B^4$. Soit la raeîne de cette quantité quarrée

$$A^2 + (P + Q)AB - B^2$$

et puisque le quarré est

 $A^4+2(P+Q)A^5B+[P+Q)^2-2]A^2B^2-2(P+Q)AB^3+B^4$, en comparant cette forme avec la précédente on voit que, pour que l'une soit égale à l'autre, il faut que

$$((P - Q)^2 - 4) A = 4 (P + Q) B,$$

donc $A = 4 (P + Q)$ et $B = (P - Q)^2 - 4.$

Substituant ces valeurs dans l'une ou l'autre des deux formes du lemme, elle devient un quarré. Par exemple la premiere, en y fuisant ces substitutions, deviendra:

$$\frac{16 (P + Q)^{2} + 2 P [4 (P + Q) (P - Q)^{2} - 16 (P + Q)]}{+ (P - Q)^{4} - 8 (P - Q)^{2} + 16},$$

où il faut remarquer que

$$(P - Q)^4 + 8P(P + Q)(P - Q)^2 = (P - Q)^2(3P + Q)^2,$$

$$16(P+Q)^2 + 32P(P+Q) - 8(P-Q) = -8(P-Q)(3P+Q).$$

De cette façon la forme se reduit à

$$((P-Q)(3P+Q)-4)^2$$
.

Or le produit des deux formes du lemme étant un quarré et la premiere l'étant aussi, il est clair que l'autre forme doit être nécessairement de même un quarré. Aussi la racine se trouvera - t'elle, par des procédés semblables, être (Q - P)(3Q + P) - 4.

Corollaire,

§. 3. À l'égard des valeurs de A et B il faut remarquer: 1°) qu'à cause de la permutabilité évidente de ces deux quantités, on pourra aussi faire:

$$A = (P - Q)^2 - 4$$
 ct $B = 4 (P + Q)$:

2°) que ces valeurs peuvent être simplifiés dans certains cas. Car puisque $(P-Q)^2 = (P+Q)^2 - 4PQ$, en mettant cette valeur dans l'expression de B, on aura $B = (P+Q)^2 - 4(PQ+4)$, de sorte que, toutes les fois que PQ+1 = n(P+Q), on pourra diviser A et B par le même nombre P+Q, et on aura A=4 et B=P+Q-4n. Quant aux racines des deux formes proposées, savoir

(P - Q)(3P + Q) - 4 et (Q - P)(3Q + P) - 4, comme la première peut être représentée par

$$(P + Q)(P - Q) + 2P(P - Q) - 4$$

et que 2P(P-Q) - 4 = 2P(P+Q) - 4(PQ+1), à cause de PQ+1 = n(P+Q) on pourra diviser par P+Q, de sorte que la racine de la premiere forme = 3P-Q-4n, et, à cause de la permutabilité de P et Q la racine de l'autre forme sera 3Q-P-4n.

Solution du Problème proposé.

§. 4. Soit
$$2xx + 2yy - zz \equiv pp$$

 $2xx + 2zz - yy \equiv qq$
 $2yy + 2zz - xx \equiv rr$

et en mettant $xx + yy + zz \equiv s$, on aura $pp + 3zz \equiv qq + 3yy \equiv rr + 3xx \equiv 2s.$ Ensuite on trouye aussi que

$$2pp + 2qq - rr = 9xx$$

 $2pp + 2rr - qq = 9yy$
 $2qq + 2rr - pp = 9zz$.

Quoique ces propriétés ne contribuent en aucune manière à la sosution du Problème, elles méritoient bien d'être remarquées ici en passant. Quant à la solution même, elle se déduit des opérations suivantes:

§. 5. Prenons la différence de la premiere et seconde de nos trois équations fondamentales, qui sera

$$pp - qq \equiv 3 (yy - zz),$$

ou bien, en facteurs on aura

$$(p + q) (p - q) = 3 (y + z) (y - z)$$

Soit $p + q = \frac{3a}{b} (y - z)$
 $p - q = \frac{b}{a} (y + z)$

et la somme des quarrés sera

$$(p+q)^2 + (p-q)^2 = 2pp + 2qq = \frac{9aa}{bb}(y-z)^2 + \frac{bb}{aa}(y+z)^2$$
.
Or les équations fondamentales donnent

$$2pp + 2qq = 8xx + 2yy + 2zz$$
, ou bien $2pp + 2qq = 8xx + (y + z)^2 + (y - z)^2$,

d'où l'on tire cette équation entre x, y, z:

$$\frac{9aa}{bb}(y-z) + \frac{bb}{aa}(y+z) = 8xx + (y+z)^2 + (y-z)^2,$$
 qui peut aussi être représentée ainsi:

$$8xx = \frac{9aa - bb}{bb}(y - z)^{2} + \frac{bb - aa}{aa}(y + z)^{2}.$$

§. 6. La troisième équation fondamentale 2yy+2zz-xx = rr, se transforme aisément en celle - ci :

$$(y+z)^2 + (y-z)^2 - xx = rr,$$

qui multipliée par 8 devient

$$8rr = 8(y+z)^2 + 8(y-z)^2 - 8xx$$

équation qui, si l'on met à la place de 8xx la valeur trouvée au précédent \S , sera

$$8rr = \frac{9(bb - aa)}{bb}(y - z)^2 + \frac{9aa - bb}{aa}(y + z)^2.$$

§. 7. Mettons maintenant

$$y + z \equiv a (c + d);$$

$$y - z \equiv b (c - d);$$

et les deux expressions trouvés pour 8xx et 8rr prendront les formes suivantes:

$$2xx = 2aa(cc + dd) + cd(bb - 5aa);$$

 $2rr = 2bb(cc + dd) + cd(9aa - 5bb);$

qui, divisées l'une par 2 aa et l'autre par 2 bb, donneront:

$$\frac{xx}{aa} = cc + dd + \frac{bb - 5aa}{2aa} \cdot cd;$$

$$\frac{rr}{bb} = cc + dd + \frac{9aa - 5bb}{2bb} \cdot cd.$$

§. 8. En comparant ces deux expressions avec les formes du lemme, nous verrons que A = c, B = d,

$$P = \frac{bb - 5aa}{4aa} \text{ et } Q = \frac{9aa - 5bb}{4bb}.$$

De ces valeurs on déduit aisément:

valeurs on deduit assement:

$$n (P + Q) = \frac{n(b + -10aabb + 9a^4)}{4aabb};$$

 $P Q + 1 = -\frac{5}{4} \frac{(b + -10aabb + 9a^4)}{4aabb};$
donc $n = -\frac{5}{4}.$

§. 9. Or en vertu du corollaire §. 3. il y a A = 4 et B = P + Q - 4n, donc c = 4 et $d = \frac{(aaa + bb)(aa + bb)}{4aabb}$, portant

$$y + z = \frac{a(16aabb + (9aa + bb)(aa + bb))}{4aabb};$$

$$y - z = \frac{b(16aabb - (9aa + bb)(aa + bb))}{4aabb};$$

Et puisque, en vertu du même corollaire,

$$\frac{x}{a} = 3P - Q - 4n$$
 et $\frac{r}{b} = 3Q - P - 4n$,

nous aurons aussi

$$x = \frac{a((9aa + bb)(aa + bb) - 2(9a4 - b4))}{+aabb};$$

$$r = \frac{b[(0aa + bb)(aa + bb) + 2(9a4 - b4)]}{+aabb}.$$

Enfin on aura

$$p + q = \frac{3a}{b} (y - z);$$

$$p - q = \frac{b}{a} (y + z).$$

§. 10. Mettons pour abrèger

$$C = 16 \ a \ a \ b \ b;$$

$$D = (9 \ a \ a + b \ b) (a \ a + b \ b);$$

$$F = 2 (9 \ a^4 - b^4);$$

et en supprimant le diviseur commun 4 a a b b, nous aurons

$$x = a (D - F)$$
 $r = b (D + F)$
 $y + z = a (C + D)$ $p + q = 3a (C - D)$
 $y - z = b (C - D)$ $p - q = b (C + D)$

Exemple 1.

§. 11. Soit a = 1 et b = 2, et on aura C = 64, D = 65, F = -14, donc

$$x = 79$$

 $y + z = 129$
 $y - z = -2$
 $p + q = -3$
 $p - q = 258$

par consequent on aura

$$x = 79$$
 $p = \frac{255}{2}$ $q = \frac{127}{2}$ $z = \frac{131}{2}$ $r = 102.$

Exemple 2.

§. 12. Soit a = 2 et b = 1, de sorte que C = 64, D = 185 et F = 286, donc

$$x = -202$$

 $y + z = +498$
 $y - z = -121$
 $p + q = -726$
 $p - q = +249$

On aura done

$$x = 202$$
 $p = \frac{477}{2}$ $y = \frac{377}{2}$ $q = \frac{975}{2}$ $z = \frac{619}{2}$ $r = 471$.

§. 13. Si l'on veut avoir des solutions en nombres entiers, il est évident qu'on n'a qu'à multiplier par 2 tous les six nombres de chacun des deux exemples précédens. En voila encore quelques solutions:

68	87	8 5
158	1 2 7	131
159	3 2 5	314
619	377	404
477	277	446
5 69	881	640.

DE CASIBUS QUIBUS FORMULAM

 $x^4 + mxxyy + y^4$

A D

QUADRATUM REDUCERE LICET.

AUCTORE

L. E U L E R O.

Conventui exhibuit die 2 Maji 1782.

- §. 1. Hujus formulae jam dudum Analystis casus innotuere nonnulli, quibus eam nullo modo ad quadratum revocare licet, paucissimis casibus exceptis, quibus una vel altera litterarum x et y evanescit, vel ambae sunt inter se aequales. Priore enim casu formula proposita semper esset quadratum, quiequid fuerit m; altero casu vero, quia, posito x = y = 1, formula fit m + 2, casus idonei forent m = ii 2, ex quibus autem casibus plerumque alios eruere non licet. Hic igitur ejusmodi valores pro m investigare constitui integri, sive positivi sive negativi, pro quibus innumerabiles litterarum x et y valores exhiberi queant, siquidem methodus constat ex quovis casu cognito alios eruendi. Casus autem, quibus jam demonstratum est hoc neutiquam fieri posse, sunt potissimum $m = \pm 1$ et $m = \pm 6$, quibus addere licet m = 7 et $m = \pm 14$. Ceterum sponte patet, si fuerit $m = \pm 2$, formulam semper esse quadratum, quicunque valores litteris x et y tribuantur.
- §. 2. Quod si jam ponamus $x^4 + mx^2y^2 + y^4 \equiv zz$, erit $m = \frac{zz x^4 y^4}{xxyy}$, quae formula utique omnes valores idoneos pro m in se complectitur. Verum quia mihi propositum est in ejus

tantum valores integros inquirere, hanc expressionem a fractionibus liberari oportet, quod fit ponendo $z \equiv axxyy - (xx + yy)$; tum enim fit $m \equiv a^2xxyy - 2a(xx + yy) + 2$, quae expressio ad hanc formam reducitur: $m \equiv (axx + 2)(ayy - 2) + 2$, unde fit $m + 2 \equiv (axx + 2)(ayy - 2)$, quae formula jam innumerabiles valores integros pro m praebet, siquidem pro a, x, y numeri quicunque integri accipiantur.

- §. 3. At vero etiam numeri integri hinc prodire possunt, etiamsi litterae a valores fracti tribuantur, quos igitur potissimum hie investigare convenit. Patet autem hoc infinitis modis evenire posse, quando x et y fuerint numeri compositi. Hunc in finem statuamus $x \equiv pq$ et $y \equiv rs$; tum vero ponatur $a \equiv \frac{b}{p\,p\,r\,r}$. Hoc enim modo obtinebimus $m + 2 = \frac{(bq\,q \mp 2\,r\,r)\,(b\,\bar{s}\,s 2\,p\,p)}{p\,p\,r\,r}$; ubi, quia p, q et r, s sunt numeri inter se primi, alio modo ad numeros integros pervenire non licet, nisi prior numeratoris factor divisionem admittat per pp, alter vero per rr; unde hanc expressionem ita repraesentari oportet: $m + 2 \equiv \frac{bqq \mp 2\,r\,r}{p\,p} \times \frac{b\,s\,s 2\,p\,p}{r\,r}$, quarum fractionum utraque numerus integer evadere debet.
- §. 4. Incipiamus a posteriore et ponamus $bss 2pp \equiv crr$, ita ut $bss crr \equiv 2pp$. Statuamus porro $bss + crr \equiv 2n$, ut fiat $bss \equiv n + pp$ et $crr \equiv n pp$, ita ut sit $bcrrss \equiv nn p^4$. Faciamus $bc \equiv \lambda$, et quia $rs \equiv y$, crit $nn p^4 \equiv \lambda yy$. Sumtis igitur pro lubitu numeris n et p, crit yy maximus factor quadratus formulae $nn p^4$, et littera λ exprimet reliquum factorem.
- §. 5. Quia igitur fecimus $\frac{b \cdot s \cdot 2p \cdot p}{rr} = c$, erit nunc $m+2 = \frac{b \cdot q \cdot q + 2 \cdot c \cdot r}{p \cdot p}$. Erat autem crr = n pp, quo valore substituto, ob $bc = \lambda$, habebimus hanc formulam satis concinnam: $m+2 = \frac{\lambda q \cdot q + 2n + 2p \cdot p}{p \cdot p}$, ex qua colligitur $m = \frac{\lambda q \cdot q + 2n}{p \cdot p}$, ubi, quia

numeros n et p, una cum λ , tanquam cognitos spectamus, pro q ejusmodi valores quaeri oportet, ut $\lambda qq + 2n$ divisionem admittat per pp. Interim tamen ratione numeri p evenire potest, ut hoc praestari nequeat; unde imprimis curare debemus, ut pro p ejusmodi numeros assumamus, unde valores integri pro m prodeant.

§. 6. Electis igitur pro litteris n et p numeris ad libitum, formulae $nn - p^4$ maximus factor quadratus sumatur pro yy, factor vero non quadratus pro λ , tum pro q ejusmodi investigantur valores, ut fiat $m = \frac{\lambda qq \pm 2n}{pp}$ numerus integer; quod si fuerit praestitum, habebitur x = pq; praeterea vero, ob y = rs et $a = \frac{b}{pprr}$ formula pro z assumta evadet

 $z \equiv axxyy - (xx \pm yy) \equiv bqqss - ppqq \mp rrss.$ Erat autem $bss \equiv n + pp$, quo substituto fit $z \equiv nqq \mp rrss \equiv nqq + yy.$

In his formulis omnes plane valores, quos quaerimus pro m, necessario erunt contenti-

- §. 7. Istae autem formulae pluribus modis mutari possunt, quorum sequens potissimum ad calculum est accommodatus. Ponendo scilicet n = 2i, p = 2t, q = 2u, y = 2v, erit x = 4tu. Tum autem ista habebitur formula canonica: $ii = 4t^4 = \lambda vv$, fietque $m = \frac{\lambda u u + i}{tt}$. Facta jam substitutione reperitur z = 8iuu + 4vv. Quia igitur tantum ratio inter x et y in computum ingreditur, si cos valores ad dimidium redigantur, ut fiat x = 2tu et y = v, tum z reducetur ad partem quartam, cum fiat z = 2iuu + vv.
- §. 8. Etsi posterior solutio ex priore derivata est, tamen ea latius patet, quoniam in valore ipsius m signum ambiguum etiam numeros impares afficere potest, dum in priore tantum pares affecit, atque prior in posteriore contineatur, quando i est numerus par. Quamobrem sola solutione posteriore uti conveniet. Ac ne multitudo litterarum calculum confundat, hanc solutionem sequenti modo constituamus.

§. 9. Sumtis pro lubitu binis numeris pro n et p, fiat $n^2 - 4p^4 \equiv (n + 2pp) (n - 2pp) \equiv \lambda yy$,

ubi yy maximum factorem quadratum denotat in hac formula contentum, λ vero factorem non quadratum, sieque statim altera variabilium x et y innotescit. Tum vero erit $m = \frac{\lambda q \, q + n}{p \, p}$, ubi q ita accipi debet, ut iste numerus fiat integer, quo facto habebitur x = 2pq, z = 2nqq + yy. Hic autem, ob rationes jam allegatas, casus excludi debent, quibus fit x = y, quia scilicet inde novos valores pro x et y eruere non liceret.

§: 10. Veritas hujus solutionis ex ipsa formula proposita $zz \equiv x^4 + mxxyy + y^4$ immediate sequenti modo ostendi potest. Cum enim sit $4p^4 \equiv nn - \lambda yy$ et $mpp \equiv \lambda qq + n$, ob $x \equiv 2pq$ habebimus $x^4 \equiv 16p^4q^4 \equiv 4nnq^4 - 4\lambda q^4yy$. Porro erit membrum $mxxyy \equiv 4mppqqyy \equiv 4\lambda q^4yy + 4nqqyy$, unde

 $zz = 4nnqq^4 + 4nqqyy + y^4 = (2nqq + yy)^2.$

Jam pro variis valoribus, qui pro p assumi possunt, sequentes casus evolvamus.

Evolutio casus primi, quo $p \equiv 1$.

§. 11. Hoc igitur casu primo habebimus $nn - 4 \equiv \lambda yy$; deinde erit in integris $m \equiv \lambda qq + n$, tum vero erit $x \equiv 2q$ et $z \equiv 2nqq + yy$. Unde pro variis valoribus loco n assumtis plures solutiones nascuntur, quarum praecipuas, simpliciores quidem, in sequenti tabula ab oculos ponamus:

n	y	λ	m	x	z
0	2	- 1	$-qq \pm 0$	$\overline{2q}$	0 qq + 4
1	1	- 3	-3qq + 1	2q	2qq + 1
2	y	0	$\vdash 0 qq + 2$	2q	$4qq \pm yy$
3	1	5	$5qq \pm 3$	2q	$6qq \pm 1$
4	2	3	$3qq \pm 4$	2q	$8 qq \pm 4$
5	1	21	21 qq + 5	2q	$10 qq \pm 1$
6	4	2	$2qq \pm 6$	2q	$12 qq \pm 16$
7	3	5	$5qq \pm 7$	2q	$14qq \pm 9$
8	2	15	15 qq + 8	2q	$16 q\dot{q} + 4$
9	1	77	77 qq + 9	2q	$18 qq \pm 1$
10	4	6	$6qq \pm 10$	2q	$20 qq \pm 16$
11	3	13	$-13qq \pm 11$	2q	22 qq + 9
12	2	35	35 qq + 12	2q	24qq + 4

Quam tabulam, prout necessitas postulat, facile ulterius continuare licet.

- §. 12. Quaelibet harum solutionum, ob numerum q arbitrio nostro relictum, innumerabiles suppeditat valores pro numero m, qui adeo, ob signum ambiguum ipsius m, duplicantur. At vero meminisse oportet, hinc casus excludi debere quibus fit $x \equiv y$. Tota ceterum haec evolutio mira facilitate expediri potest. Quod ut exemplo ostendamus, sumamus $n \equiv 7$ et $q \equiv 4$, et pro signo inferiore habebimus $m \equiv 73$, $y \equiv 3$ et $x \equiv 8$; tum vero $z \equiv 215$. Erit igitur $8^4 + 73 \cdot 9 \cdot 64 + 81 \equiv 215^2$, quod egregie congruit.
- §. 13. Ex his formulis valores pro littera m computavi, ubi quidem tantum ad numeros positivos respexi eosque omnes infra 200 in sequenti tabula exhibeo:

Catalogus valorum litterae m ex casu $p \equiv 1$ desumtorum

2, 8, 12, 13, 16, 17, 23, 24, 26, 27, 31, 33, 36, 38, 41, 42, 44, 48, 49, 52, 55, 56, 61, 63, 64, 66, 67, 68, 71, 73, 77, 78, 79, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 91, 94, 95, 96, 100, 104, 106, 107, 112, 118, 122, 127, 128, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 140, 143, 151, 153, 156, 159, 160, 162, 166, 168, 169, 171, 172, 173, 174, 177, 178, 183, 184, 187, 188, 191, 194, 196, 197, 198, 199, 200.

Magis sunt faccundae, quo minor fuerit numerus λ , atque adeo, in quibus haec littera λ majorem habet valorem, eae prorsus ad hunc finem sunt inutiles. Quamobrem plurimum intererit cas formulas, ubi λ est numerus satis parvus, hic apponere

$$m = 2qq + (6, 34, 198, 1154, etc.)$$

$$y = 4, 24, 140, 816, etc.$$

$$m = 3qq + (4, 14, 52, 194, 724, 2702, etc.)$$

$$y = 2, 8, 30, 112, 418, 1560, etc.$$

$$m = 5qq + (3, 7, 18, 47, 123, 322, 843, etc.)$$

$$y = 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, etc.$$

$$m = 6qq + (10, 98, 976, 9602, etc.)$$

$$y = 4, 40, 396, 3920, etc.$$

$$m = 7qq + (16, 254, 4048, etc.)$$

$$y = 6, 96, 1530, etc.$$

$$m = 10qq + (38, 1442, etc.)$$

$$y = 12, 456, etc.$$

$$m = 11qq + (20, 398, etc.)$$

$$y = 6, 120, etc.$$

$$m = 15qq + (8, 62, 488, etc.$$

$$y = 2, 16, 126, etc.$$

Quoniam numeri supra dati ex solo casu $p = \mathbf{r}$ sunt deducti, nisi reliqui casus praeterea alios praebeant, omnes illos numeros, qui in catalogo non continentur, iis forent adnumerandi, de quibus demonstratum est formulam propositam nunquam quadratum reddi posse, id quod mox accuratius explorabimus.

Evolutio casus secundi, quo p = 2.

- §. 15. Hie ergo erit $nn 64 \equiv \lambda yy$ et $m \equiv \frac{\lambda qq \pm n}{4}$, $x \equiv 4q$ et $z \equiv 2nqq \pm yy$; ubi statim evidens est pro n nullos numeros impariter pares, seu formae 4i + 2, accipi posse, quia alioquin m nullo modo integer fieri posset. At si pro n numerus pariter par sumeretur, etiam q par esse deberct, ac tum formula pro m data jam in casu praecedente contineretur; unde patet pro n non nisi numeros impares accipi debere. Sumto igitur $n \equiv 1$ erit $\lambda yy \equiv -63$, ideoque $\lambda \equiv -7$ et $y \equiv 3$, unde habebitur $m \equiv \frac{-7qq \pm 1}{4}$, ubi solum signum inferius valebit; pro q vero numeros impares assumi conveniet. Posito igitur $q \equiv 2t \pm 1$ reperitur $m \equiv -7(tt \pm t) = 2$, unde tantum numeri negativi resultant. Tum autem erit $x \equiv 4(2t \pm 1)$ et $z \equiv 2(2t \pm 1)^2 = 9$.
- §. 16. Quo autem numeros positivos non nimis magnos obtineamus, sumamus $n \equiv 17$, eritque $nn = 64 \equiv 9 \cdot 25 \equiv \lambda yy$; unde fit $\lambda \equiv 1$ et $y \equiv 15$; tum vero erit $m \equiv \frac{qq-17}{4}$, $x \equiv 4q$ et $z \equiv 34qq = 225$. Statuatur $q \equiv 1 + 2t$, erit in integris $m \equiv tt + t 4$, tum vero $x \equiv 4(1+2t)$ et $z \equiv 34(1+2t)^2 225$. Hinc pro valoribus
- t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc. nascitur m = 2, 2, 8, 16, 26, 38, 52, 68, 86, 106, 128, 152, etc. qui autem numeri omnes, solo ultimo excepto, in superiore catalogo continentur.

- §. 17. Simili ratione casus, quibus sumitur p = 3, 4, 5, 6, etc. tractari possent. Numeri autem qui pro m inveniuntur plerumque jam in superiore tabula reperiuntur. Hie autem adhuc adjiciam casus nonnullos, qui novos valores pro n praebent, inter quos praecipue summam attentionem meretur casus m = 60, qui praeter omnem expectationem se obtulit posito p = 7, ita ut
- $nn-4 \cdot 7^4 \equiv (n-98) \ (n+98) \equiv \lambda yy$ et $m \equiv \frac{\lambda qq \pm n}{49}$; tum vero $x \equiv 14q$ et $z \equiv 2nqq \pm yy$. Sumsi autem $n \equiv 102$, ut fieret $\lambda yy \equiv 4 \cdot 200$, unde fit $\lambda \equiv 2$ et $y \equiv 20$, hincque colligitur $m \equiv \frac{2qq \pm 102}{49}$, qui numerus evadit integer, sumendo $q \equiv 39$ et adhibendo signum inferius; prodit enim $m \equiv 60$, ubi $x \equiv 14 \cdot 39$ et $y \equiv 20$, sive semisses sumendo, $x \equiv 273$ et $y \equiv 10$.
- §. 18. Eodem modo novum valorem m = 189 erui ex casu p = 8, unde fiit $\lambda yy = (n 128)(n + 128)$. Sumsi igitur n = 297, ut fieret $\lambda yy = 169.425$, sive $\lambda yy = 17.25.169$, ita ut $\lambda = 17$ et y = 5.13 = 65. Tum vero erit $m = \frac{1749 \pm 97}{64}$, quae expressio ad numerum integrum perducit, ponendo q = 27; fit enim m = 189, pro quo valore erit x = 16.27, y = 65, $z = 594.27^2 65$.
- §. 19. Catalogo valorum idoncorum pro m etiam hos adnumerandos esse deprehendi: m = 99, m = 145 et m = 155. Priore casu fit x = 312, y = 215, z = 670081, secundo casu x = 159, y = 40 et tertio x = 104, y = 95. Neque tamen asseverare ausim me hoc modo omnes valores pro m infra 200 obtinuisse, cum formulae tantopere complicatae perduxerint ad novos valores infra 200. Hine patet istam investigationem maxime esse arduam.

SUPPLEMENTUM

De valoribus numeri m, ut haec formula $x^4 - mxxyy + y^4$ fiat quadratum.

§. 20. Evidens est hoc negotium per formulas supra datas Mémoires de l'Acad. T. VII.

expediri posse, si modo littera m ibi negative capiatur; hocque modo id commodi nanciscimur, ut pleraeque illarum formularum, ubi $\lambda > n$, nullum usum praestent; in quibus autem $\lambda < n$, inde certus tantum valorum numerus deduci possit. Omnes autem casus in sequentibus formulis continentur:

Casus	m	x	y
4	2 + 15s + 15ss	1	$\frac{1}{4(1+2\dot{s})}$
$a \equiv 1$	2 + 15s + 60ss	7	8 (1 + 8 s)
$c \equiv 2$	2 + 45 s + 240 ss	33	16 (1 + 32 s)
	2 + 7s + 7ss	3	4 (1 + 2 s)
$a \equiv 3$	2 + 21s + 28ss	3	8 (3 + 8 s) ·
c = 2	2 + 35 s + 112 ss	45	16 (5 + 32 s)
a = 2	2 + 16 s + 18 ss	8	6 (4 + 9 s)
c = 2	2 + 32 s + 162 ss	112	18 (8 + 81 s)
a = 4	2 + 20s + 45ss	8	6 (2 + 9 s)
$c \equiv 3$	2 + 80 s + 405 ss	16	18 (8 + 81s)
$a \equiv 5$	2 1 225 2 1 22 22		((1) 0 =
c = 3	2 + 225 s + 99 ss	5	6 (1 + 9 s)
	2 + 66 s + 275 ss	3	10 (3 + 25 s)
1	9 + 88s + 275ss	3	10 (4 + 25 s)
c = 5	2 + 48 s + 150 ss	8	10 (4 + 25 s)
c = s	4 + 36 s + 150 ss	8	10 (3 + 25 s)
	2 + 12 s + 25 ss	48	10 (6 + 25 s)
	2 + 16s + 25ss	48	10 (8 + 25 s)
$c \equiv 6$	2 + 23s + 207ss	1 1	12 (1 + 18 s)
	2 + 48s + 147ss	16	14 (8 + 4° s)
7	2 + 60 s + 245 ss	24	14 (6 + 49 s)
c=7	2 + 30 s + 147 ss	55	14 (5 + 49 s)
	2 + 18s + 147ss	39	14 (3 + 49 s)
	2 + 20s + 169ss	240	26(10 + 169 s)
c = 1	3 2 + 48s + 169ss	240	26(24 + 169 s)

§. 21. Ex his formulis sequentes valores ipsius m, cum suis x et y, ad terminum 200 usque computavi:

m = 32, 92, 182, 47, 197, 16, 44, 76, 142, 9, 72, x = 1, 1, 1, 7, 33, 3, 3, 3, 3, 3, 3, y = 12, 20, 28, 56, 16.29, 12, 20, 25, 36, 40, 104,

156, 189, 79, 149, 4, 36, 42, 106, 116, 3, 3, 45, 45, 8, 8, 8, 8, 8, 152, 168, 16.27, 16.37, 3, 78, 96, 120, 150,

182, 196, 79, 123, 196, 102, 198, 118, 190, 112, 112, 5, 5, 3, 8, 8, 8, 8, 18.73, 18.89, 48, 60, 210, 210, 290, 220, 280,

179, 101, 197, 187, 119, 179, 151, 191, 123, 48, 16, 16, 24, 55, 55, 240, 240, 240. 670, 14.41, 14.57, 14,.43, 14.44, 14.54, 26.159, 26.179, 26.145,

 \S . 22. Huic catalogo porro superstructa est sequens tabula completa omnium valorum m infra 200, quibus formula

 $x^4 - mxxyy + y^4$

quadratum reddi potest:

 $\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 4,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 16,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 32,\ 36,\ 39,\ 40,\ 42,\ 43,\ 44,\ 47,\ 49,\ 51,\ 64,\ 67,\ 70,\ 72,\ 74,\ 76,\ 77,\ 78,\ 79,\ 81,\ 86,\ 89,\ 90,\ 92,\ 96,\ 100,\ 101,\ 102,\ 103,\ 106,\ 109,\ 113,\ 118,\ 119,\ 121,\ 123,\ 126,\ 134,\ 136,\ 142,\ 144,\ 146,\ 148,\ 149,\ 151,\ 156,\ 166,\ 167,\ 169,\ 179,\ 182,\ 188,\ 189,\ 190,\ 191,\ 193,\ 196,\ 197,\ 198;\ 200. \end{array}$

METHODUS ELEGANTIOR

inveniendi numeros m, ut fiat $x^4 + m x x y y + y^4 = z z$.

§. 22. Sumto pro lubitu numero α fiat $\alpha\alpha - 4 = \lambda\beta\beta$, et supra ostensum est, si capiatur $m = \lambda\zeta\zeta + \alpha$, fore $x = \beta$, $y = 2\zeta$ et $z = \beta\beta + 2\alpha\zeta\zeta$, quod autem mox denno demonstrabitur. Jam quia praecipuum momentum in numero λ situm est, notetur innumeros dari posse pro α valores, qui idem λ producant. Ad hos valores inveniendos sequentes formentur binae series recurrentes ex scala relationes α , -1 formatae:

o, 1, 2, 3, - - - n

2,
$$\alpha$$
, $\alpha\alpha - 2$, $\alpha^3 - 3\alpha$, - - \mathfrak{A}

o, β , $\alpha\beta$, $\alpha\alpha\beta - \beta$, - - \mathfrak{B}

eritque $\mathfrak{A} = (\frac{\alpha + \beta\sqrt{\lambda}}{2})^n + (\frac{\alpha - \beta\sqrt{\lambda}}{2})^n$, tum vero etiam

 $\mathfrak{B}\sqrt{\lambda} = (\frac{\alpha + \beta\sqrt{\lambda}}{2})^n - (\frac{\alpha - \beta\sqrt{\lambda}}{2})^n$.

§. 23. Jam cum sit $(\frac{\alpha + \beta \sqrt{\lambda}}{2})$ $(\frac{\alpha - \beta \sqrt{\lambda}}{2}) \equiv 1$, erit $\mathfrak{A}^2 - \lambda \mathfrak{B}^2 \equiv 4$, ita ut $\mathfrak{A}^2 - 4 \equiv \lambda \mathfrak{B}^2$, quae forma cum similis sit primae, sequitur, sumto $m \equiv \lambda f + \mathfrak{A}$, ubi f iterum ab arbitrio pendet, fore $x \equiv \mathfrak{B}$, $y \equiv 2 f$ et $z \equiv \mathfrak{B} + 2 \mathfrak{A} f$, cujus veritas immediate ex formula proposita ostenditur; fiet enim

$$z = \sqrt{x^4 + mxxyy + y^4} = \mathfrak{B} \pm 2\mathfrak{A}f.$$

§. 24. Percurramus casus simpliciores, quibus λ non nimis magnum prodit, eosque hic exhibeamus

$$\alpha = 3$$
 | $\mathfrak{A} = 2$, 3, 7, 18, 47, 123, 322, 843, etc.
 $\beta = 1$ | $\mathfrak{B} = 0$, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, etc.
 $\lambda = 5$ | $m = 5 \text{ ff} \pm \mathfrak{A}$
 $\alpha = 4$ | $\mathfrak{A} = 2$, 4, 14, 52, 194, 724, 2702, etc.
 $\beta = 3$ | $\mathfrak{B} = 0$, 2, 8, 30, 112, 418, 1560, etc.
 $\lambda = 2$ | $m = 3 \text{ ff} \pm \mathfrak{A}$

$$\alpha = 5$$
 | $\mathfrak{A} = 2, 5, 23, 110, 527, 2525, etc.$
 $\beta = 1$ | $\mathfrak{B} = 0, 1, 5, 24, 115, 551, etc.$
 $\lambda = 21$ | $m = 21 f \pm \mathfrak{A}$ |
 $\alpha = 6$ | $\mathfrak{A} = 2, 6, 34, 198, 1154, etc.$
 $\beta = 4$ | $\mathfrak{B} = 0, 4, 24, 140, 816$ etc.
 $\lambda = 2$ | $m = 2 f \pm \mathfrak{A}$ |
 $\alpha = 8$ | $\mathfrak{A} = 2, 8, 62, 488, etc.$
 $\beta = 2$ | $\mathfrak{B} = 0, 2, 16, 126, etc.$
 $\lambda = 15$ | $m = 15 f \pm \mathfrak{A}$ |
 $\alpha = 10$ | $\mathfrak{A} = 2, 10, 98, 970, etc.$
 $\beta = 4$ | $\mathfrak{B} = 0, 4, 40, 396, etc.$
 $\lambda = 6$ | $m = 6 f \pm \mathfrak{A}$ |
 $\alpha = 11$ | $\mathfrak{A} = 2, 11, 119, 1298, etc.$
 $\alpha = 11$ | $\mathfrak{A} = 2, 11, 119, 1298, etc.$
 $\alpha = 13$ | $\alpha = 13 f \pm \mathfrak{A}$ |
 $\alpha = 16$ | $\alpha = 2, 16, 254, 4048, etc.$
 $\alpha = 6$ | $\alpha = 6, 96, 1530, etc.$
 $\alpha = 7$ | $\alpha = 7 f \pm \mathfrak{A}$ |

Ex his igitur valoribus plurimos valores idoneos pro m derivari poterunt tam positivos quam negativos. Praeterea notandum est pro λ etiam numeros fractos accipi posse, ita tamen ut inde pro m numeri integri oriantur.

Solutio generalis.

§. 25. Introducendo igitur fractiones ponamus $a = \frac{a}{c}$ et $\beta = \frac{b}{c}$, ita ut $aa - 4cc = \lambda bb$ et ambac series recurrentes erunt:

quarum denominatores secundum potestates ipsius c procedunt, numeratores vero seriem recurrentem constituunt, cujus seala relationis est a, -cc. Cum igitur sit $\mathfrak{A} = \frac{A}{c^n}$ et $\mathfrak{B} = \frac{B}{c^n}$, erit $A^2 - 4c^{2n} = \lambda B^2$; tum vero fiet $m = \frac{\lambda c^n f f + A}{c^n}$, existente $x = \frac{B}{c^n}$, y = 2f et $z = \frac{B^2 + c^n A f f}{c^2 n}$.

- §. 26. Evidens autem est valorem m integrum fieri non posse, nisi fuerit denominator c^n quadratum. Statuatur ergo $n = 2\nu$ et sumatur $f = \frac{f}{c^{\nu}}$, eritque $m = \frac{\lambda f f + A}{c^{2\nu}}$, ubi f ita sumi oportet, ut numerator evadat divisibilis per denominatorem. Tum autem, quia pro x, y, z, fractiones prodeunt, et tantum ratio inter x et y in calculum ingreditur, multiplicetur per $c^{2\nu}$, fietque x = B et $y = 2 f c^{\nu}$, existente $z = B^2 + 2 A f f$.
- §. 27. Hic observandum est plerumque signorum ambiguorum alterutrum tantum locum habere posse, easibus exceptis, quibus denominator $c^{2\gamma}$ est summa duorum quadratorum, quibus casibus utrumque signum locum habet. Tum vero, si fuerit a < 2c, manifestum est valorem λ semper negativum fieri debere, unde, quia littera A signo ambiguo est affecta, pro m tam valores negativi quam possitivi oriuntur,

SOLUTIO PROBLEMATIS MECHANICI

NON PARUM CURIOSI

AUCTORE

L. E U L E R O.

Conventui exhibuit die 14 Martii 1782.

- §. 1. Concipiatur planum inclinatum AO, quod cum hori- Tab. I. zonzontali HO angulum constituat $AOH = \zeta$. Huic plano primum Fig. 1. in A incumbat discus circularis TaX, cujus centrum sit C et radius CX = a. Manifestum autem est, loco hujus disci circularis assumi posse vel globum vel cylindrum, vel aliud quodvis corpus rotundum, si modo ejus axis perpetuo maneat horizontalis. Ponamus hujus corporis massam = M, momentum vero inertiae respectu axis = Mbb; ubi quidem assumo centrum gravitatis totius corporis incidere in centrum disci C.
- §. 2. Huic porro disco circumvolutum sit filum in sensum ATaX, cujus terminus extremus A in hoc ipso puncto A plano sit affixus. Hinc statim patet, filum impedire, quominus discus, volvendo super plano, descendat; sin autem radendo descensum inchoaret, filum relaxaretur. In calculo autem assumi convenit filum a disco jam evolutum manere in directum extensum. Quamobrem necesse est ut discus partim radendo partim volvendo descendere incipiat. Etiam i autem hoc motu frictio oriretur, coacti tamen sumus ab ea animum abstrahere, quandoquidem calculus nullo modo ad frictionem extendi potest.

- 6. 3. His praemissis primo ponamus elapso tempore t discum nostrum descendendo pervenisse in situm XaT. Tum igitur filum a disco evolutum situm tenebit AT, ita ut in T discum tangat, quamobrem perpetuo erit AT = AX; unde si vocemus spatium percursum AX = x, erit etiam longitudo fili evoluti AT = x. Hinc si ponatur angulus $XAT = \theta$, qui a recta CA bifariam escatur, erit tag. $\frac{1}{2}\theta = \frac{a}{x}$, ideoque $x = a \cot \frac{1}{2}\theta$.
- §. 4. Denotante nunc π angulum duobus rectis aequalem, erit angulus $X CT \equiv \pi \theta$. Evidens autem est labente tempore angulum θ , qui initio erat $\equiv \pi$, continuo decrescere. Hinc jam determinari poterit locus, ubi punctum disci reperiatur, quod initio planum in A tangebat. Concipiatur enim filum TA solutum iterum disco obvolvi et abscindatur arcus Ta rectae $AT \equiv x$ aequalis, eritque a locus puncti A, qui igitur a situ CX, ad planum nunc normali, distat angulo XCa hicque angulus metitur motum gyratorium, quo discus ab initio jam processit.
 - §. 5. Ponamus igitur istum angulum $XCa = \Phi$, et quia arcus $TXa = \frac{AT}{CT} = \frac{x}{a}$, ob angulum $XCT = \pi \theta$ erit

 - §. 6. Quod si jam principia mechanica consulamus, sumto elemento temporis ∂t constante, ac denotante g altitudinem lapsus liberi uno minuto secundo peracti, si hoc tempore ponamus tensionem fili AT = T, hine orietur vis motu progressivo contraria $T\cos \theta$.

At vero ob gravitatem, seu pondus M, vis secundum directionem plani urgens erit M sin. ζ , hinc vis accelerans motum progressivum ita exprimetur: $\frac{M \sin \zeta - T \cos \theta}{M}$, cui ergo vi ipsa acceleratio $\frac{\partial \partial x}{\partial g \partial t^2}$ acqualis est ponenda, unde pro hoc motu ista habebitur acquatio: $\frac{\partial \partial x}{\partial g \partial t^2} = \sin \zeta - \frac{T}{M} \cos \theta$. At vero pro motu gyratorio habebitur momentum vis gyrantis = Ta, quod divisum per momentum vis inertiae M b b aequale erit accelerationi gyratoriae $\frac{\partial \partial \Phi}{2g \partial t^2}$, unde oritur ista aequatio: $\frac{\partial \partial \Phi}{\partial g \partial t^2} = \frac{T}{M} \cdot \frac{\sigma}{b b}$.

- §. 7. His aequationibus totus corporis motus, tam progressivus quam gyratorius, perfecte determinatur. At vero hic probe notandum est, tensionem fili T adhuc prorsus esse incognitam, unde eam ex calculo eliminari conveniet. Hunc in finem ex posteriore aequatione quaeratur $\frac{T}{M} = \frac{bb}{a} \frac{\partial \partial \Phi}{2g \partial t^2}$, hocque valore in priore substituto oritur ista aequatio $\frac{a \partial x + b b \partial \partial \Phi \cos \theta}{2ag \partial t^2} = \sin \zeta$, ad quam residuto solvendam necesse est ut relatio inter binas variabiles x et Φ in computum ducatur, quas ergo variabiles ad angulum & revocemus.
- §. 8. Cum igitur sit $x = a \cot \frac{1}{2} \theta$, erit $\partial x = \frac{\partial \theta}{2 \sin \frac{1}{2} \theta^2} = \frac{-a \partial \theta}{1 \cos \theta}$. Porro, ob $\Phi = \cot \frac{1}{2}\theta + \theta - \pi$, erit $\partial \Phi = \frac{-\partial \theta}{1 - \cos \theta} + \partial \theta = \frac{-\partial \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta}$,

hincque colligitur $\partial x = \frac{a \partial \Phi}{cost d}$. Hac relatione inter differentialia ∂x et $\partial \Phi$ inventa multiplicemus acquationem differentio - differentialem postremam per $\partial x = \frac{a \partial \Phi}{\cos t}$, fiet $\frac{\partial x \partial \partial x + bb \partial \Phi \partial \Phi}{2 \otimes \theta t^2} = \partial x \sin \zeta$, quae acquatio sponte est integrabilis, eaque integrata prodit: $\frac{\partial x^2 - bb \partial x^2}{4 \cdot 3 \cdot \partial x^2} = x \sin \zeta,$

$$\frac{\partial x^2 - bb\partial \mathcal{D}^2}{4 \, \$ \, \partial \mathcal{T}^2} = x \sin \zeta,$$

ubi nulla constantis additione est opus. Si enim faciamus $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = u$, erit v celeritas progressiva et u celeritas angularis seu gyratoria; utraque autem primo initio, ubi x = 0, evanescere debet.

Facta autem substitutione oritur aequatio $vv + bbuu = 4gx \sin \zeta$ ex qua simul conservatio principii virium vivarum clucet.

§. 9. Loco binarum autem variabiliam x et Φ introducamus angulum θ , ope valorum supra pro ∂x et $\partial \Phi$ inventorum, quibus in praecedente aequatione substitutis oritur sequens acqualitas:

$$\frac{\partial^{9^2}}{(1-\cos\theta)^2}(aa+bb\cos\theta^2) = 4ga\partial t^2\sin\theta \cdot \zeta\cot\theta \cdot \frac{1}{2}\theta$$
sive $\partial t^2 = \frac{\partial^{9^2}(aa+bb\cos\theta^2)}{4ga\sin\theta \cdot \zeta\sin\theta \cdot (1-\cos\theta)}$, ob $\cot\theta \cdot \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ et.
$$\sqrt{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \sin\theta \cdot \text{Hinc ergo colligitur tempus}$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ga\sin\theta}}\int \partial\theta \sqrt{\frac{aa+bb\cos\theta^2}{\sin\theta \cdot (1-\cos\theta)}}.$$

Eacile autem patet hanc integrationem neque ad logarithmos neque ad arcus circulares reduci posse. Concessis autem quadraturis non solum pro quovis angulo θ tempus t, sed ctiam ad quodvis tempus t, vicissim angulus θ assignari poterit.

§: 10. Hanc formulam integralem ita integrari oportet; ut initio motus, ubi $\theta \equiv \pi$, evanescat. Scribamus autem, ut supra, $\pi - \omega$ loco θ , quo integratio a termino $\omega \equiv 0$ incipiat, et quia tum cos. $\theta \equiv -\cos \omega$ et sin. $\theta \equiv \sin \omega$, habebimus

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g \, a \sin \zeta}} \int \partial \omega \sqrt{\frac{\dot{a} \, a + b \, b \cos \omega^2}{\sin \omega (1 + \cos \omega)}}.$$

Relatio igitur inter tempus t et angulum ω tanquam cognita spectari poterit:

§. 11. Hinc etiam ad quodvis tempus binas celeritates, progressivam $v = \frac{\partial x}{\partial t}$ et angularem $u = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, per angulum ω commode: exprimere licct. Cum enim sit

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \cdot \frac{a}{1 + \cos \omega} \text{ et } \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{-\partial \omega}{\partial t} \cdot \frac{\cos \omega}{1 + \cos \omega}, \text{ ob}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{g \, a \sin \zeta \sin \omega (1 + \cos \omega)}{a \, a + b \, b \cos \omega^2}}, \text{ reperietur}$$

$$v_{\perp} = 2 \, a \sqrt{\frac{g \, a \sin \zeta \tan \zeta \cos \omega}{a \, a + b \, b \cos \omega^2}} \text{ et } u = -2 \cos \omega \sqrt{\frac{g \, a \sin \zeta \tan \zeta}{a \, a + b \, b \cos \omega^2}}$$

Unde patet, quamdiu angulus ω recte est minor, celeritatem angularem u esse negativam sive in sensum X a T X vergere; ubi autem angulus ω est rectus, ista celeritas gyratoria prorsus evanescit; deinceps vero evadit positiva.

Investigatio tensionis.

§. 12. Tensio T immediate deducitur ex posteriore aequatione differentiali secundi gradus: $\frac{\partial \partial \mathcal{D}}{2 g \partial t^2} = \frac{Ta}{Mbb}$, ex qua fit $T = \frac{Mbb \partial \partial \mathcal{D}}{2 a g \partial t^2}$, ubi valor differentialis $\partial \partial \mathcal{D}$ ad differentialia primi gradus reduci debet, id quod sequenti modo praestabitur. Cum sit $\partial x = \frac{a \partial \mathcal{D}}{\cos \mathcal{D}}$ (§. 8.), crit $\partial \partial x = \frac{a \partial \partial \mathcal{D}}{\cos \mathcal{D}} + \frac{a \partial \mathcal{D} \partial \sin \mathcal{D}}{\cos \mathcal{D}^2}$, qui valor in aequatione differentio - differentiali §. 7. data

$$a \partial \partial x + b b \partial \partial \Phi \cos \theta = 2 a g \partial t^2 \sin \xi$$
,

substitutus praebet

$$\frac{\partial \partial \mathcal{D}(aa+bb\cos\theta^2)}{\cos\theta} + \frac{aa\partial \mathcal{D}\partial\theta\sin\theta}{\cos\theta^2} = 2 a g \partial t \sin\theta. \zeta.$$

Si jam differentialis $\partial \oplus$ loco valor supra inventus, qui erat $\partial \oplus = \frac{-\partial \partial \cos \theta}{1 - \cos \theta}$, introducatur, aequatione in ordinem redacta prodibit ista relatio:

$$\partial \partial \Phi (a \ a + b \ b \ \cos^2 \theta^2) = \frac{\partial \theta^2 (aa \cos \theta + bb \cos \theta^3 + 2a a \sin \theta^2)}{2 \sin \theta (1 - \cos \theta)},$$

ubi scilicet etiam loco $2ag\partial t^2 \sin \zeta$ valorem per angulum θ , scilicet $\frac{\partial \delta^2 (aa + bb\cos \delta^2)}{2(1 - \cos \delta)\sin \delta}$ substituimus. Ex hac autem acquatione colligimus differentiale

$$\partial \partial \Phi = \frac{\partial \theta^{2} (a a \cos \theta + b b \cos \theta^{3} + 2 a a \sin \theta^{2})}{2 \sin \theta (1 - \cos \theta) (a a + b b \cos \theta^{2})}.$$

§. 13. Cum igitur supra §. 9. invenerimus

$$\partial t^2 = \frac{\partial \ell^2 (a a + b b \cos \ell^2)}{4 s a \sin \zeta \sin \theta (i - \cos \theta)},$$

per hunc valorem dividendo sit

$$\frac{\partial \partial \Phi}{\partial t^2} = \frac{2 \pi a \sin \beta (a a \cos \theta + b b \cos \theta) + 2 a a \sin \theta}{(a a + b b \cos \theta)^2},$$

unde denique tensio $T = \frac{Mbb}{2ga}, \frac{\partial \partial \Phi}{\partial t^2}$ per quantitatem mere finitam exprimitur, cum inde prodeat

$$T = \frac{Mbb \sin . \zeta (aa \cos . \theta + bb \cos . \theta^3 + 2aa \sin . \theta^2)}{(aa + bb \cos . \theta^2)^2},$$

sive, si loco anguli θ angulus ω introducatur, erit

T = M b b sin.
$$\zeta \times \frac{2 a a \sin \omega^2 - a a \cos \omega - b b \cos \omega^3}{(a a + b b \cos \omega^2)^2}$$
.

§. 14. Hinc perspicimus, circa ipsum motus initium, ubi angulus ω est valde parvus, tensionem fili esse negativam. Erit enim, ob ω minimum:

$$T = -Mbb \sin \zeta \times \frac{aa+bb-2aa\omega\omega}{(aa+bb)^2},$$
 haccque tensio tamdiu manet negativa, donec fiat

$$2 a a \sin \omega^2 \equiv a a \cos \omega + bb \cos \omega^3$$
,

quem autem terminum in genere determinare non licet, nisi per resolutionem aequationis cubicae. Dum autem tensio negativa admitti potest, necesse est fili naturam ita comparatam statuere, ut non solum extensioni sed etiam contractioni resistat. Quoniam autem revera, simulae filum relaxatur, nullam vim sese extendendi exerit, verus corporis motus circa initium penitus a calculo aberrabit, propterea quod tensio, ubi calculus eam monstrat negativam, potius ad nihilum redigi est censenda, atque ex hoc principio novo calculo opus erit, ut motus verus assignari possit.

Rectificatio calculi praecedentis.

f. 15. Quia circa motus initium filum relaxatur, ideoque nullam vim in corpus exerit, propter remotam frictionem corpus solo motu progressivo, sive rependo, super plano inclinato descendet, hocque motu tamdiu progredi perget, quamdiu filum manet laxum, neque ullus motus angularis se admiscebit. Locum igitur investigari oportet ubi filum tendi incipiet.

- §. 16. Quo haec elarius intelligantur teneat discus noster Tab. I. situm CBD super plano inclinato AO. A puneto fixo A ducatur Fig. 2. tangens AD, quae aequalis crit spatio percurso AB = x; ductisque ut ante radiis CB, CD, sit ut hactenus angulus $BAD = \emptyset$, ejusque complementum ad duos rectos $BCD = \omega$. Cum igitur filum ab arcu BD evolutum longitudinem habeat $= a\omega$, filum crit laxum quamdiu distantia AD minor est hoc arcu; unde quaeri oportet locum nostri disci; ubi fit recta AD = AB = x aequalis arcui $BD = a\omega$. Cum igitur sit x = a tag. $\frac{1}{2}\omega = \frac{a \sin \omega}{1 + \cos \omega}$, filum tum dennum intendi incipiet, ubi fit tag. $\frac{1}{2}\omega = \omega$, ita ut quaeri debeat arcus cujus tangens duplo ejus sit major. Calculo autem rite instituto deprehenditur, fore hunc angulum 66° , 46^{\prime} , $56^{\prime\prime}$, qui si ponatur $= \frac{1}{2}\alpha$, ita ut in hoc statu $\omega = \alpha$, erit $AB = \alpha a$, sive in partibus radii AB = 2,331178 a.
- 5. 17. Ad hunc igitur locum usque B, corpus motu solo progressivo super plano inclinato descendet, qui motus ex sola formula $\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} \equiv \sin \zeta$ derivari poterit. Hace enim acquatio per ∂x multiplicata et integrata dat $\frac{\partial x^2}{4 g \partial t^2} \equiv x \sin \zeta$, unde colligitur $\partial t \equiv \frac{\partial x}{2 V g x \sin \zeta}$, hincque $t \equiv \sqrt{\frac{x}{g \sin \zeta}}$. Facto igitur $x \equiv \alpha a$ tempus descensus ab A ad B usque erit $t \equiv \sqrt{\frac{\alpha a}{g \sin \zeta}}$, quod tempus jam in minutis secundis crit expressum. Practerea vero hoc loco, a quo motus mixtus incipiet, percurso scilicet spatio AB $\equiv \alpha a$, erit angulus BCD $\equiv \alpha \equiv 133^\circ$, 33', 52" et angulus BAD $\equiv 46^\circ$, 26', 8".
- §. 18. Pro motu sequente determinando eaedem manebunt aequationes differentiales secundi gradus, quas supra tractavimus, scilicet $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = \frac{Ta}{Mbb}$ et $\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = \sin \zeta \frac{T}{M} \cos \theta$, quas autem nune ita integrari oportet, ut posito x = aa fiat angulus $\Phi = 0$ atque insuper ut fiat $\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = 4gaa \sin \zeta$.

6. 19. Cum igitur sit $\frac{T}{M} = \frac{b \, b \, \partial \, \Phi}{2 \, a \, g \, \partial \, t^2}$, hoc valore in alteracequatione substituto colligitur fore sin. $\zeta = \frac{a \, \partial \, x \, + \, b \, b \, \partial \, \Phi \, \cos \, \theta}{2 \, a \, g \, \partial \, t^2}$, quae aequatio dueta in $\partial x = \frac{a \partial \Phi}{\cos t}$ et integrata sequentem subministrat:

$$\frac{\partial x^2 + b b \partial \Phi^2}{4g \partial t^2} = C + x \sin \zeta.$$

Hic ad constantem C definiendam loco $\partial \Phi$ restituendus est ejus valor $\frac{\partial x \cos \theta}{\partial a}$, quo facto aequatio illa hanc induet formam: $\frac{\partial x^2(aa + bb \cos \theta^2)}{\partial a \in \partial t^2} = C + x \sin \zeta$.

$$\frac{\partial x^2(aa + bb \cos \theta^2)}{+ aa g \partial t^2} = C + x \sin \zeta.$$

Quoniam igitur motus initio esse debet $x \equiv aa$ et $\frac{\partial x^2}{\partial t^2} \equiv 4gaa$ sin. ζ , his substitutis fiet constant $C = + \frac{a \ bb \ cor. \ a^{\circ} \ sin. \ \zeta}{a}$. Hinc igitur, posito brevitatis gratia $\frac{a b b \cos a^2}{a} = f$, erit

$$\frac{\partial x^2 (aa + bb \cos \theta^2)}{4aag \partial t^2} = (a + f) \sin \zeta.$$

- . 20. Cum hujus motus mitio, quod in puncto B statuimus, sit $\frac{\partial x}{\partial t} = 2 \sqrt{g} \alpha a \sin \zeta$, ob $\partial \Rightarrow \frac{\partial x \cos \theta}{a}$ et $\cos \theta = -\cos \alpha$ erit hoc momento celeritas angularis $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \cos \alpha \sqrt{\frac{4 \pi \alpha \sin \zeta}{\alpha}}$, cum tamen fuisset $\Phi = 0$, id quod insigne paradoxon videtur, dum primo instanti subito celeritas angularis finita generatur, cujus rei caussa est, quod, simulae filum in directum extenditur, ne minimam quidem elongationem admittere in calculo statuitur. Totum autem hoc paradoxon diluitur, quando filo vim quandam sese quam minime expandendi tribuimus. Tum enim, quod hic calculus puncto temporis evenire ostendit, tempusculo quodam valde parvo perage-Similis autem saltus deprehenditur in collisione corporum, prouti vulgo proponi solet; ubi etiam in instanti maxima motus mutatio contingere deberet.
 - §. 21. Ex illa aequatione §. 19. inventa deducitur quadratum celeritatis progressivae, scilicet $\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{4 a a g(x+f) sin \cdot \zeta}{a a + b b \cos \cdot \theta^2}$, ex qua

porro concluditur $\partial t = \frac{-\partial \theta}{2\sqrt{g \sin \zeta}} \sqrt{\frac{a a + b b \cos \theta^2}{(x+f)(1-\cos \theta)^2}}$, cujus integratio a termino $\pi - a$ inchoari debet, atque integrale dabit tempus descensus a loco B in minutis secundis expressum.

§. 22. Deinde ipsa tensio fili simili modo ac supra definiri poterit, dum loco $x \sin \zeta$ scribitur ratione constantis adjectae valor $(x+f) \sin \zeta$. Quia igitur est $x = \frac{a \sin \theta}{1-\cos \theta}$, crit

$$x \rightarrow f = \frac{a \sin \theta + f(1 - \cos \theta)}{1 - \cos \theta}$$
.

Unde patet, si loco x scribendum sit x + f, loco a sin. θ scribendum fore a sin. $\theta + f(1 - \cos \theta)$. Expressio igitur tensionis T supra \S . 13. exhibita, qua erat

T = Mbb sin.
$$\zeta \times \frac{a \cdot a \cdot cos. A + b \cdot b \cdot cos. \theta^3 + 2 \cdot a \cdot sin. \theta \cdot a \cdot siu. \theta}{(a \cdot a + b \cdot b \cdot cos. \theta^2)^2}$$

facta substitutione pro $a \sin \theta$ pro hoc motu erit:

$$T = Mbb \sin \zeta \times \frac{a a \cos \theta + b b \cos \theta + a \sin \theta (a \sin \theta + f(1 - \cos \theta))}{(a a + b b \cos \theta^2)^2}$$

§. 23. Hinc pro initio motus posterioris in loco B, ubi $\theta := -\alpha$, ideoque sin. $\theta := \sin \alpha$ et cos. $\theta := -\cos \alpha$, haec tensionis expressio sequentem induit formam:

T = Mbb sin.
$$\zeta \times \frac{a \sin \alpha (a \sin \alpha + f(1 + \cos \alpha) - a a \cos \alpha - b b \cos \alpha^{2})}{(a a + b b \cos \alpha^{2})^{2}}$$

quae substituto valore $f = \frac{a b b \cos \alpha^{2}}{a} = \frac{b b \sin \alpha \cos \alpha^{2}}{a(1 + \cos \alpha)}$ (ob $\alpha = \tan \frac{1}{2}\alpha$.
 $= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$), reducitur ad hanc:

T = M b b sin,
$$\zeta \times \frac{2 \sin \alpha^2 - \cos \alpha}{a + b b \cos \alpha^2}$$
.

§. 24. Cum autem celeritas angularis in puneto B subito finita evadat, ut supra §. 20. monuimus, ad cam generandam vi adeo infinita opus est, quod autem hic longe secus evenit; unde

novum paradoxon sese offert, quod autem facile resolvitur. Nam quia pro toto hoc motu sumsimus $\partial \Phi = \frac{\partial x \cos \theta}{a}$, haec aequatio, quae in motu praecedente neutiquam locum habet, in posterioris motus initio nondum valere potest. Quamobrem, cum hac relatione usi simus ad tensionem T determinandam, mirum non est eam in ipso initio B a veritate aberrare. Quoties enim hujusmodi saltus occurrit, calculus nunquam congruere potest.

DE PROBLEMATE

TRAJECTORIARUM ORTHOGONALIUM AD SUPERFICIES TRANSLATO.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 12 Augusti 1782.

- §. 1. Quaestio, quam hic tractandam suscipio, ita se habet: Propositis infinitis superficiebus, una quadam aequatione inter ternas coordinatas contentis, investigare alias, quae illas ubique ad angulos rectos intersecent. Hic igitur ante omnia nobis evit in criterium inquirendum, quo normalitas illa intersectionum determinetur. Hunc in finem consideremus superficiem quamcunque ad ternos axes inter se normales relatam, qui sint OA, OB, OC, quibus parallelae Tab. 1. statuantur ternae coordinatae OX $\equiv x$, XY $\equiv y$, YZ $\equiv z$, quibus Fig. 3. ergo positio puncti cujuscunque Z superficiei propositae determinatur. Quo jam ejus intersectio, ab alia quavis superficie facta, definiri queat, quaeramus planum, quod nostram superficiem in puncto Z tangat.
- §, 2. Pro hac autem superficie data sit aequatio differentialis $\partial z = p \partial x + q \partial y$. Ac primo concipiatur sectio plano AOC parallela et per punctum Z facta, pro qua ergo erit y constans et $\partial z = p \partial x$; unde si Zp sit tangens hujus sectionis et Yp subtangens axi OA parallela, erit $Yp = \frac{z \partial x}{\partial z} = \frac{z}{p}$. Simili modo concipiatur alia sectio plano BOC parallela, cujus tangens sit recta Zq, cujus ergo, ob x constans et $\partial z = q \partial y$, subtangens "erit $Yq = \frac{z}{q}$.

Unde patet, quia ambae rectae $\mathbb{Z}p$ et $\mathbb{Z}q$ superficiem tangunt, totum planum tangens fore $\mathbb{Z}pq$.

§. 3. Contemplemur nunc aliam superficient iisdem coordinatis expressam, quae illam in puncto Z normaliter trajicere debeat, pro qua statuamus hanc acquationem differentialem:

$$\partial z = P \partial x + Q \partial y$$

Efficiendum igitur est, ut planum hanc superficiem tangens ad planum praccedens sit perpendiculare, id quod eveniet, si recta ad hanc superficiem normalis incidat in planum, quod praecedentem superficiem tangit. Quamobrem pro hac superficie investigemus positionem rectae, quae ad eam est normalis.

- Fig. 4. Consideremus igitur etiam hic sectionem plano AOC.

 Fig. 4. parallelam et per punctum. Z factam, cujus sectionis normalis sit recta ZP; et quia hic y est constans, crit $\partial z = P \partial x$ et subnormalis YP = $\frac{z\partial z}{\partial x} = zP$. Simili modo fiat sectio per Z plano BOC parallela, ita ut jam sit x constans et $\partial z = Q \partial y$, sitque ZQ normalis ad hanc sectionem, critque subnormalis YQ = $\frac{z\partial z}{\partial y} = zQ$.

 Compleatur nunc parallelogrammum rectangulum YPQR, critque recta ZR normalis ad utramque sectionem, ideoque normalis ad ipsam superficiem, sicque crit YP = QR = zP et YQ = PR = zQ. Nunc igitur pro scopo nostro necesse est ut recta: ZR cadat im planum tangens Zpq praecedentis figurae.
- Fig. 3. §. 5.. Transferatur igitur hoc punctum R in praecedentis figurae punctum R', unde ad rectas Yp et Yq ducantur normales R'P' et R'Q', quae cum hic in plagam contrariam cadant, erit R'P' = -zQ et R'Q' = -zP. Quare cum sit $Yp = \frac{z}{p}$, erit $pP' = \frac{z}{p} + zP$, unde similitudo triangulorum pP'R' et pYq dabit hanc proportionem: $\frac{z}{p} + P := Q = \frac{z}{p}$; unde sequitur ista aequa-

litas: 1 + Pp + Qq = 0, quae ergo continet criterium, quod ambae superficies in puncto Z sibi invicem sint normales.

§. 6. Cum autem terni axes assumti sint inter se permutabiles, ut nostrae formulae ad omnes tres aeque pertineant, nil aliud opus est , nisi aut loco P, Q scribatur $\frac{-p}{r}$ et $\frac{-q}{r}$ ncc non $\frac{-p}{R}$ et $\frac{-Q}{R}$. Hoc enim modo aequatio differentialis pro priore superficie, quam secandam vocemus, erit

$$p \partial x + q \partial y + r \partial z = 0,$$

pro altera vero superficie, quam secantem appellemus, orietur haec aequatio: $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$. Et nunc ambae superficies se normaliter secabunt, si fuerit Pp + Qq + Rr = 0. Totum ergo negotium huc redit, ut inquiratur quemadmodum ex data aequatione pro secanda:

$$p \partial x + q \partial y + r \partial z = 0$$

relici oporteat acquationem pro secante:

$$P \partial x + Q \partial y + R \partial z = 0$$
,

ita ut criterium adimpleatur Pp + Qq + Rr = 0.

§. 7. His igitur spectamus aequationem pro secanda $p \partial x + q \partial y + r \partial z = 0$

tanquam datam, neque tamen eam pro lubitu fingere licet, quandoquidem acquationes differentiales inter ternas variabiles x, y, z prorsus non sunt possibiles, nisi in iis certus character locum obtineat, atque iste character in hoc consistit, ut debeat esse:

atque iste character in hoc consistit, ut debeat esse:
$$(\frac{p \partial q - q \partial p}{\partial z}) + (\frac{q \partial r - r \partial q}{\partial x}) + (\frac{r \partial p - p \partial r}{\partial y}) = 0.$$

Hoc enim nisi eveniat, aequatio în se erit absurda, neque quicquam declarat, sed potius contradictionem manifestam involvit.

§. 8. Quando autem iste character locum habet, tum aequatio semper est possibilis, atque adeo multiplicatorem assignare licebit, quo ea integrabilis reddatur. Quin ctiam hoc negotium ab-

solvi poterit, dum primo una variabilium, veluti z, pro eonstante habeatur, ut tantum sit $p\partial x + q\partial y \equiv 0$, quae cum duas tantum variabiles contineat, more solito est tractanda. Ponamus ergo inde reperiri integrale v, ita ut, ob z constantem assumtam, sit integrale completum $v \equiv z$. Eodem modo, spectando y ut constantem, reperietur acquationis $p\partial x + r\partial z \equiv 0$ integrale, quod sit u, ita ut completum statui debeat $u \equiv Y$. Ex utroque ergo integrali colligetur $v - u \equiv Z - Y$; ac si character locum habeat ante datus, semper licebit formulam v - u in duas partes resolvere, quarum altera sit functio tantum ipsius z, altera tantum ipsius y, quo pacto ambaefunctiones Z et Y determinabuntur.

- §. 9. Semper autem aequatio integralis completa praeterea constantem arbitrariam a involvet, cui cum infinitos valores tribuere liceat, nostra aequatio differentialis: $p\partial x + q\partial y + r\partial z \equiv 0$ simul infinitas superficies in se complectetur, quae ergo omnes a superficie secante invenienda aeque ubique ad angulos rectos secabuntur. Quamobrem constantem illam a, quae per integrationem introducitur, appellabimus Parametrum variabilem, quippe cujus variatio innumerabiles praebet superficies secandas.
- §. 10. Quod si ergo vicissim proponantur infinitae superficies secandae, una quadam aequatione inter ternas variabiles x, y z et parametrum variabilem a comprehensae, inde aequationem nostram differentialem formae $p \partial x + q \partial y + r \partial z \equiv 0$ ita elici oportet, ut parameter a in cam non amplius ingrediatur. Quocirca, quaecunque proponatur aequatio finita inter ternas variabiles x, y, z et parametrum varibilem a, ex ea ante omnia valor hujus parametri a exquiri debet, qui ergo aequabitur ecrtae functioni ipsarum x, y, z tantum, eujus demum expressionis differentiale nihilo aequatum dabit nobis aequationem differentialem $p \partial x + q \partial y + r \partial z \equiv 0$; ex qua deinceps aequationem pro superfiebus secantibus deduci conveniet.

- §. 11. Constituta igitur aequatione differentiali pro superficiebus secandis $p\partial x + q\partial y + r\partial z \equiv 0$, in eo erit elaborandum, ut inde aequatio pro superficiebus secantibus $P\partial x + Q\partial y + R\partial z \equiv 0$ eruatur; ubi quidem evidens est, trium litterarum P, Q, R, unam per divisionem tolli posse, deinde vero reliquarum altera ex aequatione canonica: $Pp + Qq + Rr \equiv 0$ est determinanda, ita ut unica tantum quantitas arbitraria in calculo relinquatur, quam autem ita definiri oportet, ut aequatio possibilis evadat, id quod semper infinitis modis praestari potest, quemadmodum ex sequentibus patebit.
- §. 12. Cum autem nulla ratio suadeat, cur trium litterarum P, Q, R, una potius quam reliquae ex aequatione Pp+Qq+Rr=0 determinetur, plurimum juvabit casus particulares perpendere, quibus una harum litterarum nihilo aequalis statuitur. Fiat igitur primo P=0, et cum esse debeat Qq+Rr=0 erit Q:R=r:-q; unde cum ratio tantum in computum veniat, poni poterit Q=r et R=-q ita ut pro secantibus habeatur haec aequatio: $r\partial y-q\partial z=0$ quae si tantum duas variabiles y et z contineat, ita ut tertia x non adsit, integratio nulla laborabit difficultate, et cum integrale novam constantem arbitrariam recipiat, sinul innumerabiles superficies secantes inpetrabuntur.
- §. 13. Eodem modo, si fiat $Q \equiv 0$, debebit csse $Pp + Pr \equiv 0$, ideoque $P \equiv r$ et $R \equiv -p$, ita ut aequatio habeatur $r\partial x q\partial z \equiv 0$, quae si tautum variabiles x et z continuerit, itidem solutionem particularem praeberet. Quod si denique sumatur $R \equiv 0$, fieri debet $R \equiv q$ et $Q \equiv -p$, ita ut aequatio sit $q\partial x p\partial y \equiv 0$, quae saepenumero etiam solutionem praebere potest, prouti aequatio differentialis pro superficiebus secandis fuerit comparata.
- §. 14. His autem casibus quasi principalibus stabilitis, eos utcunque inter se componere licebit. Introducendo scilicet litteras quascunque L, M, N, in genere statui poterit P = M r N q,

 $Q \equiv Np - Lr$ et $R \equiv Lq - Mp$. Hinc enim manifesto erit $Pp + Qq + Rr \equiv 0$; sicque pro superficiebus secantibus habebitur ista acquatio differentialis generalissima:

 $\partial x (Mr - Nq) + \partial y (Np - Lr) + \partial z (Lq - Mp) \equiv 0$ quae, etsi videtur tres quantitates arbitrarias involvere, revera tamen unicam involvere est censenda. Multitudo autem harum litterarum hunc usum potissimum praestat, ut eas ita determinare liceat, ut inde aequatio possibilis eruatur.

- §. 15. Sufficiet autem tantum aequationes particulares obtinuisse, quandoquidem ex duabus talibus solutionibus solutio completa facillime formari poterit. Quod si enim formula integrabilis fuerit inventa, veluti $\partial u \equiv 0$, ita ut $u \equiv b$, ubi b parametrum variabilem designat, ea jam infinitas superficies secantes continet. Ac si praeterea alia talis formula integrabilis innotescat $\partial v \equiv 0$, ita ut $v \equiv c$ etiam solutionem particularem exhibeat, tum utique quaestioni satisfaciet aequatio ex binis composita haec: $f\partial u + g\partial v \equiv 0$. Hinc si pro f accipiatur functio quaecunque ipsius u et pro g functio quaecunque ipsius v, orietur aequatio generalissima quaestioni satisfaciens, scilicet: $\Phi: u \equiv \Phi: v$, sive simplicius statui poterit $v \equiv \Phi: u$, haecque significatio functionis latissime patet, cum non solum omnes functiones legem quandam continuam sequentes, sed etiam omnes adeo functiones discontinuas denotet.
- §. 16. Haec ergo solutio longe aliam habet indolem ac solutio problematis Trajectoriarum orthogonalium, quippe quae tantum infinitas praebet curvas secantes ex variabilitate parametri oriundas, cum in praesentem solutionem adeo ingrediatur functio prorsus indeterminata, quae non solum infinitas superficies, verum adeo infinita genera superficierum complectitur.
- §. 17. Plerumque autem maxime difficile est, hujusmodi casus, quibus aequatio fit possibilis, eruere, ac saepenumero negotium

hoc ingentem sagacitatem postulat; praecipue quando superficies secandae non sunt satis simplices; ubi quidem id imprimis est agendum, ut positio ternorum axium ad statum quaestionis maxime accommodata eligatur. Neque tamen praeceptis negotium confici potest; quamobrem sequentia problemata hic subjungam, ex quibus plura insignia artificia hujusmodi problemata tractandi elucescent. Ibi autem plerumque usus sum: formulis initio inventis, ubi erat r = -4 et R = -4.

Problema L.

§. 18. Si pro superficiebus secandis fuerit $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, quae aequatio est pro infinitis planis inter se parallelis, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solution.

Eum differentiale aequationis propositae sit $\partial z = \alpha \partial x + \beta \partial y$, hoc cum aequatione $\partial z = p \partial x + q \partial y$ comparato, prodit $p = \alpha$, $q = \beta$. Pro superficiebus igitur secantibus, aequatione $\partial z = P \partial z + Q \partial y$ expressis, aequatio canonica $1 + \alpha P' + \beta Q = 0$ praebet $Q = \frac{-1 - \alpha P}{\beta}$, quo valore substituto colligitur $\partial z = P \partial x - (\frac{1 + \alpha P}{\beta}) \partial y$, sive $\partial z + \frac{\partial y}{\beta} = \frac{P}{\beta}$ ($\beta \partial x - \alpha \partial y$). Hinc jam facile concluditur esse debere $\frac{P'}{\beta}$ functionem ipsius $\beta x - \gamma y$, ipsumque integrale etiam hujusmodi functioni aequale fore, ita ut aequatio integralis completa habeatur hace $z + \frac{y}{\beta} = F: (\beta x - \alpha y)$, quae aequatio ergo infinities infinitas superficies complectitur. Si enim tantum esset $z + \frac{y}{\beta} = C (\beta x - \alpha y)$, hace aequatio jam contineret infinitas superficies planas inter se parallelas; unde cum functio quaecunque aeque satisfaciat, manifestum est numerum solutionum infinities essemajorem.

Problema II.

§. 19. Si pro superficiebus secandis fuerit zz = cc - xx - yy, quae aequatio infinitas sphaeras concentricas complectitur, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum hanc aequationem differentiando prodeat $z\partial z = -x\partial x - y\partial y$, sive $\partial z = -\frac{x}{z}\partial x - \frac{y}{z}\partial y$, erit $p = \frac{-x}{z}$ et $q = \frac{-y}{z}$. Si jam pro superficiebus secantibus statuatur $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, ob 1 + Pp + Qq = 0, fieri debet $1 - \frac{Px}{z} - \frac{Qy}{z} = 0$, unde fit $Q = \frac{z - Px}{y}$, quo valore in illa aequatione substituto colligitur haec:

 $\partial z = P \partial x + (\frac{z - Px}{y}) \partial y$, sive $y \partial z - z \partial y = P(y \partial x - x \partial y)$. Unde patet P esse debere functionem fractionis $\frac{x}{y}$ et integrale completum fore $\frac{z}{y} = F : \frac{x}{y}$, sive $z = yF : \frac{x}{y}$. At vero $F : \frac{x}{y}$ continet omnes functiones nullius dimensionis ipsarum x et y; unde z aequabitur functioni cuicunque unius dimensionis ipsarum x et y, quae aequatio exprimit omnes plane conos verticem in ipso centro sphaerarum concentricarum habentes, cujuscunque figurae fuerint bases. Omnes enim rectae ex centro in superficiem talis coni ductae manifesto sunt normales ad superficies sphaericas.

Problema III.

§. 20. Si pro superficiebus secandis fuerit data aequatio $zz = \alpha xx + \beta yy + \gamma$, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum igitur sit $\partial z = \frac{\alpha x}{z} \partial x + \frac{\beta y}{z} \partial y$, habebitur $p = \frac{\alpha x}{z}$ et $q = \frac{\beta y}{z}$; unde si pro superficiebus secantibus statuatur $\partial z = P \partial x + Q \partial y$, fieri debet ex aequatione canonica: $z + \alpha P x + \beta Q y = 0$, unde

fit $Q = \frac{-z - \alpha P x}{\beta y}$, quo substituto colligitur aequatio: $\partial z = P \partial x - (\frac{z + \alpha P x}{\beta y}) \partial y$,

sive $\beta y \partial z + z \partial y = P(\beta y \partial x - \alpha x \partial y)$, quae in hanc transfunditur ex parte sponte integrabilem $\frac{\beta y \partial z + z \partial y}{yz} = \frac{Px}{z} \left(\frac{\beta y \partial x - \alpha x \partial y}{xy}\right)$, unde integrando fit $\beta lz + ly = \int \frac{Px}{z} \partial \cdot (\beta lx - \alpha ly)$, ubi ergo csse debet $\frac{Px}{z} = F: (\beta lx - \alpha ly) = F: \frac{x^{\beta}}{y^{\alpha}}$, ita ut pro superficiebus secantibus habeamus hanc acquationem integratam: $yz^{\beta} = F: \frac{x^{\beta}}{y^{\alpha}}$. Hinc si sumatur $\alpha = -1$ et $\beta = -1$, qui est casus praccedentis problematis, erit $\frac{y}{z} = F: \frac{y}{x}$, sive $z = \frac{y}{F: \frac{y}{x}} = yF: \frac{x}{y}$, quae solutio cum ante data prorsus congruit.

Problema IV.

§. 21. Si pro superficiebus secandis fuerit $z^3 = \alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma_*$ invenire aequationem pro superficiebus secantibus

Solutio.

Differentiatio aequationis propositae praebet $\partial z = \frac{\alpha xx}{zz} \partial x + \frac{\beta yy}{zz} \partial y$, unde fit $p = \frac{\alpha xx}{zz}$ et $q = \frac{\beta yy}{zz}$. Hinc, pro superficiebus secantibus, si fuerit $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, fieri debet $1 + \frac{\alpha Pxx}{zz} + \frac{\beta Qyy}{zz} = 0$, unde colligitur $Q = \frac{-zz - \alpha Pxx}{\beta yy}$, quem valorem substituendo prodit aequatio: $\beta yy\partial z + zz\partial y = P(\beta yy\partial x - \alpha xx\partial y)$, sive $\frac{\beta \partial z}{zz} + \frac{\partial v}{yy} = \frac{Pxx}{zz} (\frac{\beta vv\partial x - \alpha xx\partial y}{xxyy})$, cujus integrale est $\frac{\beta}{z} + \frac{1}{y} = \int \frac{Pxx}{zz} \partial \cdot (\frac{\beta}{x} - \frac{\alpha}{y}) = F: (\frac{\beta}{z} - \frac{\alpha}{y})$.

Problema V.

§. 22. Si pro superficiebus secandis haec habeatur acquatio: $\int Z \partial z = \int X \partial x + \int Y \partial y + a$, existentibus X, Y, Z Mémoires de l'Acad. T.VII.

functionibus ipsarum x, y, z respective et a parametro variabili, invenire aequationem pro superficiebus cantibus:

Solutio.

Ob $Z\partial z = X\partial x + Y\partial y$ erit $p = \frac{x}{z}$ et $q = \frac{Y}{z}$. si pro secantibus superficiebus sit $\partial z = P \partial x + Q \partial y$, esse debet $Z + X \partial x + Q Y = 0$, unde fit $Q = \frac{-z - P X}{Y}$, quo substituto oritur aequatio: $Y \partial z + Z \partial y = P(Y \partial x - X \partial y)$, sive $\frac{\partial z}{Z} + \frac{\partial y}{Y} = \frac{PX}{Z} (\frac{\partial x}{X} - \frac{\partial y}{Y})$,

$$\frac{\partial^2}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{PX}{Z} \left(\frac{\partial x}{X} - \frac{\partial y}{Y} \right),$$

unde integrando fit $\int \frac{\partial z}{y} + \int \frac{\partial y}{y} = F : (\int \frac{\partial x}{y} - \int \frac{\partial y}{y}).$

Problema VI.

§. 23. Si aequatio pro superficiebus secandis fuerit Z = aXY, ubi X functio ipsius x, Y ipsius y, et a parameter variabilis, qui per differentiationem elidi debet, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

· Ad parametrum a elidendum sumatur differentiale logarithmicum, quod erit $\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial X}{X} + \frac{\partial Y}{Y}$. Ponatur $\partial Z = Z/\partial z$, $\partial X = X/\partial x$, $\partial Y = Y' \partial y$, it aut sit $\partial z = \frac{ZX'}{XZ'} \partial x + \frac{ZY'}{YZ'} \partial y$, unde colligitur $\equiv p \frac{ZY'}{YZ'}$ et $q \equiv \frac{Z Y'}{Y Z'}$. Fieri ergo debet $XYZ' + PYZX' + QXZY' \equiv 0$, unde litteram Q eliminando haec prodit aequatio:

 $XZY'\partial z + XYZ'\partial y = P(XY'Z\partial x - YZX'\partial y) = 0,$ quam dividamus per XY'Z', ut habeamus istam:

$$\frac{z \partial z}{Z'} + \frac{Y \partial y}{Y'} = PZ \left(\frac{\partial x}{Z'} - \frac{Y X' \partial y}{X Y' Z'} \right) = \frac{P \Sigma}{Z'} \left(\partial x - \frac{Y X' \partial y}{X Y'} \right),$$
sive
$$\frac{z \partial z}{Z'} + \frac{Y \partial y}{Y'} = \frac{P X' Z}{X Z'} \left(\frac{X \partial x}{X'} - \frac{Y \partial y}{Y'} \right).$$
 Hinc si fuerit
$$\frac{P Z X'}{X Z'} = F : \left(\int \frac{X \partial x}{X'} - \int \frac{Y \partial y}{Y'} \right),$$

erit integrale completum, sive quaesita aequatio pro superficiebus secantibus: $\int \frac{Z \partial z}{Z'} + \int \frac{Y \partial y}{Y'} = F : (\int \frac{X \partial x}{X'} - \int \frac{Y \partial y}{Y'}).$

Scholion.

§. 24. Haec solutio est completa et non solum unum genus superficierum secantium, sed adeo infinita genera continct. Verum saepenumero evenit, ut non infinita genera superficierum secantium, sed tantum unicum genus exhiberi queat. Ita si propositae fuerint infinitae sphaerae planum tabulae in uno puncto tangentes, tum si radius unius cujusvis ponatur $\equiv a$, habebitur haee aequatio: xx + yy + zz = 2az, unde fit $a = \frac{xx + yy + zz}{2z}$. Hine cum differentiando sit $x\partial x + y\partial y + z\partial z = a\partial z$, erit $\partial z = \frac{x\partial x + y\partial y}{a - z}$, sive, ob $a = z = \frac{xx + yy - zz}{2z}$, erit $\partial z = \frac{zz(x\partial x + y\partial y)}{xx + yy - zz}$; unde colligitur $p = \frac{z}{xx + yy - zz}$ et $q = \frac{z}{xx + yy - zz}$. Pro secantibus superficiebus haee satisfacit aequatio: $2b = \frac{xx + yy + zz}{\sqrt{xx + yy}}$, quae differentiata dat $\frac{b(x\partial x + y\partial y)}{\sqrt{xx + yy}} = x\partial x + y\partial y + z\partial z$, unde fit

$$z \partial z = (x \partial x + y \partial y) \left(\frac{b}{\sqrt{xx + yy}} - 1 \right),$$
sive, ob factorem
$$\frac{b}{\sqrt{xx + yy}} - 1 = \frac{(xx + yy - zz)}{z(xx + yy)}, \text{ habebitur}$$

$$\partial z = \frac{-(xx + yy - zz)(x\partial x + y\partial y)}{zz(xx + yy)} = P \partial x + Q \partial y, \text{ ita ut}$$

$$P = \frac{-x(xx + yy - zz)}{zz(xx + yy)} \text{ et } Q = \frac{-y(xx + yy - zz)}{zz(xx + yy)},$$

unde fit, uti requiritur, 1 + Pp + Qq = 0. Si hunc casum, qui infinitas quidem solutiones, sed unicum tantum superficierum secantium genus admittit, per methodum praecedentem expedire vellemus, tum, eliminando litteram Q, ad aequationem prorsus intractabilem perveniremus. Sequentem casum, simili modo tractandum, haud parvo studio elicui.

Theorema.

§. 25. Si pro superficiebus secandis fuerit $a = -z + \sqrt{xx + yy + zz}$, tum pro superficiebus secantibus erit $b = z + \sqrt{xx + yy + zz}$.

Demonstratio.

Pro superficiebus secandis est differentialia sumendo

$$\partial z = \frac{x \partial x + y \partial y + z \partial z}{\sqrt{x x + y y + z z}}, \text{ sive}$$

$$\partial z (\sqrt{x x + y y + z z} - z) = x \partial x + y \partial y, \text{ sive}$$

$$a \partial z = x \partial x + y \partial y, \text{ unde fit}$$

$$p = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{xx + yy + zz - z}} \text{ et } q = \frac{y}{a} = \frac{y}{\sqrt{xx + yy + zz - z}}.$$

Pro superficiebus secantibus fit $\partial z = \frac{-(x\partial x + y\partial y + z\partial z)}{\sqrt{xx + yy + zz}}$, sive $\partial z (\sqrt{xx + yy + zz + z}) = -x\partial x - y\partial y = b\partial z$, hinc $P = \frac{-x}{b} = \frac{-x}{\sqrt{xx + yy + zz + z}}$ et $Q = \frac{-y}{b} = \frac{-y}{\sqrt{xx + yy + zz - z}}$ unde fit $1 + Pp + Qq = \frac{-xx - yy}{xx + yy} + 1 = 0$.

Sequentia problemata methodum indicabunt hujusmodi casus tractandi, quos divinando magis quam via directa resolvimus.

Problema VII.

§. 26. Si pro superficiebus secandis fuerit a $=\frac{2\pi z - xx - yy}{xx - yy}$, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum sit a(xx - yy) = 2zz - xx - yy, erit differentiando $a(x\partial x - y\partial y) = 2z\partial z - x\partial x - y\partial y$,

unde colligitur $\partial z = p\partial z + q\partial y = \frac{(a+1)}{2z} x \partial x - \frac{(a-1)}{2z} y \partial y$, ideoque $p = \frac{x(a+1)}{2z} = \frac{x(zz-yy)}{z(xx-yy)}$ et $q = -\frac{y(a-1)}{2z} = -\frac{y(zz-xx)}{z(xx-yy)}$.

Jam ut fiat 1 + Pp + Qq = 0. statuatur $P = \frac{vz}{xy+vz}$ et $Q = \frac{xz-vy}{xy+vz}$, ubi v est nova quantitas variabilis indeterminata. Hinc pro super-

ficiebus secantibus acquatio $\partial z = P \partial x + Q \partial y$ hanc induet formam;

 $(yz + vx) \partial x + (xz + vy) \partial y + (xy + vz) \partial z = 0,$ cujus integrale, uti facile perspicitur, est

$$xyz + \int v (x \partial x + y \partial y + z \partial z).$$

Hinc si statuatur v functioni cuicunque ipsius xx + yy + zz aequale, erit aequatio pro superficiebus secantibus, quam quaerimus, xyz = F:(xx+yy+zz), vel etiam invertendo xx+yy+zz = F:xyz.

Problema VIII (inversum).

§. 27. Si pro superficiebus secandis fuerit xx+yy+zz=F:xyz, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Ponatur F: xy'z = v, crit $\partial \cdot F: xyz = v' \cdot \partial \cdot xyz$, ideoque $x\partial x + y\partial y + z\partial z = v'(yz\partial x + xz\partial y + xy\partial z)$, sive $\partial x (x - v'yz) + \partial y (y - v'xz) + \partial z (z - v'xy) = 0,$ hine $p = \frac{v'yz-x}{z-v'xy}$ et $q = \frac{v'xz-y}{z-v'xy}$. His inventis acquatio canoniea: 1 + Pp + Qq = 0 ita se habebit:

z - v'xy + Pv'yz - Px + Qv'xz - Qy = 0quae aequatio in has duas discerpatur:

I. z - Px - Qy = 0; II. xy - Pyz - Qxz = 0. Ex priore jam colligitur $Q = \frac{z - Px}{y}$, quo valore in altera substituto reperitur $P = \frac{x(zz - yy)}{z(xx - yy)}$, ideoque $Q = -\frac{y(zz - xx)}{z(xx - yy)}$. Aequatio igitur pro superficiebus secantibus $\partial z = P \partial x + Q \partial y$ nunc erit

$$z\partial z (xx - yy) \equiv x\partial x (zz - yy) - y\partial y(zz - xx),$$

quae ita commodius repraesentari potest:

$$z\partial z (xx - yy) - zz (x\partial x - y\partial y) \equiv xy (x\partial y - y\partial x),$$

cujus aequationis. per $(xx - yy)^2$ divisae, integrale est $\frac{zz}{2(xx - yy)} = \int \frac{xy(x\partial y - y\partial x)}{(xx - yy)^2}.$

$$\frac{zz}{2(xx-yy)} = \int \frac{xy(x\partial y - y\partial x)}{(xx-yy)^2}.$$

Ad hanc posteriorem formam integrandam ponatur y = tx, eritque

$$\int \frac{xy(x\partial y - y\partial x)}{(xx - yy)^2} - \int \frac{t\partial t}{(1 - tt)^2} - \frac{1}{2(1 - tt)} - \frac{xx}{2(xx - yy)}.$$

Constante igitur rite introducta pro superficiebus secantibus hanc nacti sumus aequationem:

$$\frac{zz}{z(xx-yy)} = A + \frac{xx}{z(xx-yy)}, \text{ sive } A = \frac{zz-xx}{z(xx-yy)},$$
quae ab aequatione in praecedente problemate pro superficiebus secandis proposita: $a = \frac{zzz-xx-yy}{xx-yy}$, tantum quantitate constante differt. Si enim ponatur $A = \frac{a-1}{2}$, erit itidem $a = \frac{2zz-xx-yy}{xx-yy}$.

Problema IX.

§. 28. Si pro superficiebus secandis fuerit az = xx + yy + nzz, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Differentiando prodit $\partial z = \frac{2x \partial x + 2y \partial y}{a - 2nz} = \frac{2z (x \partial x + y \partial y)}{xx + yy - nzz}$, unde fit $p = \frac{2xz}{xx + yy - nzz}$ et $q = \frac{2yz}{xx + yy - nzz}$. Jam ut fiat 1 + Pp + Qq = 0, statuatur $P = \frac{x(xx + yy - nzz) + Sy}{2z(xx + yy)}$ et $Q = \frac{y(xx + yy - nzz) + Sy}{2z(xx + yy)}$; unde pro superficiebus secantibus oritur haec aequatio:

$$2z\partial z (xx+yy) - nzz (x\partial x + y\partial y) + (xx+yy) (x\partial x + y\partial y)
= S (y\partial x - x\partial y),$$

quae divisa per $(xx + yy)^{\frac{1}{2}n+1}$ fit integrabilis; integrale enim, seu aequatio quaesita, ita se habebit:

$$(2-n)zz + xx + yy = (xx + yy)^{\frac{1}{2}n} F: \frac{y}{x}.$$

Theorema.

§. 29. Eodem modo, si generalius pro superficiebus secandis fuerit $az^{\lambda} = xx + yy + nzz$, tum pro superficiebus secantibus haec erit aequatio:

$$(2 + \frac{\lambda - 2}{\lambda} n) zz + xx + yy = (xx + yy)^{\frac{2 - \lambda}{2 \lambda}} n F : \frac{y}{x}.$$

Demonstratio per praecedentia est manifesta, unde superfluum foret eam heic adjicere.

Problema X.

§. 30. Si pro superficiebus secandis fuerit $az^{\lambda} = \frac{yy + xx}{yy - xx}$, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Hic pro aequatione $\partial z = p\partial x + q\partial y$ fit $p = \frac{4xyyz}{\lambda(y+-x+)}$ et $q = \frac{-4xxyz}{\lambda(y+-x+)}$. Nam $\lambda a z^{\lambda-1} \partial z = \frac{4xy(y\partial x - x\partial y)}{(yy-xx)^2}$, ergo $\lambda a z^{\lambda} \partial z = \frac{4xyz(y\partial x - x\partial y)}{(yy-xx)^2}$.

At $az^{\lambda} = \frac{yy + xx}{yy - xx}$, ideoque $\partial z = \frac{4xyz(y\partial x - x\partial y)}{\lambda(y^{+} - x^{+})}$. Jam, quo aequationi 1 + Pp + Qq = 0 satisfiat, sumatur $P = \frac{\lambda(yy + xx)y + \lambda Sx}{-4xyz}$ et $Q = \frac{\lambda(yy + xx)x + \lambda Sy}{-4xyz}$, unde aequatio $\partial z = P\partial x + Q\partial y$) fit

 $4xyz\partial z + \lambda(yy + xx)(y\partial x + x\partial y) + \lambda S(x\partial x + y\partial y) = 0$, qua per xy divisa et integrata erit

 $2zz + \lambda (yy + xx) lxy = 2\lambda f(y\partial y + x\partial x) lxy - \lambda fS(x\partial x + y\partial y)$. Statuatur S = 2lxy - T, et acquatio illa fiet

 $2zz + \lambda (yy + xx) lxy = \lambda / T(x\partial x + y\partial y) = \lambda F : (xx + yy),$ quae acquatio pro superficiebus secantibus conveniet acquationi pro superficiebus secandis : $az^{\lambda} = \frac{yy + xx}{yy - xx}$.

Problema XI.

§. 31. Si pro superficiebus secandis fuerit quantitas az functioni homogeneae u dimensionum ipsarum x et y aequalis, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solution

Posito y = tx functio illa homogenea induet hanc formam: $x^n \cap$, ubi \cap est functio data ipsius t, sicque crit $az = x^n \cap$, hincque $la + lz = nlx + l \cap$, unde sit

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{n \partial x}{x} + \frac{\partial \Theta}{\Theta} = \frac{n \partial x}{x} + \frac{\Theta'}{\Theta} \partial t,$$

posito $\partial \Theta = \Theta / \partial t$. Jam sit $\frac{\Theta'}{\Theta} = \Pi$, ita ut etiam Π sit function data ipsius t, et cum sit $t = \frac{y}{x}$, ideoque $\partial t = \frac{x \partial y - y \partial x}{xx}$, erit $\frac{\partial z}{z} = \frac{n \partial x}{x} + \frac{\Pi(x \partial y - y \partial x)}{xx}$, unde ob $\partial z = p \partial x + q \partial y$ fit $p = \frac{nz}{x} = \frac{\Pi yz}{xx}$ et $q = \frac{\Pi xz}{xx}$. Quo igitur aequationi canonicae 1 + Pp + Qq = 0 satisfiat, qua fieri debet $\frac{xx}{z} + P(nx - \Gamma y) + \Pi xQ = 0$, statuantur litterae $P = \frac{S\Pi x}{\Pi z}$ et $Q = \frac{-x}{\Pi z} + \frac{S(\Pi y - nx)}{\Pi z}$, quibus valoribus aequationi illi satisfit.

Nunc pro superficiebus secantibus aequatio $\partial z = P\partial x + Q\partial y$ evadet $\Pi z\partial z = S\Pi x\partial x + S\partial y \ (\Pi y - nx) - x\partial y$. Hinc eliminetur variabilis $x = \frac{y}{t}$, et ob $\partial x = \frac{t\partial y - y\partial t}{tt}$ aequatio illa, per Π divisa, hanc habebit formam:

$$z\partial z = Sy\partial y \left(\frac{1+tt}{tt}\right) - \frac{y\partial y}{\Pi t} \left(nS + 1\right) - \frac{Syy\partial t}{t3}.$$

Jam fiat S = R + T, ubi R sit functio indefinita, T autem ita definiatur ut integratio succedat. Hoc facto erit

$$z\partial z = R(y\partial y \frac{(1+tt)}{tt} - \frac{ny\partial y}{\Pi t} - \frac{yy\partial t}{t3}) + Ty\partial y \frac{(1+tt)}{tt} - \frac{n}{\Pi t} - \frac{yy\nabla t}{t3} - \frac{y\partial y}{\Pi t},$$
 cujus aequationis integrale sequenti modo eruitur: Incipianus a formula per R multiplicata, quae, separatis variabilibus y et t , ad hanc formam reducitur: $R'(\frac{\partial y}{y} - \frac{\Pi \partial t}{\Pi t} \frac{1}{(1+tt)-ntt})$. Ponatur $\frac{\Pi \partial t}{\Pi t} \frac{1}{(1+tt)-ntt} = \frac{\partial v}{v}$, ita ut v sit functio cognita ipsius t , et membrum illud erit $R'(\frac{\partial y}{y} - \frac{\partial v}{v})$, cujus integrale fit $F: \frac{y}{v}$. Ut vero altera pars nostrae aequationis reddatur integrabilis, ponatur $\frac{1+tt}{t} - \frac{n}{\Pi t} = M$ et $\frac{1}{\Pi t} = N$, eritque ista pars $y\partial y (MT - N) - \frac{yy\nabla t}{t^3}$, cujus integrale statuamus esse $\frac{1}{2}yy (MT - N)$, ita ut $\partial \cdot (MT - N) = -\frac{2T\partial t}{t^3}$. Est vero $\partial \cdot (MT - N) = M\partial T + T\partial M - \partial N$, unde colligitur $\partial T + \frac{T\partial M}{M} + \frac{2T\partial t}{Mt^3} - \frac{\partial N}{M}$. Cum vero posucrimus

$$\frac{\Pi \partial t}{\Pi t (1+tt)-ntt} = \frac{\partial t}{(\frac{1+tt}{t}-\frac{n}{\Pi t})t^3} = \frac{\partial t}{M t^3} = \frac{\partial v}{v}$$

habebinus $\partial T + T \left(\frac{\partial M}{M} + \frac{2\partial v}{v} \right) = \frac{\partial N}{M}$, quae acquatio, ducta in Mvv, integrabilis redditur; integrale ejus enim erit $MvvT = \int vv\partial N$, unde fit $T = \frac{\int vv\partial N}{Mvv}$. His igitur valoribus collectis aequatio pro superficiebus secantibus erit $zz = 2F: \frac{y}{v} + yy (MT - N)$. Est vero $MT - N = \frac{\int vv\partial N - vvN}{vv} = -\frac{2\int Nv\partial v}{vv}$, ita ut $zz = 2F: \frac{y}{v} - \frac{2\int Nv\partial v}{vv}$.

Corollarium.

 \S . 32. Si formulae $x^n\Theta$ aequalis fuerit formula az^λ , solutio non fit difficilior, atque pro hoc casu multo generaliori pro superficiebus secantibus haec habebitur aequatio: $\frac{zz}{z\lambda} = F : \frac{y}{v} - \frac{\int Nv \, \partial v}{v \, v}$. Quin etiam, si loco z proposita fuerit functio quaecunque ipsius z, quae sit Z, ita ut pro superficiebus secandis hanc habeamus aequationem: $Z = x^n\Theta$; tum pro superficiebus secantibus prodibit ista aequatio: $\int \frac{Z\partial z}{Z'} = F : \frac{y}{v} - \frac{z \int Nv \, \partial v}{v \, v}$, quemadmodum per calculum praecedenti similem perspicere licet.

Problema XII.

§. 33. Si pro superficiebus secandis fuerit a + z functio homogenea unius dimensionis ipsarum x et y, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Posito y = tx sit $a + z = \Theta x$, existente Θ functioni ipsius t. Hinc ergo crit $\partial z = \Theta \partial x + x \partial \Theta$, sive posito $\partial \Theta = \Theta' \partial t = \Theta' \partial \cdot \frac{y}{x}$. erit $\partial z = \Theta \partial x + \frac{\Theta'(x \partial y - y \partial x)}{x}$, unde colligitur $p = \Theta - \Theta' t$ et $q = \Theta'$, ita ut aequatio, quam canonicam supra vocavimus,

1 + Pp + Qq = 0 sit $1 + P(\Theta - \Theta't) + Q\Theta' = 0$. Quo jam huic aequationi satisfiat ponatur $P = S\Theta'$ et $Q = -\frac{\tau}{\Theta'} + S(\Theta't + \Theta)$, eritque pro superficiebus secantibus haec aequatio:

$$\partial z = -\frac{\partial y}{\Theta'} + S(\Theta' \partial x + (\Theta' t - \Theta) \partial y).$$

Nunc eliminetur variabilis x ope aequationis $\partial x = \frac{t\partial y - y\partial t}{tt}$, fietque

$$\partial z = -\frac{\partial y}{\Theta'} + \frac{s}{tt} \left(\Theta' t \partial y \left(1 + tt \right) - \Theta' y \partial t - \Theta t t \partial y \right),$$

quae aequatio, posito brevitatis gratia $\Theta'(1+tt)-\Theta t = A\Theta'$, erit

$$\partial z = -\frac{\partial y}{\Theta'} + \frac{s\Theta'}{tt} (\Lambda t \partial y - y \partial t) = -\frac{\partial y}{\Theta'} + s' (\Lambda t \partial y - y \partial t).$$

Fiat nunc S' = R + T, erit aequatio nostra

$$\partial z = R (\Lambda t \partial y - y \partial t) + T (\Lambda t \partial y - y \partial t) - \frac{\partial y}{\partial t}$$

sive, posito $\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial v}{v}$, ea hanc induct formam concinniorem:

$$\partial z = R \left(\frac{\partial y}{y} - \frac{\partial v}{v} \right) + T \left(A t \partial y - y \partial t \right) - \frac{\partial y}{\Theta'},$$

unde integrando colligitur pro superficiebus sceantibus

$$z = F : \frac{y}{v} + \int \partial y (AtT - N) - \int Ty \partial t$$
,

existente $N = \frac{1}{6'}$.

Problema XIII.

§. 34. Si pro superficiebus secandis fuerit $a + z = x^n \Theta$, existente Θ functione quacunque ipsius $t = \frac{y}{x}$, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Hic igitur erit differentiando $\partial z = nx^{n-1} \Theta \partial x + x^n \partial \Theta$, sive, posito $\partial \Theta = \Theta' \partial t = \Theta' \partial \cdot \frac{y}{x}$, habebimus

$$\partial z = nx^{n-1} \Theta \partial x + x^{n-1} \Theta' (\partial y - t \partial x),$$

unde colligitur $p = x^{n-1}$ (n - t - t - t) et $q = x^{n-1} - t$. Ponatur $\frac{\Theta}{\Theta'} = \Pi$, et cum esse debeat $\frac{1}{\Theta'} + Px^{n-1}(n\Pi - t) + x^{n-1}Q = 0$, huic aequationi satisfacient sequentes valores pro P et Q:

$$P = \frac{s}{x^{n-1}\Theta'} \text{ et } Q = \frac{-s(n\Pi - t) - t}{x^{n-1}\Theta'},$$

unde pro superficiebus secantibus haec prodit aequatio :

$$\partial z = \frac{\mathbb{E}(\partial x - (n\Pi - t)\partial y) - \partial y}{x^{n-1}\Theta'}, \text{ sive ob } y = tx \text{ erit}$$

$$\partial z = \frac{\mathbb{E}(\partial x + (t - n\Pi)(t\partial x + x\partial t) - \partial y}{x^{n-1}\Theta'}, \text{ sive}$$

$$\partial z = \frac{\mathbb{E}(\partial x (t + t(t - n\Pi) + x\partial t(t - n\Pi) - \partial y)}{x^{n-1}\Theta'}.$$

Quod si jam statuatur S = R + T, tum vero ponatur brevitatis gratia $\frac{\partial f(t-n\Pi)}{1+f(t-n\Pi)} = \frac{\partial v}{v}$, habebimus integrale z = F : vx+V, existente differentiali membri secundi

$$\partial V = \frac{\partial x}{x^{n-1}} \left(\frac{T(t+t(t-n\Pi))}{\Theta'} - \frac{t}{\Theta'} \right) + \frac{\partial t}{x^{n-2}} \left(\frac{T(t-n\Pi)}{\Theta'} - \frac{t}{\Theta'} \right).$$

Statuatur $\frac{1+t(t-n\pi)}{\Theta'}$ $\underline{\quad}$ M et $\frac{t}{\Theta'}$ $\underline{\quad}$ N, erit $\partial V = \frac{\partial x}{x^n-1}$ (TM $\underline{\quad}$ N), cujus integrale si ponatur $V = \frac{x^2-n}{z-n}$ (TM $\underline{\quad}$ N), necesse est ut fiat

$$\tfrac{\partial t}{x^{n-2}}\,(\tfrac{\mathsf{T}(t-n\,\Pi)}{\Theta'}-\tfrac{1}{\Theta'})=\tfrac{x^{2}-n}{2-n}\,\partial\cdot(\mathsf{T}\,\mathsf{M}\,-\mathsf{N})\;,$$

sive
$$\partial \cdot (TM - N) = (2 - n) \left(\frac{T(t - n\Pi)\partial t}{\Theta'} - \frac{\partial t}{\Theta'} \right)$$
. Est vero $\partial t \frac{(t - n\Pi)}{\Theta'} = \frac{M(t - n\Pi)\partial t}{1 + t(t - n\Pi)} = M \frac{\partial v}{v}$,

quo substituto crit

$$M \partial T + T \partial M - \partial N = (2 = n) (M T \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial t}{\Theta'}),$$

quae aequatio per v^{n-2} multiplicata et integrata prachet

$$T M v^{n-2} = \int v^{n-2} \partial N - (n-2) \int \frac{v^{n-2} \partial t}{\Theta'}.$$

Scholion.

§. 35. Simili plane modo problema adhuc generalius tractari potest, quo pro superficiebus secandis statuitur $a + Z = x_n \Theta$, existente Z functione quacunque ipsius z; tum enim pro superficiebus secantibus, hanc habebimus aequationem: $\int \frac{\partial z}{Z'} = F : xv - (xv)^{2^n} - n \int \frac{v^{n-3} \partial t}{\Theta'(t-n\Pi)}$; existente $t = \frac{y}{x}$, $\Pi = \frac{\Theta}{\Theta'}$ et $\frac{\partial v}{v} = \frac{\partial t}{1+t(t-n\Pi)}$.

Problema XIV.

§. 36. Si pro superficiebus secandis detur aequatio: $a \times y + b \times z + c y z \equiv 0$, invenirc aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum hinc differentiando prodeat sequens acquatio:

 $ax\partial y + ay\partial x + bx\partial z + bz\partial x + cy\partial z + cz\partial y = 0$, pro aequatione $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$ erit p = ay + bz, q = ax + cz, r = bx + cy. Hinc si pro secantibus statuatur aequatio $P\partial x + Q\partial y R\partial z = 0$, fieri debet Pp + Qq + Rr = 0, cui infinitis modis satisfieri potest, una litterarum P, Q, R, evanescente accepta. Casus simpliciores sunt:

$$\begin{array}{c|cccc}
P = & ax + cz & P = & bx + cy & P = 0 \\
Q = & -ay - bz & Q = 0 & Q = & bx + cy \\
R = & 0 & R = & -ay - bz & R = & -ax - cz.
\end{array}$$

At vero pro P, Q, R valores assumti tales esse debent, ut aequation $P\partial x + Q\partial y + R\partial z$ fiat possibilis, hoc est ut fiat:

$$(\frac{P\partial Q - Q\partial P}{\partial z}) + (\frac{Q\partial R - R\partial Q}{\partial x}) + (\frac{R\partial P - P\partial R}{\partial y}) = 0,$$

quem in finem pro his tribus litteris P, Q, R omnes valores possibiles indagari debent, qui ex tribus principalibus componuntur. Primum igitur casum per s, secundum per t, tertium per u multiplicemus et productum in unam summam colligamus, quo facto oriuntur valores:

$$P = (as + bt)x + cty + csz;$$

$$Q = bux + (cu - as) y - bsz;$$

$$R = -aux - aty - (bt + cu) z;$$

Hinc jam pro litteris s, t, u, tales investigari debent valores, ut criterio possibilitatis satisfiat. Inde autem deducimus sequentes valores:

$$\frac{(P\partial Q - Q\partial P)}{\partial z} = -bs (as + bt + cu) x - cs (cu - as + bt) y$$

$$\frac{(Q\partial R - R\partial Q)}{\partial x} = -au(cu - as - bt) y + bu (bt + cu + as) z$$

$$\frac{(R\partial P - P\partial R)}{\partial y} = at (as + bt - cu) x - ct (bt + cu - as) z$$

in quibus singuli coordinatarum coëfficientes seorsim ad nihilum redigi debent, unde deducuntur sequentes aequationes:

$$cu (bs + at) + ab (ss - tt) - st (bb - aa) \equiv 0$$

 $bt (au - cs) + ac (ss - uu) + us (aa - cc) \equiv 0$
 $as (ct + bu) + bc (uu - tt) + tu (bb - cc) \equiv 0$

ex quibus, eliminatis quadratis ss, tt, uu, quod fit primam in c, secundam in — b, tertiam in — a ducendo, oritur nova: summa enim suppeditat:

 $bsu\ (cc-aa) + atu\ (cc-bb) + cst\ (bb-aa) \equiv 0$. Sin autem eliminentur quadrata aa, bb, cc, prodit acquatio identica 0 = 0; unde concludendum est, trium illarum acquationum unam in binis reliquis jam contineri, ita ut sufficiat binis satisfecisse.

In genere autem hanc quaestionem resolvere non licet. At vero talibus valoridus pro P, Q, R, inventis integratio acquationis $P \partial x + Q \partial y + R \partial z = 0$,

nulla amplius laborat difficultate. Quin adeo, quia litterarum s, t, te una manet indeterminata, infinita integralia exhiberi possunt, quae autem omnia sunt particularia. At vero ex duobus hujusmodi integralibus aequatio generalis pro superficiebus secantibus formabitur, dum unum statuitur functioni cuicunque alterius aequale.

Corollarium.

§. 37. Casu quo ternae litterae a, b, c, sunt inter se aequales, solutio satis commode expediri potest. Tres enim illae aequationes hoc casu in sequentes abcunt:

$$u(s+t)+ss-tt = (s+t)(u+s-t) = 0$$

 $t(u-s)+ss-uu = (u-s)(t-s-u) = 0$
 $s(t+u)+uu-tt = (t+u)(s+u-t) = 0$

quibus omnibus satisfit sumendo t = s + u. Hoc igitur casu habebimus:

$$P = (2 s + u) x + (s + u) y + s z,
Q = u x + (u - s) y - s z,
R = -u x - (s + u) y - (s + 2 u) z.$$

Tum autem, posito brevitatis gratia 2s + u = 3f, u - s = 3g; -(s + 2u) = 3h, integrale aequationis $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$ reperitur fore: $(x + y + z) (fx + gy + hz)^2 = C$, sive etiam:

 $(x + y + z) ((2 s + u) x + (u - s) y - (s + 2u) z)^2 = \Delta$. Hinc si sumatur u = 0 habebimus hanc acquation em:

$$\Delta = (x + y + z) (2x - y - z)^{2}.$$

At sum to u = s erit $\Delta = (x + y + z)(x - z)^2$. Ille jam valor, functioni hujus aequatus, praebet aequationem generalissimam pro superficiebus secantibus.

Scholion.

§. 38. Quemadmodum autem postremum integrale investigari debeat hic ostendamus. Spectetur variabilis z tanquam constans et integretur aequatio $P \partial x + Q \partial y = 0$, quae ut ad homogeneitatem reducatur, statuatur: $x = X + \frac{uz}{s}$ et $y = Y - \frac{(s+u)z}{s}$; tum enim prodit

 $(2s + u) X \partial X + (s + u) Y \partial X + u X \partial Y + (u - s) Y \partial Y = 0.$ Unde si hic loco ∂X et $\partial^{g} Y$ scribatur X et Y formabitur denominator integrationem producens, qui crit

(2s + u) XX + (s - 2u) YX + (u - s) YY qui resolvitur in hos factores:

$$(X + Y) ((2s + u)X - (s - u)Y);$$

factaque solita resolutione reperitur integrale aequationis, scil.:

$$C = (X + Y) ((2s + u) X - (s - u) Y)^2);$$

tum vero reperitur X + Y = x + y + z, hineque denique resultat haec aequatio finita pro superficiebus secantibus:

$$(2s + u) X + (u - s) Y = (2s + u) x + (s - u) y - (s + 2u) z$$

Problema XV.

§. 39. Si pro superficiebus secandis detur aequatio $A = \frac{zz + axx + byy}{z^n}$, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum differentiando prodeat haec aequatio:

 $2axz\partial x + 2byz\partial y + (2-n)zz\partial z - n (axx + byy) \partial z = 0$, posito 2-n=2cn, ita ut $c=\frac{z-n}{z^n}$, habebimus p=2axz, q=2byz, r=n(2czz-axx-byy). Jam pro secantibus superficiebus statuatur aequatio $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$, fierique debet Pp + Qq + Rr = 0, cui aequationi satisfiet sequentibus valoribus pro P, Q, R assumtis: $P=\frac{x}{z^2}-\frac{cz}{ax}+Sby$; $Q=\frac{y}{zz}-Sax$; $R=\frac{1}{n}$, quibus in aequatione $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$ substitutis termini littera S affecti statim dant $Sby\partial x - Sax\partial y = 0$, unde fit $\frac{b\partial x}{x} = \frac{a\partial y}{y}$, hineque blx = aly, seu $\frac{x^b}{y^a} = \text{Const.}$ At vero generaliter habebimus hanc aequationem differentialem:

$$\frac{x\partial x}{2z} + \frac{y\partial y}{2z} - \frac{cz\partial x}{ax} + \frac{\partial z}{n} + S(by\partial x - ax\partial y) = 0,$$

sive hanc:

$$x\partial x + y\partial y + T$$
 $(by\partial x - ax\partial y) = \frac{zczz\partial x}{az} - \frac{zz\partial z}{\pi}$ existente $T = 2$ S z, quae quantitas ita definiri debet, ut aequatio reddatur divisibilis. Hune in finem dispiciendum est qualis functio ipsarum x et y pro T assumi queat, ut integratio succedat. Dividatur aequatio per x^m , positoque $\frac{zcn}{a} = m$, aequatio differentialis hoe modo prodibit expressa:

$$\frac{mzz\partial x}{nx^m+i} - \frac{zz\partial z}{nx^m} = \frac{x\partial x + y\partial y + T(by\partial x - ux\partial y)}{x^m} = \partial V$$

cujus integrale est: $V = -\frac{z \cdot z \cdot x - m}{n}$. Quo autem quantitas V determinetur, statuatur $T = \frac{\lambda y}{x}$, eritque

$$\partial V = \frac{\partial x}{x^{m-1}} + \frac{(1-\lambda a)y\partial y}{x^m} + \frac{\lambda byy\partial x}{x^m+1},$$

$$\partial V = \frac{\partial x}{x^m - 1} - \frac{2b \gamma \partial y}{(ma - 2b) x^m} - \frac{mb \gamma \gamma \partial x}{(ma - 2b) x^m + 1},$$

ande, sumto $\lambda = \frac{m}{m \, a - 2 \, b}$, ita ut $1 - \lambda \, a = \frac{-2 \, b}{m \, a - 2 \, b}$. colligitur $\partial V = \frac{\partial x}{x^m - 1} - \frac{2 \, b \, v \, \partial y}{(m \, a - 2 \, b) \, x^m} - \frac{m \, b \, y \, v \, \partial x}{(m \, a - 2 \, b) \, x^m + 1}$; cujus integrale est $V = \frac{x^2 - m}{2 - m} - \frac{b \, y \, y}{(m \, a - 2 \, b) \, x^m}$, ita ut denique habeamus $+ \frac{z \, z \, x - m}{n} + \frac{x^2 - m}{2 - m} - \frac{b \, y \, y}{(m \, a - 2 \, b) \, x^m} = \text{Const.}$

quae aequatio si in x^m ducatur et loco constantis scribatur $F: \frac{x^b}{\sqrt{a}}$. quam supra revera constantem esse invenimus,

$$\frac{zz}{n} + \frac{xx}{2-m} + \frac{byy}{2b-ma} = x^m F : \frac{x^{\frac{b}{2}}}{y^{\frac{a}{2}}}.$$

Problema XVI.

§. 40. Si superficies secandae fuerint omnes plana tangentia superficiem coni recti, invenire omnes superficies eas normaliter secantes.

Solutio.

Concipiatur per verticem coni planum axi normale, ad quod referentur ternae coordinatae x, y, z, crit aequatio pro omuibus istis planis $z \equiv n x \cos \alpha + n y \sin \alpha$, ubi α vicem gerit parametri variabilis, unde angulus a satis perplexe definiretur; quamobrem non parametrum istum α , sed potius quantitatem z ex calculo eliminare necesse est, quem in finem etiam variabilitas ipsius a in ealculum est introducenda. Differentiando igitur erit:

 $\partial z = n\partial x \cos \alpha + n\partial y \sin \alpha + n\partial \alpha (y \cos \alpha - x \sin \alpha);$ unde si pro superficiebus secantibus statuatur ut supra $\partial z = P \partial x + Q \partial y$, fieri debet $1 + n P \cos \alpha + n Q \sin \alpha = 0$. Statuatur igitur $P = -\frac{1}{n}\cos \alpha - A\sin \alpha$; $Q = -\frac{1}{n}\sin \alpha + A\cos \alpha$, existente A

functione quacunque ipsius α . His jam valoribus pro P et Q substitutis prodit haec aequatio:

 $\partial z = -\frac{\partial x \cos a}{n} - \frac{\partial y \sin \alpha}{n} + A (\partial y \cos \alpha - \partial x \sin \alpha),$

quae si a priore subtrahatur, posito $n + \frac{1}{n} = m$, relinquit

$$0 = \partial x (m \cos \alpha + A \sin \alpha) + \partial y (m \sin \alpha - A \cos \alpha) + n \partial \alpha (y \cos \alpha - x \sin \alpha),$$

quam aequationem integrabilem fieri ponamus per multiplicatorem M, cjusque integrale habere formam:

 $\mathrm{M}x\ (m\cos\alpha+\mathrm{A}\sin\alpha)+\mathrm{M}y\ (m\sin\alpha-\mathrm{A}\cos\alpha)\equiv\Delta$; cujus igitur differentiale, aequationi modo erutae aequatum, dat

$$\begin{cases}
Mx\partial & (\Lambda\cos x - m\sin x) + My\partial x (m\cos x + A\sin x) \\
+x\partial M(m\cos x + A\sin x) + y\partial M (m\sin x - A\cos x) \\
+Mx\partial A\sin x - My\partial A\cos x \\
-nM\partial x (y\cos x - x\sin x)
\end{cases} = 0$$

ubi si membra per x et per y affecta seorsim ad nihilum redigantur, prodibit duplex aequatio, scilicet:

 $0 \equiv \frac{\partial M}{M} (m\cos \alpha + A\sin \alpha) + \partial \alpha (A\cos \alpha - m\sin \alpha) + n\partial \sin \alpha + \partial A\sin \alpha;$ $0 \equiv \frac{\partial M}{M} (m\sin \alpha - A\cos \alpha) + \partial \alpha (m\cos \alpha + A\sin \alpha) - n\partial \alpha\cos \alpha + \partial A\cos \alpha.$ Si jam harum acquationum prior in cos., altera in sin. a ducatur, carum summa dabit $m\frac{\partial M}{\partial I} + A\partial \alpha \equiv 0$, unde colligitur $\frac{\partial M}{M} = -\frac{A\partial \alpha}{m}$.

At vero si ex binis illis acquationibus quaerantur valores ipsius $\frac{\partial M}{M}$ et inter se rite acquentur, resultabit hace acquatio concinna:

$$\partial \iota (mm + \Lambda\Lambda - mn) - m\partial\Lambda \equiv 0$$
,

sive, ob $m-n\equiv \frac{1}{1}$. erit $\partial\alpha(\frac{m}{n}+\Lambda\Lambda)\equiv m\,\partial\Lambda$, unde colligitur $\partial\alpha=\frac{m\,n\,\partial\Lambda}{m+n\,\Lambda\Lambda}$, cujus integrale est $\alpha\equiv\sqrt{mn}$. Arc. tag. $\frac{\Lambda\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$, hincque deducitur $\Lambda\equiv\sqrt{\frac{m}{n}}$. tag. $\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$, quo substituto erit

$$\frac{\partial M}{M} = -\frac{1}{\sqrt{mn}} \partial \alpha \text{ tag.} \frac{\alpha}{\sqrt{mn}},$$

atque integrando prodit $lM \equiv l\cos \frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$, et in numeris: $M \equiv \cos \frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$.

Hoc igitur valore pro multiplicatore M in aequationem nostram introducto habebimus pro superficiebus secantibus:

$$\Delta = m\cos \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x\cos \alpha + y\sin \alpha) + \sqrt{\frac{m}{n}} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x\sin \alpha - y\cos \alpha).$$

Hoc igitur modo nacti sumus acquationem finitam inter x, y, α ; unde si ope aequationis $z \equiv n x \cos \alpha + n y \sin \alpha$ angulum α eliminare vellemus, prodiret quidem aequatio inter x, y, z; at vero aequatio inventa sufficit ad superficies construendas. Pro quovis enim valore A, qui est parameter variabilis superficierum secantium, sumtis pro lubitu binis α et x, reperitur valor ipsius y, ac praeterea valor ipsius z, quae operatio si per omnes valores ipsius infinitae reperientur curvae, quae conjunctae superficiem secantem, formabunt. Unde patet, omnes valores ipsius \(\Delta \) infinitas suppeditare superficies secantes, quae tamen solutio unam tantum speciem continet, at vero generalius hoc modo eruetur. Cum omnes superficies secandae transeant per verticem coni, omnes sphaerae ex hoc centro descriptae omnes istas superficies normaliter secabunt, quarum aequatio cum sit x x + y y + z z = const. in aequatione supra inventa loco \triangle scribi poterit functio quaecunque ipsius xx + yy + zz, ita ut aequatio generalis pro superficiebus secantibus sit:

$$F: (xx + yy + zz) = m \cos \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sqrt{\frac{m}{n}} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \sin \alpha - y \cos \alpha).$$

Problema XVII.

§. 41. Data pro superficiebus secandis hac aequatione: $zz + 2 \times y = A$, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum hic sit differentiando $z \partial z + x \partial y + y \partial x \equiv 0$, erit $p \equiv y$, $q \equiv x$, $r \equiv z$, fierique debet $y P + x Q + z R \equiv 0$, cui aequationi sequentibus tribus modis satisfieri potest:

I.
$$P \equiv x$$
, $Q \equiv y$, $R \equiv 0$.

II.
$$P \equiv 0$$
, $Q \equiv z$, $R \equiv -x$

III.
$$P = z$$
, $Q = 0$, $R = -y$.

Casus primus dat pro superficiebus secantibus aequationem $x\partial x - y\partial x \equiv 0$, unde fit $x \propto -y y \equiv \mathbb{C}$. Tum vero combinando secundum casum in Π duetum cum tertio prodit $P \equiv z$, $Q \equiv \Pi z$, $R \equiv -\Pi x - y$, unde oritur aequatio: $z\partial x + \Pi z\partial y - (\mathbb{C}x + y)\partial z \equiv 0$, ex qua fit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial x + \Pi \partial y}{\Pi x + y}$. Jam sumto $\Pi \equiv 1$ statim fit integrando $lz \equiv l\alpha + l(x + y)$, unde $z \equiv \alpha (x + y)$. Hinc natum est sequens Problema novae indolis.

Problema XVIII.

§. 42. Proposita formula differentiali hac: $\frac{\partial x + \Pi \partial y}{\Pi x + y}$, invenire functionés ipsarum x et y, quas loco Π assumi oportet, ut formula fiat possibilis.

Solutio.

Primo ex praecedente problemate liquet, posito $\partial v = \frac{\partial x + \Pi \partial y}{\Pi x + y}$ sumi posse $\Pi \equiv 1$, ut fiat $v \equiv l(x + y)$. Secundo aeque patet, sumto $\Pi \equiv -1$ fore $v \equiv -l(x + y)$. Tertio si sumatur $\Gamma \equiv \frac{-x}{y}$, fiet $v \equiv \int \frac{y \partial x - x \partial y}{y y - x x} = \frac{1}{2} l \frac{y + x}{y - x}$. Quarto sumi poterit $\Pi \equiv \frac{\alpha x - \beta y}{\beta x - \alpha y}$; tum enim habebitur

$$v = \int \frac{\beta x \, \partial x - \beta y \, \partial y - \alpha y \, \partial x + \dot{\alpha} x \, \partial y}{\alpha \left(xx - yy \right)} = \frac{1}{2} l \frac{x + y}{y - x} + \frac{\beta}{\alpha} l \sqrt{xx - yy}.$$

Ut alios casus ernamus, faciamus quinto $w \equiv p+q$ et y=p-q, ut fiat $\partial v = \frac{(1+\Pi)\partial p + (1-\Pi)\partial q}{(1+\Pi)p - (1-\Pi)q}$. Ponatur $\frac{r+\Pi}{1-\Pi} + \frac{r}{r}$, erit $\partial v = \frac{\Theta\partial p + \partial q}{\Theta p - q}$. Sumatur $\frac{\alpha p^m}{\beta q^n - 1}$, fietque $\partial v = \frac{\alpha p^m}{\alpha p^m} \frac{1}{\beta q^n} \frac{1}{\alpha q^n}$ et $m \partial v = \frac{m\alpha p^m}{\alpha p^m} \frac{1}{\beta q^n} \frac{1}{\alpha q^n}$; unde patet fieri debere $n \equiv -m$, ut habeamus $m v \equiv l (\alpha p^m - \beta q^n)$. Sumto igitur $\Pi = \frac{\Theta - r}{\Theta + 1}$, hoc

est
$$\Pi = \frac{\alpha(x+y)^{m-1} - \beta(x-y)^{n-1}}{\alpha(x+y)^{m-1} + \beta(x-y)^{n-1}}$$
, obtinebitur integrale $v = \frac{1}{m} l(\alpha(x+y)^m - \beta(x-y)^n)$.

Si Sexto ponatur y = tx, fit $\partial_t v = \frac{\partial x(\tau + \Pi t) + \Pi x \partial t}{x(\Pi + t)}$. Ponatur $\frac{\tau + \Pi t}{\Pi + t} = \Theta$, erit $\partial v = \Theta \frac{\partial x}{x} + \frac{\Pi \partial t}{\Pi + t}$, existente $\Omega = \frac{t\Theta - 1}{t - \Theta}$. Hinc si statuatur $\Theta = n$, ut sit $\Pi = \frac{tn + 1}{t - n}$, crit $\partial v = \frac{n\partial x}{x} + \frac{nt\partial t}{tt - 1} - \frac{\partial t}{tt - 1}$, ideoque $v = nlx + \frac{1}{2}nl(tt - 1) + \frac{1}{2}l\frac{1+t}{1-t}$, sive in x ct! y erit $v = nl\sqrt{yy - xx} + \frac{1}{2}l\frac{x+y}{x-y}$, quae solutio cum superiore tertia prorsus convenit. Tandem generalius posito $\sqrt{yy - xx} = u$, si U fuerit functio quaecunque ipsius u, valor $\Pi = \frac{Uy - x}{y - Ux}$ quaesito satisfaciet. Facta enim substitutione formula $\partial v = \frac{\partial x + \Pi \partial y}{Hx + y}$ abit in hanc: $\partial v = \frac{y\partial x - x\partial y}{yy - xx} + \frac{U(y\partial y - x\partial x)}{yy - xx}$, unde colligitur $v = \frac{1}{2}l\frac{y + x}{y - x} + \int \frac{U\partial u}{u}$.

Scholion.

§. 43. Quaestio hic formari potest hujus indolis generalissima: Si p, q, et P, Q denotent functiones homogeneas nullius dimensionis binarum variabilium x et y datas, et proposita fuerit haec formula differentialis:

$$\partial v = \frac{p \partial x + \Pi q \partial y}{\Pi P + Q} x^{n-1}$$
,

in quam ingreditur functio indeterminata II, eam ita determinare ut integratio succedat. Hanc autem investigationem maxime arduam in alia dissertatione suscipiam.



DE SPHAERIS OSCULANTIBUS

AUCTORE N. F U S S.

Conventui exhibuit die 9 Julii 1806.

- §. 1. Quemadmodum per data tria puncta circulum describere licet, ita sphaera concipi potest, quae per data quatuor puncta transeat. Hinc cum circulus curvam quampiam osculans vocatur, qui per terna curvae puncta proxima transit, simili modo ctiam sphaeram osculantem appellare licebit eam, quae per data quatuor puncta proxima cujusque curvae transit. Ubi quidem observandum est, si tota curva in codem plano existat, tum sphaerae osculantis radium cum ipso radio circuli osculantis convenire. Sin autem curva descripta fuerit in superficie sphaerica, manifestum est hanc ipsam esse sphaeram osculantem quandoquidem per omnia curvae puncta transit. Pro qualibet autem curva non in eodem plano sita centrum et radius sphaerae osculantis sequenti modo determinari poterit.
- §. 2. Sit M N curva proposita duplicis curvaturae, ejus- Tab. I. que punctum quodeunque Z ad ternos axes principales inter se nor- Fig. 5. males OA, OB, OC referatur, ope coordinatarum orthogonalium $OX \equiv x$, $XY \equiv y$, $YZ \equiv z$. Ad cosdem axes referator quoque centrum sphaerae osculantis H, pro quo sint coordinatae OF $\equiv f$, FG = g, GH = h, radius vero sphaerae osculantis vocetur HZ = r, atque ex supra dictis apparet, hunc radium invariatum manere debere, ctiamsi punctum Z per tria elementa contigua curvae propositae promoveatur. Unde sequitur, non solum ejus differentiale primum et secundum, quemadmodum in radio osculi pro curvis non

in codem plano sitis fieri solet, sed etiam differentiale tertium nihilo esse acquandum.

§. 3. Cum igitur sit $HZ^2 \equiv HK^2 + KZ^2$ et $HK^2 \equiv GY^2 \equiv GI^2 + IY^2$, erit $HZ^2 \equiv FX^2 + IY^2 + KZ^2$, hoc est:

$$rr \equiv (x - f)^2 + (y - g)^2 + (z - h)^2$$
,

cujus ergo expressionis differentialia primum, secundum et tertium si nihilo acqualia ponantur, orientur tres aequationes, ex quibus intervalla x-f, y-g, z-h, definire licebit, quibus inventis radius sphaerae osculantis crit:

$$r = \sqrt{(x - f)^2 + (y - g)^2 + (z - h)^2}.$$

Ubi statim manifestum est, pro curva in superficie sphaerae, cujus radius $\equiv a$, descripta, si abscissae a centro computentur, fore $f \equiv g \equiv h \equiv 0$, ideoque $r \equiv a$, uti requiritur.

\$\. 4. Differentiemus jam ter formulam illam pro quadrato radii sphacrae osculantis inventam, et quo hace differentialia facilius exprimi queant, quoniam curva per ternas coordinatas x, y, z, ita determinatur, ut tam y quam z spectari possint tanquam functiones certae ipsius x, statuamus $\partial y = p \partial x$, $\partial z = q \partial x$; $\partial p = p' \partial x$, $\partial q = q \partial x$; $\partial p' = p' \partial x$, $\partial q' = q' \partial x$, hocque facto differentiationes prima, secunda et tertia dabunt sequentes acquationes:

I.
$$x - f + p(y - g) + q(z - h) = 0;$$

II.
$$1 + pp + qq + p'(z - g) + q'(z - h) = 0$$
;

'. III.
$$3pp + 3qq + p'(y-g) + q''(z-h) = 0;$$

ex quibus jam haud difficile erit intervalla x - f, y - g, z - h, eruere.

§. 5. Quo calculum magis contrahamus, ponamus brevitatis gratia

$$1 + pp + q q = ss;$$

$$pp' + qq' = ss';$$

et binae aequationes II. et III. hane induent formam concinniorem:

II.
$$s s + p'(y - g) + q'(z - h) = 0$$
;
III. $3 s s' + p''(y - g) + q''(z - h) = 0$.

Instituantur cum his aequationibus sequentes combinationes:

II.
$$q'' - III$$
. $q' = q''ss - 3q'ss' + (y-g)(p'q'' - q'p'') = 0$
II. $p'' - III$. $p' = p''ss - 3p'ss' + (z-h)(p''q' - q''p') = 0$

ex quibus eliciuntur valores quaesiti:

$$y - g = \frac{3q'ss' - q''ss}{p'q'' - q'p''};$$

 $z - h = \frac{3p'ss' - p''ss}{p''q' - q''p'};$

quibus in I substitutis nanciscimur quoque intervallum tertium:

$$x - f = \frac{p(q'' s s - q q' s s') - \gamma(p'' s s - q p' s s')}{p'q'' - q'p'},$$

atque his ternis valoribus inventis etiam radius sphaerae osculantis innotescit.

§. 6. Hae autem expressiones formam adhuc commodiorem induunt, si ponatur

$$p' q'' - q' p'' \equiv w;$$

$$p q' - q p' \equiv u;$$

$$p q'' - q p' \equiv v;$$

tum enim habebimus:

$$x - f \equiv \frac{s}{w} (v s - 3 u s');$$

 $y - g \equiv \frac{s}{w} (3q's' - q''s);$
 $z - h \equiv \frac{s}{w} (3p's' - p''s);$

quibus valoribus substitutis in expressione supra §. 3. pro quadrato radii sphaerae osculantis inventa, prodibit:

$$\overline{rr} = \frac{ss}{ww} \left\{ \begin{array}{l} + \overline{ss} (p''p'' + q''q'' + u'u') \\ - 6 ss' (p'p'' + g'q'' + u u') \\ + 9 s's' (p'p' + q'q' + u u) \end{array} \right\}$$

ubi notandum est, posito $\partial u = u \, \partial x$, ob u = pq' - qp', fore $u' \, \partial x = (p \, q'' - q \, p'') \, \partial x = v \, \partial x$

ideoque v = u'; quem valorem in illa expressione pro r r' loco v substituimus.

§. 7. En ergo quadratum radii sphaerae osculantis curvae cujuscunque duplicis curvaturae expressum dedimus per formulam haud parum quidem complicatam, quod mirum non est, quoniam in eam non solum differentialia primi et secundi, sed adeo tertii gradus sunt ingressa. Quovis autem casu, si cui applicatio hujus expressionis generalis nimis operosa videatur, calculus pluribus casibus non mediocriter sublevabitur, si intervalla x-f, y-g, z-h, seorsim computentur, quorum porro quadrata in unam summam collecta exhibebunt quadratum radii sphaerae osculantis. Quin etiam centrum hujus sphaerae inotescet. Interim tamen in sequentibus applicationibus radium quaesitum immediate ex formula nostra generali derivare licebit,

Applicatio

ad helicem Archimedeam

§. 8. Quo usus hujus formulae clarius perspiciatur, applicemus eam ad aliquot curvas duplicis curvaturae, inter quas helix Ar-Tab. I. chimedea, utpote notissima, primum tenet locum. Sit igitur A B Fig. 6. portio axis cylindri, cujus radius AC = a. Sit D EZ portio helicis in superficie cylindri descriptae, pro cujus puncto Z vocentur coordinatae AX = x, XY = y, et YZ = z, ita ut sit yy+zz = aa. Vocetur porro angulus Z X Y = Φ, ita ut sit y = a cos. Φ et z = a sin. Φ; et cum proprietas notissima hujus curvae in eo con-

sistat, quod angulus Φ proportionalis sit abscissae, ponamus $x = \frac{\Phi}{s}$; His positis manifestum est fore:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = -n a \sin. \Phi;$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial x} = +n a \cos. \Phi;$$

$$p' = \frac{\partial p}{\partial x} = -n n a \cos. \Phi;$$

$$q' = \frac{\partial q}{\partial x} = -n n a \sin. \Phi;$$

$$p'' = \frac{\partial p'}{\partial x} = +n^3 a \sin. \Phi;$$

$$q'' = \frac{\partial q'}{\partial x} = -n^3 a \cos. \Phi.$$

Hinc porro deducuntur sequentes valores §§. 5. et 6. introducti:

Ex §. 5.
$$\begin{cases} ss = 1 + n n a a \\ ss' = 0 \end{cases}$$
Ex §. 6.
$$\begin{cases} u = n^3 a a \\ v = 0 \\ w = n^5 a a \end{cases}$$

His autem valoribus in formula nostra generali pro quadrato radii sphaerae osculantis inventa substitutis, erit:

$$rr = \frac{(1 + n n a a)^2}{n + a a}$$

unde ipse radius rationaliter ita prodit expressus:

$$r = \frac{i + n n a a}{n n a}.$$

§. 9. Singularis hic circumstantia notanda venit, scilicet, eandem hanc expressionem oriri, si quaeratur radius circuli osculatoris pro helice Archimedea. Si enim in genere hic radius pro curvis non in eodem plano sitis vocetur R, notum est eum hac formula exprimi:

$$R = \frac{\partial s^2}{\sqrt{\partial \partial x^2 + \partial \partial x^2 + \partial \partial x^2}}$$

denotante s arcum curvae et x, y, z ternas coordinatas. Cum igitur pro helice nostra sit:

ob $\partial s^2 = \partial x + \partial y + \partial z^2 = \frac{1 + n n a}{n n} \partial \Phi^2$ erit radius circuli osculatoris:

$$R = \frac{1 + n n a a}{n n a} = r.$$

Hic scilicet circulus osculator est circulus sphacrae osculantis maximus. Nisi autem hoc eveniat in genere notandum est quoniam circulus osculator semper existit in sphaera osculante, nisi is sit circulus maximus, ejus radium semper minorem esse radio sphaerae osculantis.

Applicatio

ad alias curvas in superficie cylindri descriptas.

§. 10. Cum pro quacunque curva in superficie cylindri descripta, servatis denominationibus supra adhibitis, sit $yy+zz\equiv aa$, statuatur ut supra $y\equiv a\cos$. Φ et $z\equiv a\sin$. Φ , existente angulo Φ functione quacunque abscissae, quam ponamus $\Phi\equiv \int X \partial x$, ita ut sit $\partial \Phi\equiv X \partial x$, $\partial X\equiv X'\partial x$, $\partial X\equiv X''\partial x$. His positis habebimus:

$$p = -a \times \sin. \Leftrightarrow;$$

$$q = +a \times \cos. \Leftrightarrow;$$

$$p' = -a \times \sin. \Leftrightarrow -a \times \times \cos. \Leftrightarrow;$$

$$q' = +a \times \cos. \Leftrightarrow -a \times \times \sin. \Leftrightarrow;$$

$$p'' = -3 a \times (\cos. \Leftrightarrow -a \times (\sin. \Leftrightarrow +a \times (\cos. \Leftrightarrow +a \times (os. \Leftrightarrow +a \times$$

Tum vero quantitates ss, ss', u, v, w, ultra expectationem, per sequentes formulas valde concinnas exprimuntur:

$$ss \equiv 1 + aaXX;$$

 $ss' \equiv aaXX';$
 $u \equiv aaX^3;$
 $v \equiv 3aaXX';$
 $w \equiv aaX(X^4 + 3X'X' - XX'');$

quibus rite substitutis per calculum non adeo molestum ad sequentem perducimur expressionem generalem pro quadrato radii sphaerae osculantis:

$$rr = \frac{1 + a a X X}{a a X^{2} (X^{4} + 3 X^{2} - X^{2})^{2}} \begin{pmatrix} (1 + a a X X)(9 X^{2} X^{2} + X^{2} - 2 X^{2} X^{3} + X^{6}) \\ + 9 a a X^{4} X^{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + a a X X)(9 X^{2} X^{2} + X^{2} - 2 X^{2} X^{3} + X^{6}) \\ + 9 a a X^{2} (X^{4} + 3 X^{2} - X X^{2})^{2} \\ + \frac{9 a^{4} X^{2} X^{2}}{1 + a a X^{2}} (X^{2} + X^{4} + a a X^{6}) \end{pmatrix}$$
Hing are cochlected Archimedis which $X = u X^{2} = 0 X^{2} = 0$.

Hinc pro cochlea Archimedis, ubi X = n, X' = 0, X' = 0, prodibit ut supra:

$$r = \frac{1 + nnna}{nna}.$$

§. 11. Statuamus nunc angulum \oplus quadrato abscissae proportionalem, ponendo $\oplus \equiv \frac{n x x}{n}$, crit $X \equiv n x$, $X' \equiv n$ et $X'' \equiv 0$. Hinc quadratum radii sphaerae osculantis crit:

$$r^{2} = \frac{1 + a^{2} n^{2} x^{2}}{a^{2} (3 + n^{2} x^{4})^{2}} \left\{ \begin{array}{l} (1 + a n^{2} x^{2}) (9 + n^{2} x^{4} + 9 a^{2} n^{2} x^{2}) \\ - 6 a n x^{2} (2 + 3 a^{2} n x^{2}) \\ + \frac{9 a^{4} n^{2}}{1 + a^{2} n^{2} x^{2}} (1 + n^{2} x^{4} + a^{2} n^{4} x^{6}) \end{array} \right\}.$$

Applicatio

ad curvas in superficie coni recti descriptas.

§. 12. Sit CAD comus rectus, in cujus superficie descripta Tab. II. sit curva MNZ, cujus punctum Z determinetur coordinatis $\Lambda X = x$, Fig. 1.

X Y = y, Y Z = z. Sit radius baseos B C = n A B, crit radius sectionis per punctum X vel Z factae X Z = $\sqrt{yy + zz} = nx$. Statui igitur poterit $y = nx \cos$. D et $z = nx \sin$. \oplus , existente angulo \oplus functione quacunque abscissae, quam, ponamus $\oplus = \int X \partial x$, ita ut sit $\partial \oplus = X \partial x$, $\partial X = X' \partial x$ et $\partial X' = X' \partial x$.

§. 13. His positis per disserentiationem ter repetitam habebimus:

$$p = n \cos . \Phi - n X x \sin . \Phi;$$

$$q = n \sin . \Phi + n X x \cos . \Phi;$$

$$p' = -2 n X \sin . \Phi - n x X' \sin . \Phi - n x X^{2} \cos . \Phi;$$

$$q' = +2 n X \cos . \Phi + n x X' \cos . \Phi - n x X^{2} \sin . \Phi;$$

$$p'' = -3 n X' \sin . \Phi - 3 n X^{2} \cos . \Phi - n x X'' \sin . \Phi - 3 n x X X \cos . \Phi + n x X' \sin . \Phi;$$

$$q'' = +3 n X' \cos . \Phi - 3 n X^{2} \sin . \Phi + n x X' \cos . \Phi - 3 n x X X' \sin . \Phi - n x X^{3} \cos . \Phi;$$

Hinc autem porro deducuntur sequentes valores:

$$ss = 1 + nn + nn xx XX$$

$$ss' = nn x X (X + xX')$$

$$u = nn (2X + xX' + x^{2}X^{3})$$

$$v = nn (3X' + xX'' + 2xX^{3} + 3x^{2}X^{2}X')$$

$$w = nn X (6X^{2} + 6xXX' + 3x^{2}X^{2} - x^{2}XX'' + x^{2}X^{4}).$$

Quod si autem hos valores in expressione pro r^2 inventa substituere vellemus, calculus non parum forct molestus, quamobrem consultius videtur, eos pro quovis casu particulari proposito seorsim investigare et tum demum substitutionem instituere.

§. 14. Ita si verbi gratia propositus fuerit casus quo angulus Φ abscissae x est proportionalis, statuendo $\Phi = kx$, ita ut

X = k, X' = 0, X'' = 0, tum valores nostri sequentes formas concinniores induunt:

$$p = n \cos . \oplus - n k x \sin . \oplus;$$

$$q = n \sin . \oplus + n k x \cos . \oplus;$$

$$p' = -2 n k \sin . \oplus - n k k x \cos . \oplus;$$

$$q' = +2 n k \cos . \oplus - n k k x \sin . \oplus;$$

$$p' = -3 n k k \cos . \oplus + n k^3 x \sin . \oplus;$$

$$q' = -3 n k k \sin . \oplus - n k^3 x \cos . \oplus.$$

Ex his autem valoribus porro nascentur sequentes:

$$ss = 1 + nn (1 + kkxx)$$

$$ss' = nnkkx$$

$$u = nnk (2 + kkxx)$$

$$v = 2nnk^3 x$$

$$w = nnk^3 (6 + kkxx).$$

Quaeramus autem quoque sequentes valores:

$$p''p'' + q''q'' + u'u' = nnk^{4} (9 + k^{2}x^{2} + 4n^{2}k^{2}x^{2})$$

$$p'p'' + q'q'' + uu' = nnk^{4}x (1 + 2n^{2}(2 + kx^{2}))$$

$$p'p' + q'q' + uu = nnk^{2}(4 + kx + n^{2}(2 + k^{2}x^{2})^{2})$$

quibus inventis quadratum radii sphaerae osculantis erit:

$$rr = \frac{1 + n^{2}(1 + k^{2}x^{2})}{n^{2}k^{2}(6 + k^{2}x^{2})^{2}} \begin{cases} \frac{(1 + n^{2}(1 + k^{2}x^{2})(9 + k^{2}x^{2} + 4n^{2}k^{2}x^{2})}{-6n^{2}k^{2}x^{2}(1 + 2n^{2}(2 + k^{2}x^{2}))} \\ + \frac{0n^{2}k^{2}x^{2}}{1 + n^{2}(1 + k^{2}x^{2})}(4 + k^{2}x^{2} + n^{2}(2 + k^{2}x^{2})^{2}) \end{cases}$$

quae expressio, restituendo loco kx angulum Φ , aliquanto concinnius sequenti modo repraesentari potest:

$$rr = \frac{1+n^{2}(1+\Phi^{2})^{2}}{n^{2}k^{2}(6+\Phi^{2})^{2}} \left\{ \begin{array}{l} (1+n^{2}(1+\Phi^{2}))(9+\Phi^{2}+4n^{2}\Phi^{2}) \\ -6n\Phi^{2}(1+2n(2+\Phi^{2})) \\ \frac{+9n^{4}\Phi^{2}}{1+n^{2}(1+\Phi^{2})}(4+\Phi^{2}+n^{2}(2+\Phi^{2})^{2}) \end{array} \right\}.$$

§. 15. Quodsi jam quaeratur radius sphaerae osculantis pro eo curvae puncto ubi abscissa x, vel angulus Φ evanescunt, reperietur:

$$r = \frac{1 + nn}{2nk}$$
.

§. 16. Sin autem quaeratur iste radius pro curva in superficie coni recti, cujus diameter baseos duplo altitudinis aequetur, ob n = 1 erit

$$r = \frac{\sqrt{36 + 68 \oplus^2 + 20 \oplus^4 + 2 \oplus^6}}{k (6 + \oplus^2)},$$

et pro eo curvae puncto, ubi angulus Φ evanescit, erit $r = \frac{1}{k}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TAYLOR.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 18 Août 1813.

Il y a peu de propositions, qui soient d'une si grande utilité et dont on fasse un usage si fréquent dans toutes les branches des mathématiques, que le célèbre théorème de Taylor. C'est donc rendre un service à cette science, que de donner une parfaite évidence à ce théorème, en le prouvant rigoureusement, sans avoir recours à la notion de l'infini, comme celà se fait ordinairement. Voilà ce qui m'a porté à ne pas croire tout à fait inutile la nouvelle démonstration que j'ose présenter à l'Academie dans ce mémoire.

§. 1. Soit y la valeur que prend une fonction quelconque de x, algébraïque ou transcendante, lorsqu'on donne à celle-ci une valeur déterminee x, et Δy le changement que cette fonction éprouve, lorsqu'on met $x + \Delta x$ à la place de x; on aura par le théorème de Taylor:

 $\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}$ $x + \frac{\partial \partial y}{2 \partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^3 y}{2 \partial x^3} \Delta x^3 + \dots + \frac{\partial^r y}{2 \partial x^4} \Delta x^r + \text{cet}$. ∂x étant supposée constante dans les différentiations successives.

Pour prouver la vérité de ce théoreme, nous ne supposerons autre chose, si non que l'accroissement Δy d'une fonction quelconque de x peut toujours être developpé dans une série qui ne renferme que des puissances entières et positives de l'accroissement Δx . En estêt, puisque Δy doit necessairement s'evanouir, croître, et dé-

croître, en même tems que Δx , la forme générale de chacun de ses termes ne peut être que $P\Delta x$, P étant une fonction de x et Δx ; et il est clair d'abord, que $P\Delta x$ ne peut renfermer de puissances de Δx d'un exposant négatif, parcequ'alors Δy aurait une valeur infiniment grande dans le cas où Δx est nul, ce qui est une absurdité. Il est d'ailleues aisé de voir que, si y est une fonction uniforme de x, son accroissement Δy ne peut avoir non plus qu'une seule valeur, pour chaque valeur de $\triangle x$. Mais, dans le cas même, où y aurait plusieurs valeurs pour chaque valeur de x, nous ne considérons ici qu'une valeur déterminée de y, c'est à dire, une seule branche de la courbe; et dans cette supposition, le changement de l'ordonnée y ne peut avoir qu'une seule valeur, tant qu'on ne passe pas d'une branche à l'autre. Or, tout radical ayant autant de valeurs qu'il y a d'unités dans son exposant, il est clair que, dans la série de $\triangle y$ il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de $\triangle x$. Nommant donc fx une fonction quelconque de x, on a généralement: $\Delta \cdot fx = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + \text{cet.}$ P, Q, R, etc. étant des fonctions de x. (*)

§. 2. Substituant dans cette équation, d'abord y, ensuite P, Q, R, etc. ou P_1 , P_2 , P_3 , etc. au lieu de fx, on aura les séries suivantes:

(A)
$$\triangle y \equiv P_1 \triangle x + P_2 \triangle x^2 + P_3 \triangle x^3 + \dots + P_r \triangle x^r + P_{r+1} \triangle x^{r+1} + \text{cet.}$$

$$\triangle P_1 \equiv {}^1p_1 \triangle x + {}^1p_2 \triangle x^2 + {}^1p_3 \triangle x^3 + \dots + {}^1p_r \triangle x^r + \text{cet.}$$

$$\triangle P_2 \equiv {}^2p_1 \triangle x + {}^2p_2 \triangle x^2 + {}^2p_3 \triangle x^3 + \dots + {}^2p_r \triangle x^r + \text{cet.}$$

$$\triangle P_3 \equiv {}^3p_1 \triangle x + {}^3p_2 \triangle x^2 + {}^3p_3 \triangle x^3 + \dots + {}^3p_r \triangle x^r + \text{cet.}$$

$$\triangle P_r \equiv {}^rp_1 \triangle x + {}^rp_2 \triangle x^2 + {}^rp_3 \triangle x^3 + \dots + {}^rp_r \triangle x^r + \text{cet.}$$

où l'on voit que le nombre qui se trouve à droite du pied de chaque lettre P ou p, se rapporte à la puissance de Δx dont

^(*) Voy. Théorie des fonct. anal. par Lagrange, pag. 7. suiv.

elle est le coëfficient, au lieu que le nombre qui se trouve en haut et à gauche de chaque lettre p, designe le coëfficient P de la série Δy , à la différence duquel la fonction p appartient comme coëfficient, de sorte que rp_n est la fonction de x, qui est le coëfficient de Δx^n dans la différence de P_r ou du coëfficient de Δx_r dans la série Δy . Cette manière de marquer les coëfficiens, nous sera très - utile dans la démonstration que nous allons donner. Au reste, on voit que $\Delta y = P_1 \Delta x + \cot$ a la même forme que la série de Taylor, de sorte qu'il ne reste à prouver, si non que les coëfficiens sont aussi les mêmes, savoir $P_1 = \frac{\partial y}{\partial x}$, et en général,

$$P_r = \frac{\partial^r y}{\partial x^r}.$$

§. 3. Soit y' la valeur de y, y'' celle de y', lorsqu'on substitue dans l'une et l'autre $x \to \Delta x$ à la place de x, de sorte que

$$y' = y + \triangle y$$
, et $y'' = y' + \triangle y' = y + 2 \triangle y + \triangle^2 y$, ou $y'' - y = 2 \triangle y + \triangle \triangle y$.

Or, y'' est la valeur que y a prise, après qu'on a substitué deux fois $x + \Delta x$ au lieu de x, ou après qu'on a ajouté deux fois $x \times x$ à x : donc, y se transforme en y'', quand on met $x + 2 \Delta x$ à la place de x. Nommant donc $\Delta_2 y$ la valeur de Δy , lorsque dans celle - ei $2 \Delta x$ est substitué au lieu de Δx , on a $y'' - y = \Delta_2 y$, ce qui étant comparé à l'équation

(B)
$$0 = 2 \triangle y + \triangle \triangle y$$
, donne
 $= 2 \triangle y - 2 \triangle y - \triangle \triangle y$.

Or, on a $\triangle \triangle y = \triangle (\triangle y)$, $\triangle x$ étant supposée constante, ce qui donne, en prenant les différences de (A) (§. 2.).

$$\Delta \Delta y = \Delta P_1 \Delta x + \Delta P_2 \Delta x^2 + \Delta P_3 \Delta x^3 + \dots + \Delta P_r \Delta x^r + \cot = \frac{1}{p_1 \Delta x^2} + \frac{1}{p_2 \Delta x^3} + \dots + \frac{1}{p_r \Delta x^{r+1}} + \cot + \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^{r+2} + \cot = \frac{1}{2} p_1 \Delta x^3 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^2 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^2 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^2 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^2 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^2 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^2 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_r \Delta x^2 + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 + \dots + \frac{1}{2} p_2 \Delta x^4 +$$

 $+\cdots + r_1 \triangle x^r + r_1 \rho_2 \triangle x^{r+1} + \cot x^r + r_2 \triangle x^{r+1} + r_2 \triangle x^{r+2} + \cot x^r$

Puis, substituant $2 \triangle x$ au lieu de $\triangle x$ en (A), on trouve

 $\Delta_2 y = 2 P_1 \Delta x + 2^2 P_2 \Delta x^2 + 2^3 P_3 \Delta x^3 + \dots + 2^r P_r \Delta x^r + \text{cet.}$ ce qui étant substitué en (B), nous donne l'équation

(C)
$$0 = (2-2) P_1 \Delta x$$

 $+(2^2-2) P_2 \Delta x^2 + (2^3-2) P_3 \cdot \Delta x^3 + (2^4-2) P_4 \cdot \Delta x^4 + \text{cet.}$
 $-{}^1p_1$ $-{}^1p_2$ $-{}^1p_3$ $-\text{cet.}$
 $-{}^2p_1$ $-{}^2p_2$ $-\text{cet.}$
 $-{}^3p_1$ $-\text{cet.}$

et les coëfficiens généraux de Δx^r et de Δx^{r+1} seront

$$(2^{r}-2) P_{r}-{}^{1}p_{r-1}-{}^{2}p_{r-2}-{}^{3}p_{r-3}-\dots -{}^{r-2}p_{2}-{}^{r-1}p_{1},$$
 et $(2^{r+1}-2) P_{r+1}-{}^{1}p_{r}-{}^{2}p_{r-1}-{}^{3}p_{r-2}-\dots -{}^{r-1}p_{2}-{}^{r}p_{1}.$

§. 4. Comme Δx est une quantité tout à fait arbitraire et indepéndante de x, il faut que le coëfficient de éhaque puissance de Δx soit séparément égal à zéro; ce qui nous donne les équations suivantes:

(1),
$${}^{1}p_{1} = (2^{2} - 2) P_{2};$$
 (2), ${}^{1}p_{2} + {}^{2}p_{1} = (2^{3} - 2) P_{3};$ (3), ${}^{1}p_{3} + {}^{2}p_{2} + {}^{3}p_{1} = (2^{4} - 2) P_{4},$ etc.

et en général,

$$(r), {}^{1}p_{r-1} + {}^{2}p_{r-2} + {}^{3}p_{r-3} + \dots + {}^{r-2}p_{2} + {}^{r-1}p_{1} = (2^{r} - 2)P_{r},$$
et.(r+1), ${}^{1}p_{r} + {}^{2}p_{r-1} + {}^{3}p_{r-2} + \dots + {}^{r-1}p_{2} + {}^{r}p_{1} = (2^{r+1} - 2)P_{r+1}.$

§. 5. Maintenant, pour introduire les rapports différentiels, on n'a pas besoin de recourir à la notion de l'infini, ni d'examiner la solidité des raisonnemens, sur lesquels le calcul différentiel est fondé; il suffit de se rappeler que ces rapports $\frac{\partial y}{\partial x}$, etc. ne sont autre chose que des abbréviations qui désignent les coëfficiens des premiers termes des séries du §. 2, de manière que $\frac{\partial y}{\partial x} = P_1$, $\frac{\partial P_1}{\partial x} = {}^1 p_1$, $\frac{\partial P_2}{\partial x} = {}^2 p_1$, et en général, $\frac{\partial P_r}{\partial x} = {}^r p_1$. On a donc (§. 4. (1)) $P_2 = \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial \partial y}{\partial x^2}$. Cette équation $P_2 = \frac{\partial P_1}{\partial x}$, trou-

vée pour la série (A), donne également pour toutes les séries suivantes : ${}^{1}p_{2} \pm \frac{\partial {}^{1}p_{1}}{2\partial x} \pm \frac{\partial {}^{2}p_{1}}{2\partial x^{2}} \pm \frac{\partial {}^{2}p_{2}}{\partial x} \pm {}^{2}p_{1}$, et généralement ${}^{r}p_{2} \pm \frac{\partial {}^{r}p_{1}}{2\partial x} \pm \frac{\partial {}^{2}p_{1}}{2\partial x^{2}}$.

- §. 6. L'équation (§. 4. (2)), en y substituant ${}^1p_2 = {}^2p_1$ (§. 5.), deviendra $P_3 = \frac{2p_1}{3}$, d'où, à cause de ${}^2p_1 = \frac{\partial\partial P_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ et ${}^2p_1 = \frac{\partial P_2}{\partial x}$ (§. 5.), on tire $P_3 = \frac{\partial^3 y}{2 \cdot 3 \cdot \partial x^3}$, et $P_3 = \frac{\partial P_2}{\partial x}$. Ceci donne, pour les séries suivantes, ${}^1p_3 = \frac{\partial P_2}{\partial x^2}$, et généralement ${}^7p_3 = \frac{\partial P_2}{\partial x^2}$, d'où, en substituant ${}^7p_2 = \frac{\partial\partial P_1}{\partial x^2}$ et ${}^7p_2 = \frac{\partial^3 P_1}{\partial x^2} = \frac{\partial\partial P_1}{\partial x^2}$ (§. 5.), on a ${}^1p_3 = \frac{\partial\partial P_2}{\partial x^2} = \frac{\partial\partial^3 P_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 P_1}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 P_1}{\partial x}$, et ${}^7p_3 = \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 P_1}{\partial x^3}$.
- §. 7. Substituant $r \equiv 3$ dans l'équation $p_1 = \frac{\partial P_r}{\partial x}$, et $r \equiv 2$ dans $p_2 = \frac{\partial P_r}{\partial x}$ (§. 5.), on a $p_1 = \frac{\partial P_3}{\partial x} = \frac{\partial P_2}{\partial x^2}$ (§. 6.), et $p_2 = \frac{\partial P_2}{\partial x^2}$; ce qui donne, en vertu de $p_3 = \frac{\partial P_2}{\partial x^2}$ (§. 6.), $p_3 + p_2 + p_3 = \frac{7}{2} \frac{\partial P_2}{\partial x^2} = \frac{7}{2} \frac{\partial P_2}{\partial x^2}$. Nous avons donc (§. 4. (3)) $p_4 = \frac{7}{2} \frac{\partial P_2}{\partial x^2} = \frac{\partial P_2}{\partial x^2} = \frac{\partial P_2}{\partial x^2}$; où substituant $p_2 = \frac{\partial P_2}{\partial x^2}$ (§. 5.), l'on obtient $p_4 = \frac{\partial P_2}{\partial x^2} = \frac{\partial P_2}{\partial x^2}$, ce qui donne aussi $p_4 = \frac{\partial P_3}{\partial x}$ (§. 6.).
- §. 8. Cette dernière équation donne également, pour les séries suivantes (§. 2.), ${}^{1}p_{4} = \frac{\partial \cdot {}^{1}p_{3}}{4\partial x} = \frac{\partial \partial \cdot P_{3}}{4\partial x^{2}}$ (§. 6.) $= \frac{\partial \cdot P_{4}}{\partial x}$ (§. 7.), et généralement ${}^{r}p_{4} = \frac{\partial \cdot {}^{r}p_{3}}{4\partial x}$, où substituant ${}^{r}p_{3} = \frac{\partial {}^{3}P_{r}}{2 \cdot 3 \cdot \partial x^{3}}$ (§. 6.), on a ${}^{r}p_{4} = \frac{\partial \cdot {}^{4}P_{r}}{2 \cdot 3 \cdot \partial x^{4}}$, et à cause de $\frac{\partial \cdot {}^{2}P_{r}}{\partial x} = {}^{r}p_{1}$ (§. 5.), ${}^{r}p_{4} = \frac{\partial {}^{3}P_{1}}{2 \cdot 3 \cdot \partial x^{3}}$.

Ayant maintenant développé l'équation (C) jusqu'à la quatrième puissance de Δx , rassemblons sous une forme générale, toutes les relations que nous venons de trouver, pour les valeurs de r depuis $r \equiv 1$ jusqu'à $r \equiv 4$.

§. 9. D'abord nous avons prouvé la vérité du théorème de Taylor jusqu'à la quatrieme puissance de Δx , savoir, $P_1 = \frac{\partial y}{\partial x}$,

 $P_2 = \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} (\S. 5.), \quad P_3 = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} (\S. 6.), \quad P_4 = \frac{\partial^4 y}{\partial x^3} (\S. 7.), \quad \text{donc}$ $(I) \quad P_r = \frac{\partial^r y}{\partial x^3 \partial x^3};$

et substituant cette valeur de P_r dans l'équation $p_i = \frac{\partial P_r}{\partial x}$ (§. 5.).

(II)
$$r_{p_1} = \frac{\partial^{r+1} y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot r \cdot \partial x^r + 1}$$
.

Puis, nous avons $r_{p_2} = \frac{\partial . r_{p_1}}{\partial x}$ (§. 5.), $r_{p_3} = \frac{\partial . r_{p_2}}{\partial x}$ (§. 6.), et $r_{p_3} = \frac{\partial^3 P_r}{2 \cdot 3 \cdot \partial x^3}$ (§. 6.) $= \frac{\partial \partial . r_{p_1}}{2 \cdot 3 \cdot \partial x^2}$ (§. 5.), $r_{p_4} = \frac{\partial . r_{p_3}}{4 \partial x}$, et $r_{p_4} = \frac{\partial^3 . r_{p_1}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \partial x^3}$ (§. 8.); done, généralement, prenant deux nombres m, n, pas plus grands que r = 4,

(III) ${}^{n}p_{m} = \frac{\partial_{n}^{n}p_{m-1}}{m \partial x}$, et (IV) ${}^{n}p_{m} = \frac{\partial_{m-1}^{m-1} {}^{n}p_{1}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m \partial x^{m-1}}$.

D'ailleurs, nous avons trouvé $p_1 = \frac{\partial P_1}{\partial x}$, $p_2 = \frac{\partial P_2}{\partial x}$ (§. 5.), $p_3 = \frac{\partial P_3}{\partial x}$ (§. 6.), $p_4 = \frac{\partial P_4}{\partial x}$ (§. 8.); donc généralement $p_r = \frac{\partial P_r}{\partial x}$; ce qui étant comparé à $p_1 = \frac{\partial P_r}{\partial x}$ (§. 5.), donne $p_r = p_1$. En général, nous avons (§. 5.) $p_1 = \frac{\partial P_r}{\partial x} = \frac{\partial^2 P_r}{\partial x} = \frac{\partial$

or (II) $\frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}} = 2 \cdot 3 \cdot ... (r-n+1) \cdot (r-n+2) \cdot ... (r-1) r \cdot r p_1$, donne $\frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}} = r \cdot (r-1) \cdot ... (r-n+2) \cdot r p_1$,

ce qui étant substitué donne

(V)
$${}^{n}p_{r-n+1} = \frac{r(r-1)...(r-n+2)}{2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} \cdot r_{p_{1}}$$

Les suppositions de n = 1 et de n = r, donnent également le facteur $\frac{r(r-1)\dots(r-n+2)}{2\cdot 3\dots n} = 1$, et ${}^{1}p_{r} = {}^{r}p_{1}$, comme nous avons trouvé plus haut. La substitution de m = r - n + 1 en (III) fait ${}^{n}p_{r-n+1} = \frac{\partial \cdot {}^{n}p_{r-n}}{(r-n+1)\partial x}$, ce qui étant comparé à (V) donne (VI) $\frac{\partial \cdot {}^{n}p_{r-n}}{\partial x} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+2)(r-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots (n-1)^{n}} \cdot {}^{r}p_{1}$;

d'od, en substituant n = 1 ou n = r - 1, en tiré également $\frac{\partial \cdot ^1 p_{r-1}}{\partial x} = \frac{\partial \cdot ^{r-1} p_1}{\partial x} = \frac{r}{1} \cdot ^r p_1$, vû que le facteur $\frac{r(r-1)....(r-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}$, dans l'un et l'autre cas, devient égal à $\frac{r}{1}$ ou r.

§. 10. Maintenant nous allons prouver, à l'aide de ces équations, supposées valables jusqu'à une certaine valeur de r, que le théorème de Taylor, ou notre équation (I) a aussi lieu pour r+1. Pour cet effet, nous tirerons des équations (V), (VI), deux autres. Après avoir substitué successivement au lieu de n, 1, 2, 3...r, dans l'équation (V), et 1, 2, 3...r-1, en (VI), la première donne

$$\begin{array}{c} {}^{1}p_{r}+{}^{2}p_{r-1}+{}^{3}p_{r-2}+\ldots +r-{}^{1}p_{2}+rp_{1}=\\ {}^{r}p_{1}[1+\frac{r}{2}+\frac{r(r-1)}{2\cdot 3}+\ldots +\frac{r(r-1)\ldots 5\cdot 4}{2\cdot 3 \cdot (r-3)(r-2)}+\frac{r(r-1)\ldots 4\cdot 3}{2\cdot 3 \cdot (r-2)(r-1)}+\frac{r(r-1)\ldots 3\cdot 2}{2\cdot 3 \cdot (r-1)r}],\\ \text{et la seconde} & \frac{\partial_{-}^{1}p_{r-1}+\partial_{-}^{2}p_{r-2}+\partial_{-}^{3}p_{r-3}+\ldots +\partial_{-}^{r-2}p_{2}+\partial_{-}^{r-1}p_{1}}{\partial_{-}^{2}x}=\\ {}^{r}p_{1} & \begin{bmatrix} \frac{r}{1}+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots +\frac{r(r-1)\ldots 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot (r-4)(r-3)}\\ +\frac{r(r-1)\ldots 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot (r-3)(r-2)}+\frac{r(r-1)\ldots 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot (r-2)(r-1)} \end{bmatrix}, \end{array}$$

ou bien

(D)
$${}^{1}p_{r} + {}^{2}p_{r-1} + \dots + {}^{r}p_{1} = {}^{r}p_{1} \left[1 + \frac{r}{2} + \frac{r(r-1)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{r(r-1)}{2 \cdot 3} + \frac{r}{2} + 1\right] = {}^{r}p_{1} \cdot S;$$
(E) $\frac{\partial_{1}^{1}p_{r-1} + \partial_{1}^{2}p_{r-2} + \dots + \partial_{r}^{r-1}p_{1}}{\partial_{r}^{2}} =$

$$r_{p_1}\left[\frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2} + \frac{r}{1}\right] = r_{p_1}.T.$$

§. 11. Quand on regarde les séries S et T avec un peu d'attention, on s'apperçoit aisément de la conformité de leurs termes avec les coëfficiens d'un binome élevé aux puissances r et r + 1. En effèt, on a

$$(1+a)^r = 1 + \frac{r}{1}a + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}a^2 + \dots + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}a^{r-2} + \frac{r}{1}a^{r-1} + a^r$$

par conséquent

$$(1+1)^r = 1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} + \frac{r}{1} + 1, \text{ et}$$

$$(1+1)^{r+1} = 1 + \frac{r+1}{1} + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} + \frac{r+1}{1} + 1,$$
d'où l'on tire
$$(1+1)^{r+1} - 2 = (r+1) \cdot (1 + \frac{r}{2} + \frac{r(r-1)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{r}{2} + 1) = (r+1)S, \text{ et}$$

$$(1+1)^r - 2 = \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} + \frac{r}{1} = T, \text{ ou}$$

$$(r+1)S = 2^{r+1} - 2, \text{ et } T = 2^r - 2.$$

§. 12. Reprenons maintenant les coëfficiens généraux de l'équation (C) (§. 3.), dont le (r+1)me, y ayant substitué (D) (§. 10.), nous donne (§. 4. (r+1)), $P_{r+1} = \frac{rp_1}{2^{r+1}-2}$, et la différentiation du $(r)^{me}$, après y avoir substitué (E) (§. 10.), rp_1 T = $\frac{(2^r-2)\partial P_r}{\partial x}$, ou $\frac{\partial^{n}r}{\partial x} = \frac{rp_1}{2^{r}-2}$. Or, nous venons de trouver (§. 11.) que $\frac{S}{2^{r+1}-2} = \frac{1}{r+1}$, et $\frac{T}{2^r-2} = 1$; donc $P_{r+1} = \frac{rp_1}{r+1}$ et $\frac{\partial^{n}r}{\partial x} = rp_1$; par conséquent $P_{r+1} = \frac{\partial^{n}r}{(r+1)\partial x}$.

 $\frac{\partial P_r}{\partial x} = \frac{\begin{cases} \cdot & 13. \text{ La différentielle de l'équation (I) (§. 9.) étant} \\ \frac{\partial P_r}{\partial x} = \frac{\partial r + i y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots r \cdot 0 \cdot x^r + i}, \text{ on a enfin} \\ P_{r+1} = \frac{\partial r + i y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots r \cdot (r+i) \partial x^r + i},$

ce qu'il fallait démontrer. Nous avons donc prouvé que, si le théorème de Taylor est vrai jusqu'au (r)me terme, il s'en suit qu'il a aussi lieu dans le terme suivant (r+1). Or, comme nous avons prouve ce théorème pour les cas particuliers r=1, r=2, r=3, r=4,

il a aussi lieu pour le cas r = 5; d'où l'on tire la même conséquence pour le cas r = 6, et par la même raison pour tous les nombres suivans, r = 7, r = 8, etc. à l'infini, parceque ce raisonnement a toujours lieu de r à r+1. Le théorème de Taylor est donc vrai dans toute son étendue jusqu'au dernier terme; c'est à

dire que, lui donnant la forme $\triangle y = P_1 \triangle x + P_2 \triangle x^2 + P_3 \triangle x^3 + \dots + P_r \triangle x^r,$

on a $P_1 = \frac{\partial y}{\partial x}$, $P_2 = \frac{\partial \partial y}{2 \partial x^2}$, et en général $P_r = \frac{\partial^r y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots r \cdot \partial x^r}$, quelle que soit la valeur du nombre entier r.

Il ne faut pas oublier que les expressions, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^r y}{\partial x^r}$, qui ne sont employées que pour désigner d'une manière abrégée les premiers termes des séries données ci-dessus, signifient de simples opérations d'arithmétique, et que la notion de l'infiniment petit, ou la théorie du calcul différentiel, n'entre nullement dans les raisonnemens dont nous nous sommes servis, pour démontrer le théorème de Taylor.

DISQUISITIONES AD THEORIAM EPICYCLORUM PERTINENTES.

AUCTORE

L I T T R O W.

Conventui exhibuit die 8 Junii 1814.

Cum non ita pridem, longe aliud quoddam quaeritans, commentarios Acad. Paris. lustrarem, forte fortuna in notam istam de epicyclis dissertationem Godinianam (ad an. 1733 p. 285) delapsus sum, quae, quamvis longe absuit, quin satisseeisset animum, attamen ad majora quaedam de his rebus quaerenda incitabat. Missis proinde praedis prioribus, quibus potiundis haud magna omnino spes fuerat, hanc aliam semitam ingressus sum, majori utique spe, haud meliori eventu. Quis enim non persuasum habebit, integram epicyclorum theoriam, quae ab antiquis recepta per tantum saeculorum cursum primas astronomiae vices tenebat, hodiernis etiam diebus analysi nostrae perfectiori jam dudum subjectam et ita tractatam excultamque esse, ut jam, quod addere posset, nemo haberet? Nihilominus, nostra saltem librorum penuria, quod investigationes veterum Graecorum satis superque notas excedat, non habet, excepto opere perfectissimo ill. Dni Schubert (Theoretische Astronomie) in quo ea huius theoriae pars, quae ad rem ibi tractatam facit, ea et praestantia et claritate absoluta est, ut jam nihil desiderandum superesse videatur. Exoptandum profecto, ut et ceterae hujus doctrinae partes, hodiedum in medio relictae, eodem modo absolverentur, negotium haud omnino negligendum, si vel dignitatem gravitatemque rei ipsius vel etiam historiam astronomiae antiquae spectare velis. Mihi autem, quae his de rebus horis aliquot subsecivis investigavi, liceat proponere iisdemque ad alia meliora viam sternere.

1. Ac primo quidem, ut a facillimis ordiamur sit a radius epicyeli, cujus centrum in peripheria circuli incedit, cujus radius unitati aequalis, siquidem hic nonnisi de proportionibus radiorum sermo est. Sit dato temporis momento b angulus radii i cum recta positione data per centrum circuli transeunte et b' angulus radiorum i et ... Posita deinde r distantia puncti extremi radii a a centro circuli et c angulo inter distantiam r et rectam positione datam contento, erit $Aa \equiv i$, $aa' \equiv i$, $BAa \equiv b$, $Aaa' \equiv b'$, $Aa' \equiv r$, $BAa' \equiv 0$ Tab. H. unde nullo negotio habebimus

cotg. $\Phi = \frac{\cos b - \alpha \cos (b + b')}{\sin b - \alpha \sin (b + b')}$ et $r = \sqrt{1 + \frac{2}{a} - 2 \alpha \cos b'}$

Quodsi angulum rectarum i et r in centro circuli factum designemus per Δ , erit $a'Aa = \Delta = b - \Phi$, unde, sumta tangente quantitatis b = 0, substitutoque ipsius tang. Φ valore invento crit tang. $\triangle = \frac{\alpha \sin b'}{1 - \alpha \cos b'}$

quae aequationes totam unius epicycli theoriam continent.

Valores quantitatum r et Δ per series simplicissimas exhiberi possunt, quem in finem ponamus log. nat. $e \equiv i$ unde acquatio ultima sequentem induit formam $c^{2\Delta V-1} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \frac{e^{-b'V-1}}{e^{b'V-1}}$

$$c^{2\Delta V-1} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \frac{e^{-b'V-1}}{e^{b'V-1}}$$

et hinc sumtis logarithmis

$$\Delta = \alpha \sin b' + \frac{1}{2} \alpha^2 \sin 2b' + \frac{1}{3} \alpha^3 \sin 3b' + \frac{1}{4} \alpha^4 \sin 4b' + \dots$$
 (I).

Eadem ratione aequatio penultima est

$$r^2 = (1 - \alpha \cdot e^{b\gamma' - 1}) \cdot (1 - \alpha \cdot e^{-b\gamma' - 1})$$

unde sumtis logarithmis

log.
$$r = - a \cos b - \frac{1}{2} a^2 \cos 2b - \frac{1}{3} a^3 \cos 3b$$
. (II)

Mémoires de l'Acad. T. VII.

Fig. 4.

2. Videamus jam, quo modo planctarum a motu uniformi deviationes, veteribus nomine inacqualitatis primae et secundae insignitas, quarum una, ut constat, motui planetae elliptico, altera loco telluris excentrico respondet, ope unius epicycli repraesentare possimus.

Posita ε ratione excentricitatis ad dimidium axem majorem ellipseos, r' distantia planetae a solis centro, m et ω anomalia media et vera, quarum computum more veterum ab aphelio incipimus, erit pro motu planetae elliptico ad tertiam duntaxat excentricitatis potestatem progredientes, acquatio centri

$$\Delta' = m - \omega = (2 \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4}) \sin m - \frac{5}{4} \varepsilon^2 \sin 2 m + \frac{13}{12} \varepsilon^3 \sin 3 m$$
et radius vector

$$r' = i + \varepsilon \cos m - \frac{\varepsilon^2}{2} (\cos 2m - i) + \frac{3\varepsilon^3}{8} (\cos 3m - \cos m).$$

Posito autem in his, quae praecedunt, $b \equiv m$ et $b' \equiv 180 - m$, erit pro motu epicyclico

$$\Delta = \alpha \sin m - \frac{1}{2} \alpha^2 \sin 2m + \frac{1}{3} \alpha^3 \sin 3m - \frac{1}{4} \alpha^4 \sin 4m +$$
et ex aeguatione (II), cum sit

$$r = i + (\log r) + \frac{1}{2} (\log r)^{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} (\log r)^{3} + \frac{1}{2} + \alpha \cos m - \frac{\alpha^{3}}{4} (\cos 2 m - i) + \frac{\alpha^{3}}{8} (\cos 3 m - \cos m).$$

Hinc sponte sequitur, primo, ope epicycli unius non nisi primum terminum ipsius Δ vel (r-i) repraesentari posse et secundo easdem determinationes inter se contradictorias esse, ita quidem ut, si epicyclus longitudinem ω exhibeat, quo casu $\tau \equiv 2\varepsilon$, tunc distantiam r simul exhibere non possit, utpote quo casu $\alpha \equiv \varepsilon$ et vice versa.

Contradictio haec maximi est momenti eaquae sóla veteribus suffecisset ad detruendam epicyclorum hypothesin. Quod ut clarius reddamus, sint R et R' diametri apparentes planetae in duobus orbitae punctis, quibus respondeant radii vectores r et r' ideoque $R \cdot r \equiv R' \cdot r'$. Sumtis autem differentialibus erit pro motu elliptico

$$\frac{\partial \omega}{\partial m} = 1 - 2 \varepsilon \cos m = \frac{\tau}{r^2} = h \cdot R^2$$

ubi h quantitas constans. Ratio proinde motus horarii in duobus orbitae punctis erit $\frac{\partial \omega}{\partial \omega'}$ $(\frac{R}{R'})^2$.

Pro epicyclo autem habebimus, posito $\alpha = 2\varepsilon$

$$\frac{\partial \omega}{\partial m} \equiv 1 - 2 \varepsilon \cos m \equiv \frac{1}{r} \equiv h' \cdot R$$
 unde $\frac{\partial \omega}{\partial \omega'} = \frac{R}{R'} \cdot m$

Variatio autem diametri apparentis lunae in perigaeo et apogaeo tanta est, ut ne instrumentis veterum quidem effugere potuerit, nimirum $R \equiv 33'$. 518 et $R' \equiv 29'$. 366. Motus autem horarius lunae in iisdem punctis $\partial \omega \equiv 38'$. 366, $\partial \omega' \equiv 29$. 447 unde $\frac{\partial \omega}{\partial \omega'} = 1.3028$ et $\frac{R}{R'} \equiv 1.1414$

quarum quantitatum differentiam 0.16 omnino animadvertere potuissent. Valor autem $(\frac{R}{R'})^2 \equiv 1.3027$ cum valore quantitatis $\frac{\partial \omega}{\partial \omega'}$ prorsus consentit.

Revera quidem Ptolemaeus ad repraesentandas inaequalitates lunares duobus epicyclis usus est: infra autem videbimus, eandem difficultatem etiam pluribus epicyclis in auxilium vocatis nequaquam tolli posse.

3. Aliter autem res se habet pro secunda inaequalitate, ubi unicus epicyclus sufficit ad eam penitus exprimendam. Quodsi insuper excentricitatis inclinationisque planetae et telluris rationem habere animus est, radium motumque ejus certa lege variabilem ponere necesse est, ut statim videbimus.

Sit l et L longitudo heliocentrica planetae et terrae, λ longitudo planetae geocentrica r et R radii vectores planetae tellurisque in planum ecclipticae projecti, quibus factis erit

$$tg. \lambda = \frac{R \sin L - r \sin l}{R \cos L - r \cos l} - \frac{r \sin l - R \sin L}{r \cos l - R \cos L}$$

Comparata autem hac acquatione cum prima §. 1. erit

$$a = \frac{r}{R}$$
, $b = L$, $b' = l - L$, $\phi = \lambda \dots (1)$.

Radius proinde circuli erit R, radiusque epicycli r, et motus planetae in peripheria epicycli ita erit comparatus, ut angulus ab eo descriptus aequalis sit angulo commutationis nomine insignito.

Eodem modo per eundem epicyelum distantia planetae a terra exacte designatur, utpote quae distantia D in planum ecclipticae projecta est $\frac{D}{R} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R}}$ cos. (l - L) quod cum secunda §. 1. acquatione prorsus consentit.

Hac autem ratione Ptolemaeus non nisi inaequalitates planetarum inferiorum exhibere arbitratus est. Il faisoit mouvoir chaque planète inférieure sur un epicycle, dont le centre avoit un mouvement égal au mouvement solaire et la planète parcourait son épicycle pendant un temps qui est celui de sa révolution autour du soleil. Au contraîre chacune des planètes supérieures était mue sur un epicycle, dont le centre avoit un mouvement égal à celui de la révolution de la planète et la période du mouvement de la planète dans l'épicycle étoit celle d'une révolution solaire. (Laplace Expos. du syst. du monde).

Mihi autem altera pro planetis superioribus suppositio cum priori pro inferioribus prorsus identica esse videtur, ita ut quaeuis earum omnibus planetis promiscue inservire possit. Quod si enim aequationem praecedentem cum aequatione prima § 1. conferimus, priori ita proposita $\frac{\sin l - \frac{R}{r} \sin L}{\cos l - \frac{R}{r} \cos L}, \quad \text{erit}$

$$\alpha = \frac{R}{r}, \quad b = l, \quad b' = L - l, \quad \varphi = \lambda \dots \text{ (II)}.$$

Quae ambae suppositiones (I) et (II), cum ex una eademque aequatione derivatae sint, necessario etiam eundem quantitatis λ valorem producere censendae sunt, id quod etiam considerationibus geometricis, sed paulo uberius, demonstrari potest.

Quamprimum autem valor quantitatis λ per seriem exprimendus sit, binae hypotheses probe secernendae sunt, siquidem, ut rei natura postulat, series divergentes excludendae sint. Nullo enima negotio ex prima hujus. § acquatione invenitur vel.

$$tg.(\lambda-1) = \frac{\frac{R}{r}\sin.(l-L)}{1-\frac{R}{r}\cos.(l-L)} \text{ vel tg.}(\lambda-L) = \frac{\frac{r}{R}\sin.(l-L)}{\frac{r}{R}\cos.(l-L)-1}$$

quae expressiones cum tertia § 1 aequatione comparatae sequentes series subministrant

$$\lambda - l = \frac{R}{r} \sin (l - L) + \frac{1}{2} (\frac{R}{r})^2 \sin 2 (l - L) + \frac{1}{3} (\frac{R}{r})^3 \sin 3 (l - L) +$$
pro planetis superioribus et

$$L - \lambda = \frac{r}{R} \sin (l - L) + \frac{1}{2} (\frac{r}{R})^2 \sin 2 (l - L) + \frac{1}{3} (\frac{r}{R})^3 \sin 3 (l - L) +$$
pro inferioribus.

4. Sufficiant haec de uno epicyclo jam numero quocunque epicyclorum eodem quo antea modo valores quantitatum Φ , r et Δ quaerendi sunt, quam investigationem, cum in ea totus negotii cardo vertatur, omni qua par est industria suscipiamus.

Sit $Aa \equiv i$ radius circuli primi, $aa' \equiv a$ secundi, $a'a'' \equiv \beta$ Tab. II. tertii etc. Anguli autem his radiis intercepti sint $Aaa' \equiv b'$, Fig. 5. $aa'a'' \equiv b''$, $a'a'a''' \equiv b'''$ etc. Ducatur per centrum A circuli primi linea recta AB, quae cum radio i constituit angulum $BAa \equiv m$. Tandem per idem centrum A ad centrum epicycli ultimi vel ad centrum ipsius planetae ducatur recta r, quae cum recta data AB facit angulum Φ et cum radio primo Aa angulum Δ , ita ut

puncti
$$a$$
, hoc est $A c \equiv x$ $c a \equiv y$
- $a' - A c' \equiv x'$ $c' a' \equiv y'$
- $a'' - A c'' \equiv x''$ $c'' a'' \equiv y''$ etc.

 $m \equiv 0 + \Delta$. His positis sint coordinatae rectangulae

Brevitatis denique causa sit
$$a = 2 \cdot 90^{\circ} - b'$$

 $b = 4 \cdot 90^{\circ} - b' - b''$
 $c = 6 \cdot 90^{\circ} - b' - b'' - b'''$
 $d = 8 \cdot 90^{\circ} - b' - b'' - b''' - b^{IV}$ etc.

Totum autem negotium optime absolvitur praevia determinatione coordinatarum x, x'.. et y, y'... quarum valores sequenti modo inveniri possunt.

Pro primis nullo negotio habemus $x \equiv \cos m$ et $y \equiv \sin m$. Pro secundis evit $b'aa' \equiv b' - Aac - 90^{\circ} \equiv b + b' - 2.90$ unde $x' \equiv \cos m + a \cos (m - a)$ $y' \equiv \sin m + a \sin (m - a)$.

Pro tertiis $b'a'a = 90 - baa' = 3 \cdot 90 - b - b'$ et b''a'a'' = b' - b'a'a - 90 unde $b'a'a'' = b + b' + b'' - 4 \cdot 90$ et hinc $x'' = \cos m + 2 \cos (m - a) + \beta \cos (m - b)$ $y' = \sin m + 2 \sin (m - a) + \beta \sin (m - b)$

unde jam in genere pro centro epicycli ultimi concludimus

X=cos. $m+\alpha$ cos. $(m-a)+\beta$ cos. $(m-b)+\gamma$ cos. $(m-c)+\beta$ cos. $(m-d)+\gamma$ sin. $m+\alpha$ sin. $(m-a)+\beta$ sin. $(m-b)+\gamma$ sin. $(m-c)+\beta$ sin. $(m-d)+\gamma$ vel quantitatibus b'-b''-b''-1. restitutis

X=cos. $m-\alpha$ cos. $(m+b')+\beta$ cos. $(m+b'+b'')-\gamma$ cos. $(m+b'+b'')+\gamma$ cos

Inventis autem quantitatibus X et Y facile obtinentur valores quantitatum \oplus , \triangle et r virtute aequationum sequentium

$$tg. \Phi = \frac{Y}{X}, tg. \Delta = \frac{Xy - Yx}{Xx + Yy}$$
 et $r = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{X}{\cos. \Phi} = \frac{Y}{\sin. \Phi}$.

5. Evolvamus primo valores quantitatis Φ et Δ .

Aequatio praccedens tg. $\Phi = \frac{Y}{X}$ confestim praebebit

tg. $\Phi = \frac{\sin m + \alpha \sin (m - a) + \beta \sin (m - b) + \gamma \sin (m - c) +}{\cos m + \alpha \cos (m - a) + \beta \cos (m - b) + \gamma \cos (m - c) +} \dots$ (I).

Aequatio autem tg. $\Delta = \frac{xy - yx}{xx + yy}$ quae etiam per tg. $\Delta = \frac{tg.m}{t + tg.m} \frac{tg.\Phi}{tg.\Phi}$ exprimi potest, si tang. Φ ex I substituitur, in sequentem abibit tg. $\Delta = \frac{(tg.m \cos m - \sin m) + \alpha (tg.m \cos m - a) - \sin m - a) + \beta (tg.m \cos (m - b) - \sin (m - b)) +}{(tg.m \sin m + \cos m) + \alpha (tg.m \sin (m - a) + \cos m - a) + \beta (tg.m \sin (m - b) + \cos (m - b)) +}$ unde multiplicato nominatore et denominatore per cos. m colligitur

tang.
$$\triangle = \frac{\alpha \sin n + \beta \sin b + \gamma \sin c + \delta \sin d +}{1 + \alpha \cos a + \beta \cos b + \gamma \cos c + \delta \cos d +}$$
. (II)

quae acquatio etiam per sequentem dari poterit $tg. \triangle = \frac{\alpha \sin b' - \beta \sin (b' + b'') + \gamma \sin (b' + b'' + b''') - \delta \sin (b' + b'' + b''' + b^{1})}{1 - \alpha \cos b' + \beta \cos (b' + b'') - \gamma \cos (b' + b'' + b''') + \delta \cos (b' + b'' + b''' + b^{1})}$

6. Substitutis denique valoribus inventis ipsarum X et Y in aequatione $r^2 = X^2 + Y^2$ erit

$$r^{2} = 1 + \alpha^{2} + \beta^{2} + \gamma^{2} + \delta^{2} + \dots + \alpha_{n}^{2}$$

$$+ 2(\alpha \cos a + \beta \cos b + \gamma \cos c + \dots + \alpha_{n} \cos a_{n})$$

$$+ 2\alpha(\beta \cos (b - a) + \gamma \cos (c - a) + \delta \cos (d - a) + \dots + \alpha_{n} \cos (a_{n} + a))$$

$$+ 2\beta(\gamma \cos (c - b) + \delta \cos (d - b) + \epsilon \cos (e - b) + \dots + \alpha_{n} \cos (a_{n} - b))$$

$$+ 2\gamma_{n-1} (\alpha_{n} \cos (a_{n} - a_{n-1}))$$
ubi lex progressionis aperta est.

7. Antequam ulterius progrediamur, investigemus valores angulorum singulorum aAa', a'Aa'' etc., ex quibus \triangle congestus est, qui auguli sunt magnitudines apparentes radiorum primi, secundi, tertii epicycli et oculo in centro A circuli primi fixo. Sit $aAa' \equiv \triangle^{\circ} \cdot {}^{1}$, $a'Aa' = \Delta^{1} \cdot 2$, $a''Aa' = \Delta^{2} \cdot 3$. unde $\Delta = \Delta^{0} \cdot 1 + \Delta^{1} \cdot 2 + \Delta^{2} \cdot 3 + \Delta^{3} \cdot 4$ et quaeratur valor quantitatis Δ^{n+n+1} sive magnitudo apparens semidiametri $(n+1)^{ti}$ epicyeli.

Posito numero epicyclorum n, erit

$$\text{tg. } \Delta = \frac{\alpha \sin a + \beta \sin b + \gamma \sin c ... + \alpha_n \sin a_n}{+\alpha \cos a + \beta \cos b + \gamma \cos c ... + \alpha_n \cos a_n} \\
 \text{ubi. } a_n = 2 \cdot n \cdot 90^\circ - b' - b' - b'' - b'' ... - b_n \text{ et} \\
 \sigma_n = \alpha = \beta = \gamma \text{ pro } n = 1 = 2 = 3 \\
 b_n = b' = b'' = b''' \\
 a_n = \alpha = b = c.$$

Hinc etiam, si numerus epicyclorum est n + 1

tg.
$$\triangle' = \frac{\alpha \sin a + \beta \sin b + \cdots + \alpha_n \sin a_n + \alpha_{n+1} \sin a_{n+1}}{1 + \alpha \cos a + \beta \cos b + \cdots + \alpha_{n+1} \cos a_{n+1}}$$

Ast tg.
$$(\Delta' - \Delta) = \frac{tg.\Delta' - tg.\Delta}{1 + tg.\Delta'ig.\Delta}$$
 et $\Delta' - \Delta = \Delta^{n.n+1}$

unde, substitutione facta, post rite peractam reductionem, habebimus tang. $\triangle^{n+1} = \frac{\alpha_{n+1} \cdot [f \sin \alpha_{n+1} + g \cos \alpha_{n+1}]}{f^2 + g^2 + \alpha_{n+1} [f \cos \alpha_{n+1} + g \sin \alpha_{n+1}]}$

ubi
$$f = 1 + \alpha \cos a + \beta \cos b ... + \alpha_n^{\dagger} \cos \alpha_n$$

 $g = \alpha \sin a + \beta \sin b ... + \alpha_n \sin \alpha_n$.

Posito proinde n = 0, 1, 2, 3... habebimus $\operatorname{tg}.\Delta^{\circ \cdot 1} = \frac{\alpha \sin \pi a}{1 + \pi a \cos a}$

$$\lg \cdot \triangle^{t \cdot 2} = \frac{\beta \sin b + \alpha \beta \sin (b - a)}{1 + \alpha^2 + \beta \cos b + \alpha \beta \cos (b - a) + 2 \alpha \cos a}$$

tg.
$$\triangle^2 \cdot 3 = \frac{\gamma \sin c + \beta \gamma \sin (c - a) + \beta \gamma \sin (c - b)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma \cos c + \alpha \gamma \cos (c - a) + \beta \gamma \cos (c - b) + 2\alpha \cos a + 2\beta \cos b + \alpha \beta \cos (b - a)}$$

$$tg. \triangle^{3\cdot4} = \frac{\delta \left[\sin d + \alpha \sin d - a\right] + \beta \sin (d - b) + \gamma \sin (d - c)}{\left(-\frac{\alpha - \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha \cos a + \beta \cos b) + \gamma \cos c\right] + \alpha \left[\beta \cos (a - b) + \gamma \cos (a - c)\right]} + 2\beta \left[\gamma \cos (b - c)\right] + \delta \left[\cos d + \alpha \cos (d - a) + \beta \cos (d - b) + \gamma \cos (d - c)\right]}$$

et in genere pro quovis numero epicyclorum

tang.
$$\Delta^{n \cdot n + 1} = \frac{A_n}{B_n}$$
 ubi
$$A_n = \sigma_{n+1} \begin{bmatrix} \sin a_{n+1} + \sin (a_{n+1} - a) + \beta \sin (a_{n+1} - b) \\ + \gamma \sin (a_{n+1} - c) + \alpha_n \sin (a_{n+1} - a_n) \end{bmatrix}$$

$$B_n = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha_n^2 + \alpha_{n+1} \cdot [\cos a_{n+1} + \alpha \cos (a_{n+1} - a_n)]$$

$$+ \beta \cos (a_{n+1} - b) + \alpha_n \cos (a_{n+1} - a_n) \end{bmatrix}$$

$$+ 2 (\alpha \cos a + \beta \cos b + \gamma \cos c + \alpha_n \cos a_n)$$

$$+ 2 (\alpha \cos a + \beta \cos b + \gamma \cos c ... + 2_n \cos a_n)$$

$$+ 2 (\beta \cos (a - b) + \gamma \cos (a - c) + \delta \cos (a - d ... + a_n \cos (a - a_n))$$

$$+ 2 \beta (\gamma \cos (b - c) + \cos (b - d) + \cos (b - e) ... + a_n \cos (b - a_n))$$

$$+ 2 \gamma (\cos (c - d) + \varepsilon \cos (c - e) + \zeta \cos (c - f) ... + a_n \cos (c - a_n)).$$

3. Oritur hinc demonstratio facillima theorematis sequentis.

Si quantitates C_0 C_1 C_2 C_3 ita sese habeant, ut, retentis valoribus quantitatum A_0 A_1 A_2 .. et B_0 B_1 B_2 .. quibus in §. 7. usi sumus, aequationes sequentes simul locum obtineant

$$tg.C_{o} = \frac{A_{o}}{B_{o}}, tg.C_{1} = \frac{A_{t}}{B_{1}}, tg.C_{2} = \frac{A_{2}}{B_{2}}...tg.C_{n} = \frac{A_{n}}{B_{n}}$$
erit $C = C_{o} + C_{1} + C_{2} + C_{3}... + C_{n}$
ubi
$$tang.C = \frac{\alpha \sin b' - \beta \sin (b' + b'') + \gamma \sin (b' + b'' + b''') ... + \alpha_{n} \sin (b' - b'' ... + b^{n})}{1 - \alpha \cos b' + \beta \cos (b' + b'') - \gamma \cos (b' + b'' + b''') ... + \alpha_{n} \cos (b' + b'' ... + b^{n})}.$$
Pro casu singulari e. g. ubi $a = b = c = d$. erit

$$tg. C_0 = \frac{\alpha \sin \alpha}{1 + \alpha \cos \alpha}$$

$$tg. C_1 = \frac{\beta \sin \alpha}{1 + \alpha^2 + \beta \cos \alpha + \alpha\beta + 2\alpha \cos \alpha}$$

$$tg. C_2 = \frac{\gamma \sin \alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cos \alpha + 2\alpha\beta + \gamma(\cos \alpha + \alpha + \beta)}$$

$$tg. C_3 = \frac{\delta \sin \alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)\cos \alpha + 2\alpha(\beta + \gamma) + 2\beta\gamma + \delta(\cos \alpha + \alpha + \beta + \gamma)}$$

$$ubi \text{ lex progression is a perta est. Facto proinde}$$

$$tg. C_1 = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\sin \alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)\cos \alpha}$$

$$tg. C_3 = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\sin \alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)\cos \alpha}$$

tg. C =
$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta.) \sin \alpha}{1 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta.) \cos \alpha}$$
 habebinus ut supra C = C₀ + C₁ + C₂ + C₃ . . .

Quodsi majoris simplicitatis causa in aequationibus antecedentibus ponatur $\alpha = \beta = \gamma \dots = 1$ obtinebimus

tg.
$$C_0 = \frac{\sin a}{1 + \cos a}$$

tg. $C_1 = \frac{\sin a}{3 + 3 \cos a}$
tg. $C_2 = \frac{\sin a}{7 + 5 \cos a}$
tg. $C_3 = \frac{\sin a}{13 + 7 \cos a}$
tg. $C_4 = \frac{\sin a}{21 + 9 \cos a}$ et
tg. $C_7 = \frac{\sin a}{21 + 9 \cos a}$

Posito insuper tg.
$$C = \frac{n \sin a}{1 + n \cos a}$$
 habebinus ut supra $C = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n$.

Calculi probandi causa substituamus in aequatione

$$tg. (C_0 + C_1 + C_2) = \frac{tg. C_0 + tg. C_1 + tg. C_2 - tg. C_0 tg. C_1 tg. C_2}{1 - tg. C_0 tg. C_1 - tg. C_0 tg. C_2 - tg. C_1 tg. C_2}$$

valores datos quantitatum tg. C_0 , tg. C_1 , tg. C_2 , habebimus omnibus terminis ad nominatorem 3 $(1 + \cos a)^2 (7 + 5\cos a)$ reductis tg $(C_1 + C_2 + C_3) = \frac{3\sin a(7 + 5\cos a) + \sin a(7 + 5\cos a)}{3\sin a(7 + 5\cos a) + \sin a(7 + 5\cos a)}$

tg. $(C_0 + C_1 + C_2) = \frac{3\sin a(7 + 5\cos a) + \sin a(7 + 5\cos a) + 3\sin a(1 + \cos a - \sin a(1 + \cos a))}{3(1 + \cos a)(7 + 5\cos a) - (1 + \cos a)(7 + 5\cos a) - 4\sin^2 a}$ quae aequatio omnibus rite contractis in sequentem abit

tg.
$$(C_0 + C_1 + C_2) = \frac{3 \sin a}{1 + 3 \cos a}$$
,

quae formula utique cum expressione generali tg. $C = \frac{n \sin a}{1 + n \cos a}$ pro n = 3 identica est.

Ponendo denique $a = 90^{\circ}$ prodit casus omnium simplicissimus, quo si sumatur

tg. $C_0 \equiv 1$ tg. $C_1 = \frac{1}{3}$ tg. $C_2 = \frac{1}{7}$ tg. $C_3 = \frac{1}{13}$. . tg. $C_n \equiv \frac{T}{n^2 + n + 1}$ et tang. $C \equiv n$, habebimus ut antea

$$C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_n.$$

Theorema hoc multis et quidem elegantissimis disquisitionibus evolveudis occasionem suppeditat, quibus hic, ut a fine proposito prorsus alienis, supersedendum est.

9. Jam ut ad epicyclornm theoriam redeamus, praeprimis adnotandum est valorem inventum quantitatis Δ per tangentem hujus anguli expressum omnium quidem simplicissimum, comparationi autem cum aliis expressionibus e. g. aequationis centri, nequaquam idoneum csse. Quem proinde in finem expressio data in aliam transmutetur, quae valorem anguli Δ per sinus angulorum multiplorum a, b, c. exhibet.

Ponamus primo, ne prolixitate calculi nimis obruamur, $b' = b'' = b''' \dots = 2 \cdot 90 - m$

vel quod eodem redit $a \equiv m$, $b \equiv 2m$, $c \equiv 3m$, $d \equiv 4m$ etc. quo facto erit aequatio (II) §. 5.

tang.
$$\Delta = \frac{\alpha \sin m + \beta \sin 2m + \gamma \sin 3m + \delta \sin 4m + \gamma}{1 + \alpha \cos m + \beta \cos 2m + \gamma \cos 3m + \delta \cos 4m + \gamma}.$$

Ponatur primo $A = \alpha \sin m + \beta \sin 2 m + \beta \cos 2 m + \beta \cos 2 m + \alpha \cos \Delta = \frac{A}{1+B}$ et hinc

$$\Delta = \frac{A}{1+B} - \frac{1}{3} \cdot \frac{A^3}{(1+B)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{A^5}{(1+B)^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{A^7}{(1+B)^7} +$$

Habemus autem

$$\frac{1}{(1+B)^n} = 1 - nB + \frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2} B^2 - \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} C^3 + \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B^4$$

unde aequatio penultima in sequentem abit

$$\Delta = A \left(1 - B + B^{2} + B^{3} + \right)$$

$$- \frac{A^{3}}{3} \left(1 - 3B + 6 B^{2} - 10 B^{3} + \right)$$

$$+ \frac{A^{5}}{5} \left(1 - 5B + 15 B^{2} - 35 B^{3} + \right)$$

$$- \frac{A^{7}}{7} \left(1 - 7B + 28 B^{2} - 84 B^{3} + \right) + C$$

quae aequatio, omnibus productis rite evolutis, praebebit

$$\Delta = \alpha \sin m
-\frac{1}{2} (\alpha^2 - 2\beta) \sin 2m
+\frac{1}{3} (\alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma) \sin 3m
-\frac{1}{4} (\alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2 + 4\alpha\gamma - 4\beta) \sin 4m + 6\alpha$$

Posito ergo brevitatis causa

$$\Delta = A \sin m - \frac{1}{2}B \sin 2m + \frac{1}{3}C \sin 3m - \frac{1}{4}D \sin 4m + \text{ erit}$$

$$A = \epsilon$$

$$-\frac{5}{2} = \beta - \frac{1}{2}\alpha^{2}$$

$$\frac{C}{3} = \gamma - \frac{1}{2} \cdot 2\alpha\beta + \frac{1}{3}\alpha^{3}$$

$$-\frac{D}{4} = -\frac{1}{2}(2\alpha\gamma + \beta^{2}) + \frac{1}{3} \cdot 3\alpha^{2}\beta - \frac{1}{4}\gamma^{4}$$

$$\frac{E}{5} = \epsilon - \frac{1}{2}(2\alpha\beta + 2\beta\gamma) + \frac{1}{3}(3\alpha^{2}\gamma + 3\alpha\beta^{2}) - \frac{1}{4} \cdot 4\gamma^{3}\beta + \frac{7}{5} \cdot \alpha^{5}.$$

Quoad legem progressionis horum terminorum, quivis corum ut differentiale termini- praecedentis spectari poterit, siquidem β ut differentiale ipsius α , et γ ipsius β etc. consideretur, hac cum limitatione, ut sola ultima cujusvis factoris litera mutetur in proxime sequentem, si litera penultima in ordine alphabetico α β γ δ non occupet locum penultimum et ut duae postremae literae simul mutentur, si illae etiam in ordine alphabetico sibi proxime sequantur. E. G. si ex quarto termino D quintus E eliciendus est dabit differentiale quantitatis δ in quarto. quantitatem ε in quinto

ubi notandum, post differentiationem literae penultimae productum per novum sequentis literae exponentem dividendum esse. Hac ratione ex quinto termino invenietur sextus

$$-\frac{1}{6} = \zeta - \frac{1}{3} (2 \alpha \varepsilon + 2 \beta \delta + \gamma^{2}) + \frac{1}{3} (3 \alpha^{2} \delta + 6 \alpha \beta \gamma + \beta^{3}) - \frac{1}{4} (4 \alpha^{3} \gamma + 6 \alpha^{2} \beta^{2}) + \frac{1}{5} \cdot 5 \alpha^{4} \beta - \frac{1}{6} \cdot \alpha^{6}$$

et inde septimus

et eodem modo sequentes termini, quorum proinde evolutio nullis jam difficultatibus obnoxia erit.

Quod si quis easdem quantitates A, B, C.. forma scrierum recurrentium exprimere amet, facili negotio inveniet

A =
$$\alpha$$

B = $A\alpha - 2\beta$
C = $B\alpha - A\beta + 3\gamma$
D = $C\alpha - B\beta + A\gamma - 4\delta$
E = $D\alpha - C\beta + B\gamma - A\delta + 5\varepsilon$
F = $E\alpha - D\beta + C\gamma - B\delta + A\varepsilon - 6\zeta$ etc.

10. I. Posito
$$\beta = \gamma$$
. = 0 erit $A = \alpha$, $B = \alpha^2$, $C = \alpha^3$.

et $\Delta = \frac{\alpha \sin n}{1 + \alpha \cos n}$

 $\triangle = \alpha \sin m - \frac{\alpha^2}{2} \sin 2m + \frac{\alpha^3}{3} \sin 3m - \frac{\alpha^4}{4} \sin 4m + \frac{\alpha^3}{4} \sin 4m + \frac{\alpha^4}{4} \sin 4m + \frac{\alpha^4}{4}$

II. Quodsi autem $\alpha = \sqrt[2]{\beta} = \sqrt[3]{\gamma} = \sqrt[4]{\delta}$. vel, quod eodems redit $A = \alpha$, $B = -\alpha^2$, $C = \alpha^3$, $D = -\alpha^4$. habebimus $\operatorname{tg.} \Delta = \frac{\alpha \sin m + \alpha^2 \sin 2m + \alpha^3 \sin 3m + \alpha^4}{1 + \alpha \cos m + \alpha^2 \cos 2m + \alpha^3 \cos 3m + \alpha^4}$ et $\Delta = \alpha \sin m + \frac{\alpha^2}{2} \sin 2m + \frac{\alpha^3}{3} \sin 3m + \frac{\alpha^4}{4} \sin 4m + \alpha^4$

III. Posita autem in I. quantitate $\alpha = -\alpha$, comparatisque valoribus quantitatis Δ in I. et II., erit

$$\frac{\sin m + \alpha \sin 2m + \alpha^2 \sin 3m + \alpha^3 \sin 4m + \dots}{1 + \alpha \cos m + \alpha^2 \cos 2m + \alpha^3 \cos 3m + \dots} = \frac{\sin m}{1 - \alpha \cos m}$$

cujus aequationis veritas facile a posteriori probatur. Hinc autem sequitur, angulum Δ per aequationem tang. $\Delta = \frac{\alpha \sin m}{1 - \alpha \cos m}$ datum pari modo vel per unicum epicyclum vel per innumerabiles exhiberi possc.

IV. Ponamus B = C = D. = 0 hoc est $2\beta = \alpha^2$, $3\gamma = \alpha\beta$, $4\delta = \alpha\gamma$, $5\varepsilon = \alpha\delta$., quo facto habebitur $\tan \beta \cdot \Delta = \frac{\alpha \sin m + \frac{\alpha^2}{1.2} \sin 2m + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \sin 3m + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \sin 4m + \frac{\alpha}{1 + \alpha \cos m} + \frac{\alpha^2}{1.2} \cos 2m + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cos 3m + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \cos 4m + \cot \Delta = \alpha \sin m$.

V. Denique si $\beta = -\alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = -\alpha^4$. velt $A = \alpha$, $B = 3 \circ^2$, $C = 7 \circ^3$, $D = 15 \alpha^4$ erit tang. $\Delta = \frac{\alpha \cdot \sin \cdot m - \alpha^2 \sin \cdot 2m + \alpha^3 \sin \cdot 3m - \alpha^2}{1 + \alpha \cos \cdot m - \alpha^2 \cos \cdot 2m + \alpha^3 \cos \cdot 3m - \alpha^2}$ et $\Delta = \alpha \sin \cdot m - \frac{3}{2} \alpha^2 \sin \cdot 2m + \frac{7}{3} \alpha^3 \sin \cdot 3m - \frac{15}{4} \alpha^4 \sin \cdot 4m \dots + \frac{(2^n - 1)}{n} \alpha^2 \sin \cdot nm$

quas series, una cum aliis ex aequatione generali data facili negotio deducendis, utpote memoratu haud indignis, alias accuratius perquiram.

41. Supposuimus hucusque in investigatione quantitatis Δ_r angulos a, b, c. esse quantitates inter se commensurabiles et quidem $m \equiv a \equiv \frac{b}{2} \equiv \frac{c}{3} \equiv \frac{d}{4}$. unde sequitur, ope aequationum praecedentium non nisi series hujus formae

 $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \sin 3x + \alpha_4 \sin 4x +$ per epicyclos exprimi posse. Restat igitur adplicatio theoriae epicyclorum ad series generalissimas sub hac forma contentas

$$\alpha_1 \sin x_1 + \alpha_2 \sin x_2 + \alpha_3 \sin x_3 + \cdots$$

ubi quantitates α_1 α_2 α_3 .. et x_1 x_2 x_3 .. arbitrariae et inter se independentes assumuntur. Hucusque nimirum totum negotium non nisi in determinatione radiorum epicyclorum versabatur, nunc au tem etiam motum cuivis radio proprium vel, quod codem redit, revolutiones epicyclorum singulas in auxilium vocabimus. Ad inveniendam hanc solutionem si quis methodo §. 9. explicata uti vellet, confestim sese ad inextricabiles fere calculos perductum videret. Solutio autem sequens, quam pluribus aliis rejectis in medium adfero quamque cadem facilitate ad casum simplicem §. 9. tractatum adplicare possumus, quoad calculi commoditatem nihil amplius desiderandum relinquere mihi videtur.

Problema.

Sit tang.
$$\Delta = \frac{\alpha \sin a + \beta \sin b + \gamma \sin c + \delta \sin d + \gamma}{1 + \alpha \cos a + \beta \cos b + \gamma \cos c + \delta \cos d + \gamma}$$
,

quae est expressio maxime generalis quantitatis tang. Δ § 7 inventa. Quaeratur valor quantitatis Δ per scriem secundum sinus angulorum a, b, c.. eorumque multiplorum procedentem.

Jam ponatur log. nat. e = 1 et brevitatis causa

$$\Phi^{a} = e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}$$

$$\Psi^{a} = e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}$$

quo pacto aequatio data abit in sequentem

$$\frac{e^{2\Delta V-1}-1}{e^{2\Delta V-1}+1} = \frac{\alpha \psi^a + \beta \psi^b + \gamma \psi^c + \delta \psi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \delta \phi^d + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \gamma \phi^c + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \beta \phi^b + \frac{1}{2 + \alpha \phi^a + \frac$$

unde facile concluditur

$$e^{2\Delta \sqrt{-1}} = \frac{2 + \alpha(\Phi^a + \psi^a) + \beta(\Phi^b + \psi^b) + \gamma(\Phi^c + \psi^c) + \alpha(\Phi^a - \psi^a) + \beta(\Phi^b - \psi^b) + \gamma(\Phi^c - \psi^c) + \alpha(\Phi^a - \psi^a) + \beta(\Phi^b - \psi^b) + \gamma(\Phi^c - \psi^c) + \alpha(\Phi^a - \psi^a) + \beta(\Phi^a - \psi^b) + \alpha(\Phi^a - \psi^a) + \alpha(\Phi^a - \psi^a)$$

et hine substitutis valoribus quantitatum Ф et V erit

$$e^{2\Delta V-1} = \frac{1+\alpha e^{\alpha V}-1+\beta e^{bV}-1+\gamma e^{cV}-1+}{1+\alpha e^{\alpha V}-1+\beta e^{-bV}-1+\gamma e^{-cV}-1+}.$$

Sumtis proinde logarithmis, erit

$$2\Delta \gamma - 1 = \log \cdot (1 + \alpha e^{\alpha \gamma' - 1} + \beta e^{b \gamma' - 1} + \gamma e^{c \gamma' - 1} +) - \log \cdot (1 + \alpha e^{-\alpha \gamma' - 1} + \beta e^{-b \gamma' - 1} + \gamma e^{-c \gamma' - 1} +).$$

Iam si σ, β, γ... sunt quantitates datae et

log. $(1 + \alpha + \beta + \gamma + \gamma + \gamma + \gamma) = A - \frac{\alpha}{2} + \frac{C}{3} - \frac{D}{4} + \frac{E}{5} - \gamma$ ubi A, B₂ C . . sunt quantitates quaerendae, facili negotio invenitur

$$0 = A - \alpha$$

$$0 = B - A\alpha + 2\beta$$

$$0 = C - B\alpha + A\beta - 3\gamma$$

$$0 = D - C\alpha + B\beta - A\gamma + 4\delta$$

$$0 = E - D\alpha + C\beta - B\gamma + A\delta - 5\varepsilon \text{ etc.}$$
I.

Substitutis ergo pro α , β , γ ... nostris quantitatibus $\alpha e^{\alpha \sqrt{-1}}$, $\beta e^{b \sqrt{-1}}$, $\gamma e^{c \sqrt{-1}}$ evolutisque valoribus A, B, C... ope aequationum conditionalium I, vocetur summa

$$A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C - \frac{1}{4}D + .. = S.$$

Substitutis deinde eodem modo pro α , β .. quantitatibue $\alpha e^{-a\gamma'-1}$, $\beta e^{-b\gamma'-1}$,.. sit summa

$$A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C - .. = S.$$

Quibus expeditis confestim habemus

$$\Delta = \frac{S - S'}{2\sqrt{-1}}$$

His proinde substitutionibus rite peractis omnibusque ope aequationis

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-e}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

reductis, invenietur

$$\Delta = \alpha \sin a
+ \beta \sin b - \frac{1}{2} \alpha^{2} \sin 2a
+ \gamma \sin c - \frac{1}{2} \cdot 2 \alpha \beta \sin (a + b) + \frac{1}{3} \cdot \alpha^{3} \sin 3a^{\alpha}
+ \sin d - \frac{1}{2} (2\alpha \gamma \sin (a + c) + \beta^{2} \sin 2b)
+ \frac{1}{3} \cdot 3\alpha^{2} \beta \sin (2a + b) - \frac{1}{4} \alpha^{4} \sin 4a
+ \varepsilon \sin e - \frac{1}{2} (2\alpha^{5} \sin (a + d) + 2\beta \gamma \sin (b + c))
+ \frac{1}{2} (3\alpha^{2} \gamma \sin (2a + c) + 3\alpha\beta^{2} \sin (a + 2b))
- \frac{1}{4} \cdot 4\alpha^{3} \beta \sin (3a + b) + \frac{1}{5} \alpha^{5} \sin 5a$$

$$+ \frac{1}{2} \sin f - \frac{1}{2} \left(2\alpha \epsilon \sin (a + e) + 2\beta \delta \sin (b + d) + \gamma^{2} \sin 2c \right) + \frac{1}{3} (3\alpha^{2} \delta \sin (2\alpha + d) + 6\alpha \beta \gamma \sin (\alpha + b + c) + \beta^{3} \sin 3b) - \frac{1}{4} \left(4\alpha^{3} \gamma \sin (3\alpha + c) + 6\alpha^{2} \beta^{2} \sin 2 (\alpha + b) \right) + \frac{1}{5} \cdot 5\alpha^{4} \beta \sin (4\alpha + b) - \frac{1}{6} \alpha^{6} \sin 6\alpha \dots$$

ubi lex progressionis sinuum in aprico est, lex autem coëfficientium $\alpha \beta \gamma$ eadem prorsus, quae jam § 9 observata et explicata est. Posito $a \equiv m_s$ $b \equiv 2m_s$ $c \equiv 3m$ series data in illam § 9 inventam abit.

12. Jam forma ipsa expressionis maxime generalis quantitatis Δ docet, quantitatem

 $\Delta = \alpha_1 \sin x_1 + \alpha_2 \sin x_2 + \alpha_3 \sin x_3 + \alpha_4 \sin x_1 + \alpha_2 \sin x_2 + \alpha_3 \sin x_3 + \alpha_4 \sin x_1 + \alpha_4 \sin x_2 + \alpha_5 \sin x_3 + \alpha_5 \cos x_4 + \alpha_5 \sin x_4 + \alpha_5 \sin x_4 + \alpha_5 \sin x_4 + \alpha_5 \sin x_5 + \alpha_5 \cos x_4 + \alpha_5 \sin x_5 + \alpha_5 \cos x_5 +$

 $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \sin 3x + \alpha_4 \sin 4x +$

omnes autem horum planetarum actiones simul sumtae per epicyclos repraesentari non possunt, cum eac per seriem dantur, quae in ultima §. 11. acquatione non continetur, supposita nimirum dispositione situum epicyclorum, quae initio §. 4 explicata est. Hac de causa praecipuae inaequalitates lunares in longitudine

ope quantumvis epicyclorum exprimi non possunt, quamvis hucusque suppositum sit, quamlibet novam inaequalitatem per novum quoque epicyclum prioribus adjunctum absolvi posse: chaque inégalité nouvelle que l'art d'observer faisait découvrir, surchargeait le système d'un nouvel epicycle. (Expos. du syst. du Monde. 3. édit.)

13. Absoluta jam theoria generali epicyclorum ad applicationem acquationum inventarum progrediamur.

Problema.

Invenire systema epicyclorum, quo motus planetae ellipticus exacte repraesentatur.

Conditioni hujus problematis pluribus modis satisficri potest. Diametri enim epicyclorum vel revolutiones centrorum eorum in expressione ulima §. 11. varias suppeditant quantitates incognitas, quas in finem propositum apte determinare possumus. Ne autem prolixitate calculi nimis obruamur, revolutiones omnium centrorum inter se aequales assumamus, ita quidem, ut sola diametrorum determinatio restet.

Sit jam t revolutio puncti a vel centri epicycli primi, t' revolutio centri a' epicycli secundi, t'' tertii etc. unde facile concluduntur aequationes sequentes

 $t' = \frac{m \cdot t}{180 - b'} = \frac{m}{a}t$, $t' = \frac{m}{18} \frac{t}{-b''} = \frac{m}{b-a}$, $t'' = \frac{m}{180 - b'''} = \frac{m}{c-b}$ etc. Quodsi ponatur $b'' \equiv b'' \equiv b^{1V}$. $\equiv 0$ et $\alpha - \beta + \gamma - \delta + \equiv 0$ erit $\Delta \equiv 0$ vel motus planetae medius non immutabitur, quantumvis etiam epicyelorum numerum in auxilium vocaveris.

Quodsi autem assumatur $t \equiv nt' \equiv n't'' \equiv n''t'''$. erit $b \equiv 180 - n \cdot m$, $b'' \equiv 180 - n' \cdot m$, $b'' \equiv 180 - n'' \cdot m$ unde (§. 5)

tg.
$$\triangle = \frac{\alpha \sin n m + 3 \sin (n + n') m + \gamma \sin (n + n' + n'') m}{1 + \alpha \cos n m + \beta \cos (n + n') m + \gamma \cos (n + n' + n'') m}$$

Ponamus jam, ut ad solutionem problematis nostri redeamus, $a \equiv m$, $b \equiv 2m$, $c \equiv 3m$ quo facto ultima acquatio §. 11. in eam transit, quae §. 9. evoluta est. Acquatio autem centri elliptica est. m denotante anomaliam mediam ab aphelio computatam,

— $(2 \varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^3 + \frac{5}{90} \varepsilon^5 +)$ sin. $m + (\frac{5}{4} \varepsilon^2 - \frac{11}{24} \varepsilon^4)$ sin. 2m - nbi ε executivitatem designat, semiaxe majori unitati aequale posito. Indicata nunc anomalia vera per ω positoque $\Delta \equiv m - \omega$, habebimus aequationes conditionales pro determinandis vadiis $\alpha \beta \gamma$ epicyclorum sequentes

$$\begin{array}{l} \alpha = 2 \ \varepsilon - \frac{1}{4} \ \varepsilon^{3} + \frac{5}{96} \ \varepsilon^{5} \\ \frac{\alpha^{2}}{2} - \beta = \frac{5}{4} \ \varepsilon^{2} - \frac{11}{54} \ \varepsilon^{4} + \frac{17}{192} \ \varepsilon^{6} \\ \frac{\alpha^{3}}{3} - \alpha \beta + \gamma = \frac{13}{12} \ \varepsilon^{3} - \frac{43}{64} \ \varepsilon^{5} \\ \frac{\alpha^{4}}{4} - \alpha^{2} \beta + \frac{1}{2} \beta^{2} + \alpha \gamma - \delta = \frac{103}{96} \ \varepsilon^{4} - \frac{451}{490} \ \varepsilon^{6} \\ \frac{\alpha^{5}}{5} - \alpha^{3} \beta + \alpha^{2} \gamma + \alpha \beta^{2} - \alpha \delta - \beta \gamma + \varepsilon = \frac{1097}{960} \ \varepsilon^{5} \ \text{etc. etc.} \end{array}$$

quae acquationes, si lubet, etiam ad altiores excentricitatis potestates produci possunt. Hinc demum valores quantitatum α , β . facili negotio eliminantur. Ad quartam usque excentricitatis potestatem progredientes habebimus

radium circuli primi $\equiv 1$. . . secundi . $\alpha \equiv 2 \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4}$. . . tertii . . $\beta \equiv \frac{3}{4} \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{24}$. . . quarti . . $\gamma = -\frac{\varepsilon^3}{12}$. . . quinti . . $\delta = \frac{\varepsilon^4}{24}$

ita quidem, out motus ellipticus ad quartam usque excentricitatis potestatem per quatuor epicyclos exacte repraesentetur.

Sit $\varepsilon = 0$. 01 ideoque acquatio centri elliptica $m = \omega = 4125/35 \sin m = 25/78 \sin 2m + 0/22 \sin 3m$ quae pro $m = 45^{\circ}$ exhibet $\omega = 44^{\circ}$ 11/48 6

I. Aequatio tg.
$$\Delta = \frac{\alpha \sin m + \beta \sin 2m + 1}{1 + \alpha \cos m + \beta \cos 2m + 1}$$
 (§. 9.) praebet log. $\alpha = 8 \cdot 3010235$ log. $\beta = 5 \cdot 8750613$ log. $\gamma = 3 \cdot 0000000$ unde tang. $\Delta = \frac{0.0142168}{1.0141423}$, $\Delta = 0^{\circ} 48' 11'' 4$ et inde $\omega = 44^{\circ} 11' 48'' 6$.

II. Aequatio

 $\Delta = \alpha \sin m + (\beta - \frac{1}{2}\alpha^2) \sin 2m + (\gamma - \alpha\beta + \frac{\alpha^3}{3}) \sin 3m +$ suppeditat

$$\log \alpha = 8.3010235 \times \log (\frac{\alpha^2 - \beta}{2}) = 6.0969100$$

$$\log (\frac{3}{3} - \alpha + \gamma) = 4.0413927 \text{ unde}$$

$$\Delta = 2916''981 - 25''783 + 0''160 = 0^{\circ}48 \cdot 11''4.$$

III. Aequatio denique (I) §. 5. praebet tang.
$$\Phi = \frac{(i-\beta)\sin m - \gamma \sin 2m - \delta \sin 3m - \gamma \cos m + \gamma \cos 2m + \delta \cos 3m + \gamma \cos 3m + \gamma$$

unde positis $\gamma = \delta = 0$ quod omnino licitum est

tang.
$$\Phi = \frac{0.9999250 \text{ sin } m}{0.0199997 + 1.0000750 \text{ cos. } m}$$

 \log nominatoris = 9.8494525

log. denom. = 9.8616297

log. tang. $\phi = 9.9878228$, $\phi = 44^{\circ} 11' 48''6$ prorsus us supra.

Hac proinde ratione determinatio radiorum epicyclorum ad repraesentandam longitudinem ellipticam in orbita nullis jam difficultatibus obnoxia est simulque patet, si aequatio centri ad n^{tam} usque excentricitatis potestatem exacte determinanda sit, etiam n epicyclos in auxilium vocandos esse, si quidem, ut supposuimus, revolutiones omnes inter se aequales assumantur.

Progrediamur jam ad determinationem distantiarum planetae a sole.

14. In hunc finem evolvamns primo coordinatas rectangulas x y puncti cujusque ellipseos, supposito foco pro initio et distantia maxima pro axe abscissarum x. Jam si per e designemus excentricam anomaliam, habebimus

$$\frac{z}{a} = \frac{r}{a}\cos. \omega = \frac{\frac{r}{a} - 1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon + \cos. e$$

$$\frac{y}{a} = \frac{r}{a}\sin. \omega = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin. e$$

ubi a axem dimidium majorem designat.

Ut autem valores quantitatum cos. e et sin. e per anomaliam mediam m exprimantur, erit virtute aequationis notissimae $m \pm e + \varepsilon \sin e$ secundum problema D^{ni} Lagrange

$$\cos e = \cos m + \varepsilon \sin^2 m - \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial \sin^3 m}{\partial m} + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^2 \sin 4m}{\partial m^2}$$
 et eodem modo

$$\sin e = \sin m - \epsilon \sin m \cos m + \frac{\epsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot \partial m} \cdot \partial (\sin^2 m \cos m) - \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^2 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^2 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \cdot \partial^3 (\sin^3 m \cos m) + \frac{\epsilon^$$

quarum serierum termini generales sunt

$$\frac{\varepsilon^{n-1}}{1 \cdot \varepsilon \cdot 3 \cdot \cdot n} \cdot \frac{\partial^{n-2} \cdot \sin^{n} m}{\partial m^{n-2}} \text{ et } \frac{\varepsilon^{n}}{1 \cdot z \cdot 3 \cdot \cdot n} \cdot \frac{\partial^{n-1} \cdot (\sin^{n} m \cos^{n})}{\partial m^{n-1}}.$$

Ad evolvendam primam expressionem habemus

- 1

 $2^n \cos^n x = \cos n x + n \cos (n-2)x + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \cos (n-4)x +$ unde sequitur, si (n-2) est numerus par

$$+ 2^{n} \cdot \frac{\partial^{n-2} \cdot \cos^{n} x}{\partial x^{n-2}} = n^{n-2} \cos \cdot nx + \frac{n}{1} (n-2)^{n-2} \cos \cdot (n-2)x + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot n^{2}} (n-4)^{n-2} \cos \cdot (n-4)x + \dots$$

signum superius, si (n-2) formam 2 (2 p) et inferius, si (n-2) formam 2(2p+1) induit. Si autem (n-2) est numerus impar, habebitur

$$\frac{+ 2^{n} \cdot \frac{\partial^{n-2} \cdot \cos^{n}x}{\partial x^{n-2}} = n^{n-2} \sin nx + \frac{n}{1} (n-2)^{n-2} \sin (n-2)x}{+ \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} (n-4)^{n-2} \sin (n-4)x} +$$

signum superius vel inferius, prout (n-2) erit 2(2p+1)+1 vel 2(2p)+1.

Posito jam $x = 90^{\circ} - m$ assumtaque pro libitu quacumque harumquatuor expressionum e. g. tertia, ubi (n-2) = 2(2p+1) + 1, erit $\frac{2^{n} \cdot \partial^{n-2} \cdot \cos^{n} x}{\partial x^{n-2}} = \frac{2^{n} \partial^{n-2} \cdot \sin^{n} m}{\partial m^{n-2}}$

$$= n^{n-2} \sin n (90 - m) + \frac{n}{1} (n-2)^{n-2} \sin (n-2) (90 - m) +$$

eum autem $(n-2) \equiv 2(2p+1) + 1$ vel $\equiv 3$ vel 7 vel 11 et erit n vel 5 vel 9 vel 13 unde facile concluditur

sin.
$$n (90 - m) \equiv \cos nm$$

sin. $(n - 2) (90 - m) \equiv -\cos (n - 2) m$
sin. $(n - 4) (90 - m) \equiv \cos (n - 4) m$ et quocirca

$$\frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2.3..n-1} \cdot \frac{\partial^{n-2}.\sin^{n}m}{\partial m^{n-2}} = \frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2.3..n-1.2^{n}} \cdot \left\{ m^{n-2}\cos.nm - \frac{\pi}{1}(n-2)^{n-2}\cos.(n-2)m \right\} + \frac{n \cdot n - \pi}{1.2}(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)m + \frac{\pi}{1}(n-2)^{n-2}\cos.(n-4)m + \frac{\pi}{1}(n-2)^{n-2}\cos.(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)^{n-2}\cos.(n-4)$$

hine absque negotio invenitur

$$\frac{z}{1 - 2} = \cos c = \cos m - \frac{\epsilon}{1 - 2} (\cos c + 2m - 3)$$

$$+ \frac{\epsilon^{2}}{1 - 2 - 2^{2}} (3 \cos c + 3m - 3 \cos m)$$

$$- \frac{\epsilon^{3}}{1 - 2 - 3} (4^{2} \cos c + 4m - 4 + 2^{2} \cos c + 2m)$$

$$+ \frac{\epsilon^{4}}{1 - 2 - 3 + 2^{4}} (5^{3} \cos c + 5 - 3^{3} \cos c + 10 \cos m) - \frac{\epsilon^{4}}{1 - 2 - 3 + 2^{4}} (5^{3} \cos c + 5 - 3^{3} \cos c + 3m + 10 \cos m) - \frac{\epsilon^{4}}{1 - 2 - 3 + 2^{4}} (5^{3} \cos c + 5 - 3^{3} \cos c + 3m + 10 \cos m)$$

nbi lex progressionis aperta est.

Eadem ratione pro expressione altera y invenients $2^{n+1}\sin^n m\cos m = [\sin((n+1)m + \sin((n-1)m)] - \frac{n}{1} [\sin((n-1)m + \sin((n-3)m)] - \frac{+n}{1\cdot 2}[\sin((n-3)m + \sin((n-5)m)] - .$

Comparatis autem quartis, vel octavis vel duodecimis differentialibus hujus expressionis, erit

$$2^{n+1} \cdot \frac{\partial^{n-1} \cdot \sin^{n} m \cos^{n} m}{\partial m^{n-1}} = \left\{ \frac{[(n+1)^{n-1} \sin ((n+1)m + (n-1)^{n-1} \sin ((n-1)m)]}{\prod_{i=1}^{n} [(n-1)^{n-1} \sin ((n-1)m + (n-3)^{n-1} \sin ((n-3)m)]} \right\} + \frac{1}{(n-1)^{n-1} \sin ((n-3)^{n-1} \sin ((n-3)m + (n-5)^{n-1} \sin ((n-5)m)]} = \left\{ \frac{1}{(n-3)^{n-1} \sin ((n-3)^{n-1} \sin ((n-5)^{n-1} \sin ((n-5)^$$

unde faeile concluditur

$$\sin e = \sin m - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2m + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} (3 \sin 3m - \sin m) - \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} (4^2 \sin 4m - 8 \sin 2m) + \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) - \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 3^4 \sin 3m$$

eujus seriei lex ope expressionis praecedentis generalis aperta est., Invento autem valore sin. e, confestim habebitur

$$\frac{3}{a} = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \cdot e = \sin \cdot m - \frac{\varepsilon}{2} \sin \cdot 2m$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2^3} (3 \sin \cdot 3m - 5 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (4 \sin \cdot 4m - 5 \sin \cdot 2m)$$

$$+ \frac{\varepsilon^4}{3 \cdot 2^7} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 153 \sin \cdot 3m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot 5m - 22 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} (5^3 \sin \cdot m) - \frac{\varepsilon^3}{12} ($$

Quaeramus nunc valores quantitatum X, Y (§. 4.) pro epicylis.

Posito, ut supra, a = m, b = 2m, c = 3m vel quod eodem redit $b' = b'' = b''' \dots = 180 - m$ erit (§. 4.)

$$X = \alpha + (1 + \beta) \cos m + \gamma \cos 2m + \delta \cos 3m$$

 $Y = \sin m - \beta \sin m - \gamma \sin 2m - \delta \sin 3m - \delta \sin m$

Posito jam
$$\frac{\alpha}{a} = X$$
 erit $\alpha = -\frac{3}{2} \varepsilon$
 $\beta = -\frac{3}{8} \varepsilon^2 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{5}{2} \varepsilon^2 + \frac{5$

et posito
$$\frac{y}{a} = Y$$
 erit $\beta = \frac{5}{8} \epsilon^2$
 $\gamma = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$

qui valores sibi invicem contradicunt, unde sequitur, coordinatas x y ellipticas per epicyclorum hypothesin exprimi non posse, prossus eodem modo, ut jam supra pro unico epicyclo inventum fuerat.

15. Supra inventus fuerat valor quantitatis $r^2 \S 6$, qui posito $a \equiv m$, $b \equiv 2m$, $c \equiv 3m$ abit in sequentem expressionem simplicissimam

$$r^{2} = 1 + \alpha^{2} + \beta^{2} + \gamma^{2} + \delta^{2} + \varepsilon^{2} + 2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \cos m + 2(\beta + \alpha\gamma + \beta^{5} + \gamma\varepsilon + \cos 2m + 2(\gamma + \alpha\delta + \beta\varepsilon + \cos 3m + 2(\delta + \alpha\varepsilon + \cos 4m + 2(\varepsilon + \cos 5m + \cos$$

Jam si quis amat loco coordinatarum comparationem ipsorum radiorum in medium afferc, habebit pro motu eliptico

$$r^2 = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2 \varepsilon \cos \cdot e + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos \cdot 2 e$$

Supra autem habuimus

$$\cos c = \cos m - \frac{\varepsilon}{1+2}(\cos 2m-1) + \frac{\varepsilon^2}{1+2+2^2}(3\cos 3m-3\cos m)$$
 enjus seriei terminus generalis est secundum ea quae praecedunt,

$$\frac{+ s^{n}}{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot n \cdot 2^{n+1}}} \left\{ (n+1)^{n-1} \cos (n+1)m - \frac{n+1}{1} (n-1)^{n-1} \cos (n-1)m \right\} + \frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2} (n-3)^{n-1} \cos (n-3)m - 5$$
which $n = 1, 2, 3$...

Pro determinando autem valore quantitatis cos. 2e habebimus $\cos 2e = \cos 2m + 2\varepsilon \sin 2m \sin m - \frac{\varepsilon}{1+\partial m} \partial \cdot (2\sin 2m \sin^2 m) + \frac{\varepsilon^3}{1+2+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial m^2} \partial^2 \cdot (2\sin 2m \sin^2 m) - \text{etc.}$

cujus seriei terminus generalis est

$$\frac{1}{\frac{1}{n}} \frac{4 \varepsilon^n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\partial^n - 1 \cdot (\sin n + 1_m \cdot \cos m)}{\partial m^n}$$

Ex his antem, quae §. 14 allata sunt, facile concludimus fore-

$$-2^{n+2} \cdot \frac{\partial^{n+2} \cdot \sin^{-n+1} m \cos \cdot m}{\partial m^{n+2}} =$$

$$= \left(\frac{[(n-2)^{n+2} \sin \cdot (n+2) m + n^{n+2} \sin \cdot nm]}{n+1} \right)$$

$$= \frac{n+1}{n} \left[(n^{n+1} \sin \cdot nm + (n-2)^{n+2} \sin \cdot (n-2) m] \right]$$

$$+ \frac{n+1}{n} \left[(n-2)^{n+2} \sin \cdot (n-2) m - (n-4)^{n+2} \sin \cdot (n-4) m + (n-4) m \right]$$

unde triplici integratione adhibita sequitur

$$-2^{n+2} \iiint \frac{\partial^{n+2} \cdot (\sin n^{n+1} m \cdot \cos m)}{\partial m^n + 2} = -2^{n+2} \cdot \frac{\partial^{n-1} \cdot (\sin n^{n+1} m \cdot \cos m)}{\partial m^{n-1}}$$

$$= [(n+2)^{n-1} \cos (n+2) m + n^{n-1} \cos n m]$$

$$- \frac{n+1}{1} [n^{n-1} \cos n m + (n-2)^{n-1} \cos (n-2) m]$$

$$+ \frac{n+1}{1+2} [(n-2)^{n-1} \cos (n-2) m + (n-4)^{n-1} \cos (n-4) m]$$

unde nullo negotio derivatur cos. 2 e. Substitutis nune valoribus inventis cos. e et cos. 2 e in aequatione data

$$r^2 = 1 + \frac{\epsilon^2}{2} + 2 \epsilon \cos \cdot e + \frac{\epsilon^2}{2} \cos \cdot 2 e,$$

habebimus

$$r^{2} = 1 + 2 \varepsilon \cos m + \frac{\varepsilon^{2}}{2} (1 - \cos 2 m)$$

$$+ \frac{\varepsilon^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n \cdot 2^{n}} \begin{cases} (n+1)^{n-1} \cos (n+1)m - \frac{n+1}{1} (n-1)^{n-1} \cos (n-1)m \\ + \frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2} (n-3)^{n-1} \cos (n-3)m - \end{cases}$$

$$+ \frac{\varepsilon^{n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n \cdot 2^{n+1}} \begin{cases} n^{n-1} \cos nm - \frac{n+1}{1} (n-2)^{n-1} \cos (n-2)m \\ + \frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2} (n-4)^{n-1} \cos (n-4)m - \end{cases}$$

$$+ \frac{\varepsilon^{n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n \cdot 2^{n+1}} \begin{cases} (n+2)^{n-1} \cos (n+2)m - \frac{n+1}{1} (n)^{n-1} \cos nm \\ + \frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2} (n-2)^{n-1} \cos (n-2)m - \end{cases}$$

ubi $n \equiv 1, 2, 3 \dots$

Evolutis revera primis hujus expressionis terminis, ponendo $n \equiv 1, 2$. habebimus

$$r^2 = 1 + 2 \varepsilon \cos m - \frac{\varepsilon^2}{2} (\cos 2m - 3) + \frac{\varepsilon^3}{4} (\cos 3m - \cos m) - \frac{\varepsilon^4}{6} (\cos 4m - \cos 2m) +$$

quac eadem aequatio obtinebitur sumendo quadratum expressionis notissimae ipsius r.

Comparatis jam his binis valoribus quantitatis r^2 , habemus aequationes sequentes

$$\alpha^{2} + \beta^{2} = \frac{3}{2}$$

$$\alpha + \alpha\beta = \varepsilon - \frac{\varepsilon^{3}}{8}$$

$$\beta + \alpha\gamma = -\frac{\varepsilon^{2}}{4} + \frac{\varepsilon^{4}}{12}$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon^{3}}{8}$$

$$\delta = -\frac{\varepsilon^{4}}{12}$$

quae aequationes longe absunt, quin eosdem ut in §. 13 valores quantitatum α , β , γ . producant, imo jam ita comparatae sunt, ut ne solae quidem, sine respectu ad priores consideratae, simul consistere possint. Distantias proinde ellipticas ope quantumvis epicyclorum exhibere non valemus.

16. Coordinatae ellipticae §. 14. inventae, cum maximis variationibus sint obnoxiae, si, ɛ quantitatem non prorsus minimam designat, ad alium axem transferri possunt, ubi multo minores mutationes patiantur.

Accepto nimirum novo abscissarum axe in ca linea recta, quae centrum solis cum centro planetae mediae conjungit vocatisque novis coordinatis ξ et v, confestim colligimus

$$\xi \equiv x \cos m + y \sin m$$

 $v \equiv y \cos m - x \sin m$

Substitutis autem valoribus antea inventis quantitatum x et y, habebitur

$$\xi = 1 + \varepsilon \cos m + \frac{\varepsilon^2}{2} (\cos 2m - 1) - \frac{3\varepsilon^3}{8} (\cos 3m - \cos m) + \frac{\varepsilon^4}{3 \cdot 2^6} (67 \cos 4m - 64 \cos 2m - 3)$$

$$v = -2 \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2m - \frac{\varepsilon^2}{24} (7 \sin 3m - 9 \sin m) + \frac{\varepsilon^4}{3 \cdot 2^5} (29 \sin 4m - 40 \sin 2m).$$

Easdem quantitates, sed via prorsus diversa, deducit ill. Euler (Acta Acad. Sc. Petrop. ann. 1778 pars II.) per integrationem aequationum differentialium secundi gradus. Cum autem valores quantitatum ξ et v ibi inventi a nostris jam in termino tertio diversi, nostrique duplici calculo probati sint, formulas citatas iterato examini subjiciendas esse putamus, id quod ill. auctori eo minus est vitio vertendum, cum in disquisitione sua non tam veros harum coordinatarum valores, quam novam eamque revera acutissimam methodum aequationes mechanicas secundi gradus per approximationem integrandi docere voluerit.

17. Pro loco aequationis centri maximae erit $\partial \cdot (m - \omega) \equiv 0$ vel $\partial \cdot \tan \beta = 0$

Posito proinde differentiali aequationis primae (§. 9) = 0 habebitur.

$$0 = \alpha^{2} + 2\beta^{2} + 3\gamma^{2} + 4^{2} + 5\varepsilon^{2} + (\alpha + 3\alpha\beta + 5\beta\gamma + 7\gamma\delta + 9^{5}\varepsilon +) \cos m + (2\beta + 4\alpha + 6\beta^{5} + 8\varepsilon +) \cos 2m + (3\gamma + 5\alpha + 7\beta\varepsilon + 9\zeta +) \cos 3m + (4\delta + 6\alpha + 8\beta\zeta +) \cos 4m +$$

ubi lex seriei perspicua est.

18. Simili ratione pro loco planetae in orbita, in quo longitudo ejus stationaria est erit ∂ tang. $\Phi \equiv 0$ unde absque negotio colligitur

$$1 = \beta^{2} + 2\gamma^{2} + 3^{2} + 4\varepsilon^{2} + (\alpha - \alpha\beta - 3\beta\gamma - 5\gamma) - 7 \varepsilon - 9\varepsilon\zeta -) \cos m.$$

$$+ (2\alpha\gamma + 4\beta) + 6\gamma\varepsilon + 8\zeta +) \cos 2m$$

$$+ (\gamma + 3\alpha) + 5\varepsilon\varepsilon + 7\gamma\zeta +) \cos 3m$$

$$+ (2\delta + 4\alpha) + 6\beta\zeta +) \cos 4m$$

$$+ (3\varepsilon + 5\alpha\zeta +) \cos 5m +$$

Ex qua acquatione omnia, quae hucusque de statione et retrogradatione a diversis auctoribus prolata sunt, deducuntur. Assumto e. g. unico epicyclo erit $\beta = \gamma ... = 0$ et pro loco stationis cos. $m = -\frac{1}{a}$; unde patet, radium epicycli majorem esse debere radio circuli primi, ut statio locum habere possit. Assumtis autem

duobus epicyclis erit $\gamma = \delta = 0$ unde ope aequationis praecedentis invenitur pro statione

$$\cos m = -\frac{(1+\beta)}{\alpha}.$$

Eodem modo pro tribus epicyclis

$$1-\beta^2-2\gamma^2+(\alpha-\alpha\beta-3\beta\gamma)\cos m-2\alpha\gamma\cos 2m-\gamma\cos 3m=0$$
 et ita porro pro quovis epicyclorum numero, revolutionibus omnium aequalibus assumtis. Si autem, út in §. 13. $t=nt'=n't''=n''t''$. habebimus pro uno epicyclo

 $0 = 1 + (1 - n)\alpha^2 + (2 - n)\alpha\cos nm \text{ unde } \cos nm = \frac{1 - (n - 1)\alpha^2}{(n - 2)\alpha}.$ Pro duobus epicyclis

$$0 = 1 + (1 - n)\alpha^{2} + (1 - n - n')\beta + (2 - n)\alpha \cos nm + (2 - n - n')\beta \cos (n + n')m + (2 - 2n - n')\alpha\beta \cos n'm$$
pro tribus

$$\begin{array}{lll} 0 = 1 + (1-n)\alpha^2 + (1-n-n')\beta^2 + (1-n-n'-n')\gamma^2 \\ + (2-n)\alpha\cos.nm & + (2-2n-n')\alpha\beta\cos.n'm \\ + (2-n-n')\beta\cos.(n+n')m & + (2-2n-n'-n'')\alpha\gamma\cos.(n'+n'')m \\ + (2-n-n'-n'')\gamma\cos.(n+n'+n'')m & + (2-2n-2n'-n'')\beta\gamma\cos.(n'm) \end{array}$$
 quae aequationes, posito $n=n'=n''$, ... in praecedentes abibunt.

19. Superest, ut de curvis a centro epieyeli ultimi descriptis agamus, quas autem, cum jam saepius ab aliis consideratae sint, hic consultius praetereundas esse censeo, ne, quod initio paucis absolvere animus fuerat calamo currente praescriptos fines longe excedat.

Cornidis loco quaeramus superficiem rotatione circuli ortam, cujus centrum in peripheria secundi circuli movetur. Aequationem hujus superficiei duplici modo assequi possumus.

Patet enim primo, eam tanquam revolutione ortam considerari posse. Vocatis proinde $x \equiv Az$, $y \equiv Bz$ aequationibus axis rotationis, habebimus (vide Monge appl. de l'analyse)

$$\begin{array}{ccc}
A x + B y + z \equiv a \\
x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0
\end{array}$$

ubi Φ α functionem quantitatis arbitrariae α designat.

Quae aequationes, si cum binis illis, quae curvam rotantem exprimunt, conjungantur, sufficiunt ad problematis solutionem. Sit jam, ut rem nostram paulo generalius consideremus, curva rotans ellipsis in plano xz sita, cujus semiaxes a et b et distantia centri ab initio coordinatarum c, unde aequationes ellipseos

$$\begin{cases} y = 0 \\ a^2 b^2 = b^2 z^2 + a^2 (x - c)^2 \end{cases}$$

Positis autem A = B = 0 h. e. axe rotationis coincidente eum axe ordinatae z, erit eliminandis quanitatibus x, y, z

$$a^2 b^2 \equiv b^2 \alpha^2 + a^2 (\sqrt{\varphi \alpha - \alpha^2} - c)^2$$
.

Substitutis autem in ultima aequatione pro α et $\Phi \alpha$ valoribus datis z et $x^2 + y^2 + z^2$ erit aequatio superficiei quaesita

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}z^2$$
 . (I).

Methodus secunda. Acquatio superficiei, rotatione ellipseos circa axem ipsius z ortac est a^2 ($x^2 + y^2$) $+ b^2$ $z^2 = a^2$ b^2 , quae, si centrum corporis in curva data horizontali, cujus coordinatae sunt x' = u et y' = fu, incedit, pro situ quovis centri moti in hanc abit

$$a^{2}(x-u)^{2}+a^{2}(y-fu)^{2}+b^{2}z^{2}=a^{2}b^{2}..$$
 (A).

Jam si corpus motum, quoad formam externam, invariatum mancat, centrum corporis autem in curva data quantitate $\sqrt{\partial u^2 + (\partial \cdot / u)^2}$ translatum supponamus, crit pro novo centri loco acquatio superficiei

$$x - u + (y - fu) \cdot \frac{\partial \cdot fu}{\partial u} = 0 \cdot \cdot \cdot (B).$$

Eliminata autem quantitate u ex aequationibus A et B aequatio resultans non nisi superficiem ipsam a corpore moto in omnibus centri punctis descriptam exprimere potest. Posita peoinde curvae ho-

rizontalis aequatione $y^2 + x^2 = c^2$ erit $(fu)^2 + u^2 = c^2$ et $\frac{\partial \cdot fu}{\partial u} = \frac{-u}{\sqrt{c^2 - u^2}}$ quibus in aequationibus A, B substitutis eliminataque quantitate u, habebitur

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} z^2$$
 prorsus ut antea.

Superficies ista, hucusque nondum considerata, pluribus notatu dignis proprietatibus gaudet. Cum e. g. pro illa habeatur

$$(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) \cdot (\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2$$
,

superficies nostra in earum numerum est referenda, quas Galli vocant des surfaces développables, id quod a priori haud quisquam expectasset.

DE SUMMATIONE SERIERUM.

AUCTORE

LITTROW.

Conventui exhibuit die 7 Augusti 1814.

Quamprimum anteriora tantum aliquis analyseos limina salutaverit, nullo fere negotio ipsoque currente, ut dicunt, calamo ad novas easdemque subinde elegantissimas series deduci solet, ut quivis vel tantillum his in rebus versatus propria edoctus experientia satis superque notum habebit. Hae autem argumento tractando fere semper alienac digressiones, quamvis et amoenitate et etiam facilitate, qua inveniuntur, animum auctoris lectorisque delectant, ita ut nonnunquam difficile sit iis non diutius inhaerere, tamen, quod omnino dolendum, usu practico plerumque carere solent, cum saepissime non nisi easus perquam singulares tractant, quorum in aliis occupationibus applicatio rarissime tantum occurrere solet. Quo autem hujus generis disquisitiones utiliores reddantur, necesse est, ut maxima qua fieri potest generalitate instituantur, non unam aliamve progressionem singularem tractando, sed totas serierum, si ita loqui fas est, familias simul complectendo. Exempla hujus rei multifaria nostri commentarii suppeditant, in quibus a primo statim initio scrierum doctrina feliciter exculta atque adaucta est, ita quidem, ut, qualem serierum theoria progressum corum auctoribus, praeprimis autem illustr. Eulero Fussioque debeat, nemo jam ignorare possit. Hic autem meminisse sufficiet commentationis perfectissimae Euleri (Calc. differ. Pars II. cap. 5. 6. 7. 8), qua summas serierum hac forma generali

 $1 + 2^r + 3^r + 4^r +$

contentarum exhibuit, designante r numerum quemcunque integrum

vel positivum vel negativum. Observavit autem ill. auctor §. 152, summas harum serierum dari non posse, si r numerum integrum negativum imparem denotat easque a nova hucusque incognita quantitate transcendente dependere. Quae adnotatio hanc quantitatem transcendentem incognitam alia prorsus via quaerendi simulque totius commentationis sequentis ulterius exarandae occasionem praebuit.

Majoris commoditatis causa totum negotium duabus sectionibus co quo inventae sunt ordine absolvam, in quarum prima investigabitur, qua ratione angulus quicunque datus per ejusdem sinus exprimi possit, ubi videbimus, innumerabiles series quamvis non omnes convergentes huic problemati satisfacturas, quarum una simplicissima omnium viam sternit ad disquisitiones sectionis secundae, in qua summae serierum formae sequentis

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2^r \sin a}{\cos a} = \frac{2a + 3^r \sin a}{\cos a} = \frac{3^r \sin a}{\cos a} = \frac{4^r \sin a}{\cos a} = \frac{4a + 4^r \sin a}{\cos a}$$

exhibentur, quae series priores Eulerianas tanquam casus singulares continent methodumque perfacilem suppeditant quantitatis istius transcendentis exprimendae.

His demum coronidis loco in sectione tertia series quasdam maxime memorabiles addam, quae ex generalibus sectionum praecedentium expressionibus sponte fluunt.

Expressio anguli cujuslibet per ejusdem sinus.

1. Simplicissima methodus hujus problematis solvendi, quaeque primo statim intuitu sese ultro offert, ex integratione aequationis

$$\partial a = \frac{\partial \cdot \sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}$$

petitur. Evoluta nimirum quantitate $(1 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$ riteque peractis partium singularum integrationibus habebitur

$$a = \sin a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin^3 a + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sin^5 a + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} \cdot \frac{1}{7} \cdot \sin^7 a + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \sin^7 a + \frac{1}$$

vel etiam, sinus angulorum multiplorum adhibendo.

$$a = \sin a + \frac{1}{1 \cdot 2^{3} \cdot 3} (3 \sin a - \sin 3 a) + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^{6} \cdot 5} (\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \sin a - \frac{5}{1} \sin 3 a + \sin 5 a) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^{9} \cdot 7} (\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin a - \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \sin 3 a + \frac{7}{1} \sin 5 a - \sin 7 a) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^{12} \cdot 9} (\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin 3 a + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \sin 5 a - \frac{9}{1} \sin 7 a + \sin 9 a) + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \sin 7 a + \sin 9 a) + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \sin 7 a + \sin 9 a) + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \sin 7 a + \sin 9 a) + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \sin 7 a + \sin 9 a + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \sin 7 a + \sin 9 a) + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \sin 7 a + \sin 9 a + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \sin 7 a +$$

quibus ut notissimis non inhaerebo.

2. Jam, ut rem nostram alia via aggrediamur, ponatur tang. $x = \frac{\sin a}{1 + \cos a}$

quaeraturque valor quantitatis x.

Posito log. nat. $e \equiv 1$, aequatio nostra sequentem induit formam $\frac{e^{2x\sqrt{-1}-1}}{e^{2x\sqrt{-1}+1}} = \frac{e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}}{2+e^{a\sqrt{-1}+e^{-a\sqrt{-1}}}}$

unde habebitur

$$e^{2xy'-1} = \frac{1 + e^{\alpha y'-1}}{1 + e^{-\alpha y'-1}}$$

et hinc, sumtis logarithmis,

$$2 \times \sqrt{-1} = e^{a \times -1} - \frac{1}{2} e^{2a \times -1} + \frac{1}{3} e^{3a \times -1} - \frac{1}{2} e^{-2a \times -1} + \frac{1}{3} e^{-3a \times -1}$$

unde statim colligitur

$$x = \sin a - \frac{1}{2} \sin 2 a + \frac{1}{3} \sin 3 a - \frac{1}{4} \sin 4 a + .$$

Ast cum sit
$$\frac{\sin a}{1+\cos a} = \text{tg.} \frac{a}{2}$$
 erit $x = \frac{a}{2}$ et hine $\frac{a}{2} = \sin a - \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{1}{3} \sin 3a - \frac{1}{4} \sin 4a + \dots$ (I) quae est altera problematis nostri solutio.

I. Posito $a = 90^{\circ}$, acquatio (I) inventa praebet sequentem $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ series notissima Leibnitii.

Pro
$$a = 60^{\circ}$$
 erit
$$\frac{\pi}{31/3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{ vel}$$

$$\frac{\pi}{31/3} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \dots$$

quam seriem ill. Euler (Introd. in anal. infinitorum Lib. I. cap. N) protulit.

Pro
$$a = 45^{\circ}$$
 est

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \right] - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \right].$$
Invenit autem *Euler* loc. cit. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{quod}$ cum $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ conjunctum, seriem nostram producit.

3. Methodus in §. praecedenti adhibita in problemate nostro solvendo quam maximi est momenti moxque videbimus, eam multo latius patere et paucis tantum adhibitis mutationibus etiam ad formulam quam maxime generalem

tang.
$$x = \frac{\alpha \sin a + \beta \sin b + \gamma \sin c + \delta \sin d + etc.}{1 + \alpha \cos a + \beta \cos b + \gamma \cos c + \delta \cos d + etc.}$$

applicari posse. Quod quo clarius demonstretur, necesse est duo lemmata alioquin inventa non disticilia in auxilium vocare.

Lemma I.

4. Sit log. nat. $(1 + \alpha x + \beta x^2) = A + \frac{B}{2}x + \frac{C}{4}x^2 + \frac{D}{6}x^3 + \frac{D$

Differentiando aequationem datam obtinemus

$$\frac{2(\alpha + 2\beta x)}{1 + \alpha x + \beta x^2} = B + Cx + Dx^2 + Ex^3 +$$

unde, multiplicata altera hujus expressionis parte per $1 + \alpha x + \beta x^2$ habebuntur aequationes conditionales sequentes

$$B = 2\alpha$$

$$-C = \alpha B - 4\beta$$

$$-D = \alpha C + \beta B$$

$$-E = \alpha D + \beta C$$

$$-F = \alpha E + \beta D \text{ etc.}$$

vel denique iteratis substitutionibus

ubi lex progressionis aperta. Quantitas prima A, ut aliunde constat, evanescit.

I. Quodsi aequatio data sit

log. $(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \gamma x^4 +) = A + \frac{B}{2}x + \frac{C}{4}x^2 +$ numero terminorum in infinitum excrescente, adhibita eadem methodo facile invenitur

A = 0
B =
$$2\alpha$$

C + $B\alpha$ = 4β
D + $C\alpha$ + $B\beta$ = 6γ
E + $D\alpha$ + $C\beta$ + $B\gamma$ = 8δ
F + $E\alpha$ + $D\beta$ + $C\gamma$ + $B\delta$ = 10ϵ etc.

³ 5. Data aequatione

tang. $x = \frac{\alpha \sin a + \beta \sin 2\alpha}{1 + \alpha \cos a + \beta \cos 2\alpha}$ invenire valorem quantitatis x.

Solutio.

Cum aequatio data, sumto log. nat. e = 1, in sequentem abeat, $e^{2 \times V} = \frac{1 + \alpha e^{aV} - 1 + \beta e^{2aV} - 1}{1 + \alpha e^{-aV} - 1 + \beta e^{-2aV} - 1}$

erit, sumtis hinc et inde logarithmis

$$2x\sqrt{-1} = \log (1 + \alpha e^{a\sqrt{-1}} + \beta e^{2a\sqrt{-1}}) - \log (1 + \alpha e^{-a\sqrt{-1}} + \beta e^{-2a\sqrt{-1}}).$$

Evolutis autem ambobus logarithmis ope lemmatis primi, substituendo nimirum $e^{a\sqrt{-1}}$ et $e^{-a\sqrt{-1}}$ loco quantitatis x, habebitur, retentis significationibus quantitatum B, C, D.. supra datis

$$2x\sqrt{-1} = \frac{B}{2}e^{a\sqrt{-1}} + \frac{C}{4}e^{2a\sqrt{-1}} + \frac{D}{6}e^{3a\sqrt{-1}} + \frac{B}{6}e^{-3a\sqrt{-1}} - \frac{B}{6}e^{-3a\sqrt{-1}} - \frac{D}{6}e^{-3a\sqrt{-1}} - \frac{D}{6}e^{-3a\sqrt$$

unde confestim concluditur fore

$$x = \frac{B}{2} \sin a + \frac{C}{4} \sin 2a + \frac{D}{6} \sin 3a +$$

I. Quodsi etiam hie terminis in infinitum excurrentibus as-

tang.
$$x = \frac{\alpha \sin a + \beta \sin a + \gamma \sin a + etc.}{1 + \alpha \cos a + \beta \cos a + \gamma \cos a + \gamma \cos a + etc.}$$

eodem modo invenietur

$$x = \frac{B}{2}\sin a + \frac{C}{4}\sin 2a + \frac{D}{6}\sin 3a +$$

ubi autem determinandis valoribus quantitatum B, C, D. inservient aequationes sequentes

$$B = 2\alpha$$

$$C + Bi = 4\beta$$

$$D + C\alpha + B\beta = 6\gamma$$

$$E + D\alpha + C\beta + B\gamma = 8\delta$$
 etc.

eaedem quae jam in fine §. 4. datae sunt.

6. Quibus expositis detur jam aequatio

tang.
$$x = \frac{\alpha \sin \alpha}{1 + \alpha \cos \alpha}$$

quae cum aequatione §. 5. collata dabit, positis $\beta = \gamma = \delta$.. = • $x = \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 \sin \alpha + \frac{1}{3} \alpha^3 \sin \alpha - \frac{1}{4} \alpha^4 \sin \alpha + \frac{1}{4} \alpha^4 \cos \alpha + \frac{1$

Substituto autem valore dato ipsius tang. x in aequatione

tg.
$$(a - x) = \frac{tg. a - tg. x}{1 + tg a tg. x}$$
 habebitur
tg. $(a - x) = \frac{sin. a}{\alpha + cos. a}$

quae aequatio, ejusdem eum superiori formae, si cum expressione generali \S . 5. comparetur, exhibet $\alpha = \frac{1}{\alpha}$, $\beta = \gamma$. = 0 unde sequitur

$$a - x = \frac{1}{a} \sin a - \frac{1}{2a^2} \sin 2a + \frac{1}{3a^3} \sin 3a - \frac{1}{2a^4} \sin 4a + .$$

Eliminata jam quantitate x ope duarum serierum inventarum prodit $a = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha^4}{\alpha^2} \sin 2a + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} \sin 3a - \frac{1}{\alpha^2}$ quae est tertia nostri problematis solutio.

I. In ultima expressione quantitas α prorsus arbitraria remanet ita ut pro illa quamcunque quantitatem pro libitu substituere liceat.

Sumto
$$a = 1$$
 erit $\frac{a}{2} = \sin a - \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{1}{3} \sin 3a - \frac{1}{2}$ quae series jam in secunda problematis solutione (§. 2.) inventa fuerat.

- II. Terminus generalis seriei inventae est $\frac{1+\alpha^2 n}{\alpha^n}$. sin. $n\alpha$. Posito autem differentiale quantitatis $\frac{1+\alpha^2 n}{\alpha^n}$ nihilo aequali, obtinebitur $\alpha^2 n 1 = 0$, unde pro determinando valore minimo quantitatis $\frac{1+\alpha^2 n}{\alpha^n}$ habebinus $\alpha^n + 1 = 0$ vel $\alpha^n 1 = 0$ et hinc sequitur, seriem datam non nisi pro $\alpha = +1$ fore convergentem, siquidem pro α tantum quantitates integras substituere velimus (Euler Introd. in anal. infin. cap. IX.).
- 7. Tota proinde methodi nostrae vis in eo sita est, quod dato valore quantitatis tg. x ope aequationis

$$tg. x = \frac{a \sin a}{1 + a \cos a}$$

valor quantitatis tg. (a - x), nimirum

$$tg. (\alpha - x) = \frac{\frac{1}{\alpha} \sin a}{1 + \frac{1}{\alpha} \cos a}$$

ejusdem cum praecedenti formae esse debeat. His duabus autem exceptis nulla alia mutatio idem praestare poterit, id quod jam exinde sequitur, quod in genere habeatur

$$\operatorname{tg.}(ma - x) = \frac{\sin ma + a \sin (m - r)a}{\cos ma + a \cos (m - 1)a}.$$

\$. Methodus hucusque in usum vocata eodem modo etiam ad aequationes ordinis superioris eujuscunque applicari potest, ita ut

in seriem quaerendam, quae angulum a per ejusdem sinus exprimit numerus prorsus arbitrarius quantitatum indeterminatarum intrare possit. Consideretur e. g. aequatio

tg.
$$x = \frac{\alpha \sin \alpha + \beta \sin 2\alpha}{1 + \alpha \cos \alpha + \beta \cos 2\alpha}$$
. (A)

unde ope lemmatis secundi (§. 5.) obtinebitur

$$x = \alpha \sin \alpha$$

$$- \left(\frac{\alpha^2}{2} - \beta\right) \sin 2\alpha$$

$$+ \left(\frac{\alpha^3}{3} - \alpha \beta\right) \sin 3\alpha$$

$$- \left(\frac{\alpha^4}{4} - \alpha^2 \beta + \frac{\beta^2}{2}\right) \sin 4\alpha + \text{etc.}$$

Transformata autem aequatione data in sequentem

$$tg. (2 a - x) = \frac{\frac{\alpha}{\beta} \sin a + \frac{1}{\beta} \sin 2a}{1 + \frac{\alpha}{\beta} \cos a + \frac{\epsilon}{\beta} \cos 2a}$$

quae eodem modo tractata praebebit

$$2a - x = \frac{\alpha}{\beta} \sin a$$

$$- (\frac{\alpha^2}{2\beta^2} - \frac{1}{\beta}) \sin 2a$$

$$+ (\frac{\alpha^3}{3\beta^3} - \frac{\alpha}{\beta^2}) \sin 3a - \text{etc.}$$

quae series ex praccedenti deduci potest, mutatis α in $\frac{\alpha}{\beta}$ et β in $\frac{\mathbf{T}}{\beta}$.

Eliminata jam quantitate x ope duarum serierum, habebimus omnibus rite reductis

$$2 \alpha = \alpha_{1} \sin \alpha - \alpha_{2} \sin 2\alpha + \alpha_{3} \sin 3\alpha - \alpha_{4} \sin 4\alpha + \dots (A')$$
which $\alpha_{1} = \frac{\alpha(1+\beta)}{\beta}$

$$\alpha_{2} = (\alpha^{2} - 2\beta) \frac{(1+\beta^{2})}{2\beta^{2}}$$

$$\alpha_{3} = (\alpha^{3} - 3\alpha\beta) \frac{(1+\beta^{3})}{3\beta^{3}}$$

$$\alpha_{4} = (\alpha^{4} - 4\alpha^{2}\beta + 2\beta^{2}) \frac{(1+\beta^{4})}{+\beta^{4}}$$

$$\alpha_{5} = (\alpha^{5} - 5\alpha^{3}\beta + 5\alpha\beta^{2}) \frac{(1+\beta^{5})}{5\beta^{5}}$$

$$\alpha_{6} = (\alpha^{6} - 6\alpha^{4}\beta + 9\alpha^{2}\beta^{2} - 2\beta^{3}) \frac{(1+\beta^{6})}{6\beta^{6}} \text{ etc.}$$

Quoad legem progressionis, facili negotio invenietur terminus generalis

$$\alpha_{n} = \begin{cases} \alpha^{n} - n\alpha^{n-2}\beta + \frac{n \cdot n - 3}{1 \cdot 2} \alpha^{n-4}\beta^{2} - \frac{n \cdot n - 4 \cdot n - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{n-6}\beta^{3} \\ + \frac{n \cdot n - 5 \cdot n - 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^{n-8} \beta^{+} - \end{cases} \begin{cases} \frac{(1 + \beta^{n})}{n \beta^{n}} \end{cases}$$

Series denique inventa (Λ') praebet quartam nostri problematis solutionem, duas quantitates arbitrarias α et β involventem.

Facile autem patet, tertiam formulae (A) mutationem eodem seopo accommodatam locum habere non posse, cum posito

tang.
$$x = \frac{\alpha \sin a + \beta \sin 2a}{1 + \alpha \cos a + \beta \cos 2a}$$

in genere habeatur

tang.
$$(m\alpha - \alpha) = \frac{\sin m\alpha + \alpha \sin (m-1)\alpha + \beta \sin (m-2)\alpha}{\cos m\alpha + \alpha \cos (m-1)\alpha + \beta \cos (m-2)\alpha}$$

I. Pro casu singulari $\alpha = 0$ erit $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 \dots = 0$ et $\alpha_2 = -\frac{(1+\beta^2)}{\beta}$, $\alpha_4 = \frac{(1+\beta^4)}{2\beta^2}$, $\alpha_6 = -\frac{(1+\beta^6)}{3\beta^3}$ etc. etc. unde sequitur

$$a = \frac{1+\beta^2}{\beta} \sin a - \frac{1+\beta^4}{2\beta^2} \sin 2a + \frac{1+\beta^6}{3\beta^3} \sin 3a$$
 quae erat tertia problematis solutio (§. 6.). Eadem denique series obtinebitur pro easu, in quo $\beta = 0$.

9. Si in expressione generali \S praecedentis ponatur $\beta = 1$, obtinchimus

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \equiv 2 \alpha \\ \alpha_2 \equiv \frac{2}{5} (\alpha^2 - 2) \\ \alpha_3 \equiv \frac{2}{3} (\alpha^3 - 3 \alpha) \\ \alpha_4 \equiv \frac{2}{4} (\alpha^4 - 4 \alpha^2 + 2) \end{array}$$

et in genere

$$\alpha_n = \frac{2}{n} \left[\alpha^n - n\alpha^{n-2} + \frac{n \cdot n - 3}{1 \cdot 2} \alpha^{n-4} - \frac{n \cdot n - 4 \cdot n - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{n-6} + \frac{n \cdot n - 5 \cdot n - 6 \cdot n - 7}{1 \cdot 3 \cdot 3} \alpha^{n-8} - \right]$$

quorum terminorum quivis ex duobus praccedentibus hunc in modum componitur, ut sit

$$3\alpha_3 \equiv 2\alpha_2 \cdot \alpha - \alpha_1$$

$$4\alpha_4 \equiv 3\alpha_3 \cdot \alpha - 2\alpha_2^3$$

$$5\alpha_5 \equiv 4\alpha_4 \cdot \alpha - 3\alpha_3 \text{ etc. etc.}$$

I. Pro $\alpha = 2$ erit $\frac{a}{2} = \sin a - \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{1}{3} \sin 3a$ ut supra (\S . 2.). Eadem series etiam invenietur, si ponatur $\alpha \equiv 0$ et B = 1, id quod jam exinde sequitur, quod in genere habeatur

$$\frac{\sin \cdot 2a}{1 + \cos \cdot 2a} = \frac{2\sin a + \sin \cdot 2a}{1 + 2\cos \cdot a + \cos \cdot 2a}$$

Sit $\alpha = 1$, $\beta = 1$ unde sequitur fore $a = \sin a + \frac{1}{2}\sin 2a - \frac{2}{3}\sin 3a + \frac{1}{4}\sin 4a + \frac{1}{5}\sin 5a - \frac{2}{6}\sin 6a$ $+\frac{1}{7}\sin.7a + \frac{1}{8}\sin.8a - \frac{2}{9}\sin.9a +$

Pro
$$y = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$$
 erit $\frac{\pi}{2} = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) - (\frac{1}{7} + \frac{2}{9} + \frac{1}{11}) + (\frac{1}{13} + \frac{2}{15} + \frac{1}{17}) - \frac{1}{17}$

Veritas hujus expressionis facillime sic demonstratur. Sit $z = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{2}{6} - \frac{1}{17} + .$

Subtraeta hac serie a sequenti

$$z - \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ obtine bitur}$$

$$z - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$$

III. Pro $\alpha = 3$, $\beta = 1$ habebimus

 $a = 3 \sin a - \frac{7}{5} \sin 2a + \frac{15}{3} \sin 3a - \frac{47}{5} \sin 4a + \frac{103}{5} \sin 5a - \frac{1}{5}$

Jam ut quaeratur lex progressionis 3, 7, 18, 47, 123, ponatur

$$\begin{array}{r}
 18 = 7x + 3y \\
 47 = 18x + 7y
 \end{array}$$

unde statim colligitur $x \equiv 3$, $y \equiv -1$, quapropter nominatis tribus membris ordine naturali sese sequentibus A, B, C erit pro determinando postremo

$$C \equiv 3B - A$$
.

10. Quantitates
$$\alpha_1$$
 α_2 α_3 , quarum valores $\frac{\alpha(1+\beta)}{\beta}$, $(\alpha^2-2\beta)\frac{(1+\beta^2)}{2\beta^2}$, $(\alpha^3-3\alpha\beta)\frac{(1+\beta^3)}{3\beta^3}$

in §. 8. dati sunt, pluribus proprietatibus memoratu non indignis gaudent, quarum non nisi unicam hic exponam.

Supra invenimus $2a = \alpha_1 \sin a - \alpha_2 \sin 2a + \alpha_3 \sin 3a - ...(I)$. Cum autem habeamus

sin.
$$a = a - \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$
 — sequitur fore
sin. $2a = (2a) - \frac{(2a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(2a)^5}{1 \cdot 2 \cdot 5}$ —
sin. $3a = (3a) - \frac{(3a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(3a)^5}{1 \cdot 2 \cdot 5}$ —.

Substitutis autem his postremis valoribus quantitatum sin. a, sin. 2a, sin. 3a.. in acquatione I, habebitur

$$2 \equiv \alpha_{1} - 2 \alpha_{2} + 3 \alpha_{3} - 4 \alpha_{4} + 0 = \alpha_{1} - 2^{3} \alpha_{2} + 3^{3} \alpha_{3} - 4^{3} \alpha_{4} + 0 = \alpha_{1} - 2^{5} \alpha_{2} + 3^{5} \alpha_{3} - 4^{5} \alpha_{4} + 0 = \alpha_{1} - 2^{7} \alpha_{2} + 3^{7} \alpha_{3} - 4^{7} \alpha_{4} + \cdots$$

I. Eaedem aequationes facili negotio elicientur ex successiva quantitatis (I) differentiatione unde simul, posito a = 90, habebuntur sequentes

Ope igitur methodi expositae quam latissime patentis infinitae series, quae angulum per ejusdem sinum exprimunt quaeque numerum quem-cunque quantitatum arbitrariarum continent, invenientur, unde problema propositum maxima qua fieri potest generalitate solutum esse censemus.

11. Antequam autem objectum sectionis prioris penitus deseramus, necesse erit adnotare, eandem methodum etiam aliis seriebus inservire, quarum singuli termini cum praecedentibus identici, signa autem, quae in prioribus ahe n bant, omnibus eadem remanent. Quod ut tantum in simplicissimis hujusmodi seriebus clarius reddatur, ponamus

tang. $x = \frac{\alpha \sin \pi}{1 - \alpha \cos \pi}$ unde confestim concluditur $e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 - \alpha e^{-x\sqrt{-1}}}{1 - \alpha e^{2x\sqrt{-1}}}$ et hinc

$$x \equiv a \sin a + \frac{\alpha^2}{2} \sin 2a + \frac{\alpha^3}{3} \sin 3a +$$

Eadem autem aequatio data etiam hanc formam induere potest

$$- \operatorname{tg.} (a + x) = \frac{\frac{1}{\alpha} \cdot \sin \alpha}{1 - \frac{1}{\alpha} \cos \alpha}$$

unde eodem modo obtinebitur

$$-(a+x) = \frac{1}{\alpha}\sin a + \frac{1}{2\alpha^2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3\alpha^3}\sin 3\alpha$$

Eliminata denique quantitate x, obtinebitur

$$-a = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin 2a + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} \sin 3a + \frac{1}{3} \sin$$

I. Pro $\alpha = i$ habebimus

$$-\frac{a}{2} = \sin a + \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{1}{3} \sin 3a + \frac{1}{4} \sin 4a + \frac{$$

quam seriem jam ill. Euler (Calc. differ. Pars II. cap. 4. et 6.) exhibuit, quamvis summam hujus seriei non $-\frac{a}{2}$ sed $\frac{\pi - a}{2}$ assignavit. Alias autem demonstravit ex mente methodi a Dan. Bernoulli inventae, hanc summam revera esse debere $\frac{\pi - a}{2}$. Vide Nov. Comment. Acad. seient. Petrop. Tom. XIX. pag. 66.

II. Conjuncta serie inventa

$$-a = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin 2a + \text{cum superiori } (\S. 6.)$$

$$-a = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin 2a +$$

obtinebimus sequentem

$$0 = \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin \alpha + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} \sin \alpha + \frac{1}{5} \cdot \frac{1+\alpha^{10}}{\alpha^5} \sin \alpha + \frac{1}{3} \sin \alpha +$$

$$0 = \sin a + \frac{1}{3} 2 (1 - \alpha^2 + \alpha^4) \sin 3\alpha + \frac{1}{5} 4 (1 - \alpha^2 + \alpha^4 - \alpha^6 + \alpha^8) \sin 5\alpha + \frac{1}{7} 26 (1 - \alpha^2 + \dots + \alpha^{12}) \sin 7\alpha + \frac{1}{12} \sin$$

Mémoires de l'Acad. T. VII.

Sections ecunda...

Summatio scrierum sub, hac forma contentarum

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2^r \sin a}{\cos a} = \frac{2a + 3^r \sin a}{\cos a} = \frac{3a + 4^r \sin a}{\cos a} = \frac{4a + 4^r$$

ubi r quemcunque numerum, integrum denotat...

12. Consideremus primo series, in quibus r quemvis numerum integrum positivum designat.

Supra: inventum fuerate

$$a = \frac{1}{\alpha} + \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3} \sin 3\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

quae aequatio differentiata praebet sequentem-

$$1 = \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\cos \alpha - \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2}\cos 2\alpha + \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3}\cos 3\alpha - \frac{1+\alpha^6}{\alpha^3}\cos 3\alpha$$

Iterata denique hujus aequationis differentiatione obtinebimus series **s**equentes

$$0 = \frac{1 + \alpha^{2}}{\alpha} \sin \alpha - 2^{n} \cdot \frac{1 + \alpha^{4}}{\alpha^{2}} \sin 2\alpha + 3^{n} \cdot \frac{1 + \alpha^{6}}{\alpha^{3}} \sin 3\alpha - 0$$

$$0 = \frac{1 + \alpha^{2}}{\alpha} \cos \alpha - 2^{m} \cdot \frac{1 + \alpha^{4}}{\alpha^{2}} \cos 2\alpha + 3^{m} \cdot \frac{1 + \alpha^{6}}{\alpha^{3}} \cos 3\alpha - 0$$
(I)

ubi, n_i quemvis; numerum, int., pos., imparem 1, 3, 5, ...

..... parem 2, 4.6.. denotat... $\mathbf{et}_1 m_2$

I. Conjuncta; eadem; serie.

$$a = \frac{1+\alpha^2}{\alpha_1} \sin \alpha_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin 2\alpha + \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2} \sin 2\alpha$$

cum; sequenti;

$$a = \frac{1}{2}\sin a - \frac{2}{2}\sin 2a + \frac{2}{3}\sin 3a - \text{ obtine bimus}$$

$$0 = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\sin a - \frac{1}{2}(\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2}\sin 2a + \frac{1}{3}\frac{(1-\alpha^3)^2}{\alpha^3}\sin 3a - \frac{1}{3}\cos 2a + \frac{1}{3}\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^3}\sin 3a - \frac{1}{3}\cos 2a + \frac{1}{$$

unde iterata: differentiatione habebitur

$$0 = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \sin a - 2^{\frac{n}{2}} \frac{(1-\alpha^2)^2}{\alpha^2} \sin 2a + 3^{\frac{n}{2}} \frac{(1-\alpha^3)^2}{\alpha^3} \sin 3a - \begin{cases} 0 = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \cos a - 2^{\frac{m}{2}} \frac{(1-\alpha^2)^2}{\alpha^2} \cos 2a + 3^{\frac{m}{2}} \frac{(1-\alpha^3)^2}{\alpha^3} \cos 3a - \end{cases}$$
(II)

ubi $n = 1, 3, 5 \dots$ et m = n + 1 ut supra.

II. Aequationes inventae I et II solutionem problematis nostri tanquam easum specialem continent. Posito nimirum $\alpha = 4$, habebitur virtute serierum I

$$0 = \sin a - 2^{n} \sin 2a + 3^{n} \sin 3a - 0$$

$$0 = \cos a - 2^{m} \cos 2a + 3^{m} \cos 3a - 0$$
(I)

Posito autem in priori a = 90 et in altera a = 0, erit

$$0 = 1 - 3^{n} + 5^{n} - 7^{n} + 0 = 1 - 2^{m} + 3^{m} - 4^{m} + 0$$

quas acquationes etiam ill. Euler (Calc. differ. Pars II. cap. 7) invenit. Nos autem ex praecedentibus acquationibus concludimus esse

$$0 = \frac{1 + \alpha^{2}}{\alpha} - 3^{n} \cdot \frac{1 + \alpha^{6}}{\alpha^{3}} + 5^{n} \cdot \frac{1 + \alpha^{10}}{\alpha^{5}} - \frac{1 + \alpha^{2}}{\alpha} - 2^{m} \cdot \frac{1 + \alpha^{4}}{\alpha^{2}} + 3^{m} \cdot \frac{1 + \alpha^{6}}{\alpha^{3}} - \frac{1 + \alpha^{6}}{\alpha^{6}} - \frac{1 + \alpha^{6}}{\alpha^{6}} - \frac{1 + \alpha^{6}}{\alpha^{6}} - \frac{1 + \alpha^{6}}{\alpha^{6}} - \frac{1 + \alpha^{6}}{$$

13. Desunt adhuc aequationes formae sequentis $\sin a - 2^m \sin 2a + 3^m \sin 3a - \cos a - 2^n \cos 2a + 3^n \cos 3a$

Jam seriei $\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \dots + \sin 2a$ summa est $\frac{1}{2}\sin xa - \frac{1}{2}\cos xa \cot \frac{a}{2} + \frac{7}{2}\cot \frac{a}{2}$ (vid. Eul. Calc. diff. Pars. II. cap. 6.).

Quodsi summa ejusdem seriei, terminis in infinitum excurrentibus, quaeratur, clarum est, omnes partes summae superioris, quae a quantitate x pendent, negligendas esse, unde sequitur

 $\sin a + \sin 2 a + \sin 3 a + \dots = \frac{1}{2} \cot g \cdot \frac{e}{2}$. Subtracta hac serie a sequenti satis nota

 $2 \sin a + 2 \sin 3a + 2 \sin 5a + \frac{1}{\sin a}$ obtinebitur $\sin a - \sin 2a + \sin 3a - \sin 4a + \frac{1}{2} \operatorname{tg}. \frac{a}{2}$ quae summa vocetur S.

Iterata hujus seriei differentiatione habebitur

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{4 \cos^{2} \frac{a}{2}} = \cos a - 2 \cos 2a + 3 \cos 3a - \frac{\partial^{2} S}{\partial a^{2}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{2 \sin \frac{a}{2}}{\cos^{2} \frac{a}{2}} = \sin a - 2^{2} \sin 2a + 3^{2} \sin 3a - \frac{\partial^{2} S}{\partial a^{3}} = -\frac{1}{16} \left(\frac{2 \cdot 3}{\cos^{4} \frac{a}{2}} - \frac{4}{\cos^{2} \frac{a}{2}} \right) = \cos a - 2^{3} \cos 2a + 3^{3} \cos 3a - \frac{\partial^{4} S}{\partial a^{4}} = \frac{1}{32} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{\cos^{5} \frac{a}{2}} - \frac{8}{\cos^{3} \frac{a}{2}} \right) \sin \frac{a}{2} = \sin a - 2^{4} \sin 2a + \frac{\partial^{5} S}{\partial a^{5}} = \frac{1}{64} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\cos^{6} \frac{a}{2}} - \frac{120}{\cos^{6} \frac{4}{a}} + \frac{16}{\cos^{2} \frac{a}{2}} \right) = \cos a - 2^{5} \cos 2a + \frac{3 \cos 2a}{2} = \cos 2$$

Difficile autem videtur, legem progressionis scriei 4, 8, 120, 480, 6720, 40320 .. vel seriei 16, 32, 2016, 8064, 282240 etc. assignare, immo etiam ill. Euler forte fortuna in easdem series incidens (Calc. diff. Pars I. cap. VI. § 206) legem progressionis none dedit. Multo autem facilius res procedit, si loco cos. introducantur taugentes anguli $\frac{a}{a}$, quo facto in sequentes devenimus aequationes

$$\sin a - \sin 2 a + \sin 3 a - \frac{1}{2} \operatorname{tg}.\frac{a}{2}$$

$$\sin a - 2^{2} \sin .2 a + 3^{2} \sin .3 a - \frac{1}{2^{3}} (2 + 2 \operatorname{tg}.\frac{a}{2}) \operatorname{tg}.\frac{a}{2}$$

$$\sin a - 2^{4} \sin .2 a + 3^{4} \sin .3 a - \frac{1}{2^{4}} (1.6 + 40 \operatorname{tg}.\frac{a}{2} + 24 \operatorname{tg}.\frac{a}{2}) \operatorname{tg}.\frac{a}{2}$$

$$\sin a - 2^{6} \sin .2 a + 3^{6} \sin .3 a - \frac{1}{2^{5}} (272 + 1232 \operatorname{tg}.\frac{a}{2}) \operatorname{tg}.\frac{a}{2}$$

$$+ 1680 \operatorname{tg}.\frac{a}{2} + 720 \operatorname{tg}.\frac{a}{2} \operatorname{tg}.\frac{a}{2}$$

Quoad legem progressionis assignandam sint coëfficientes; cujuscunque seriei horizontatis $a; b, c \dots$ et coëfficientes seriei sequentis A, B, C \dots quo facto habebitur:

Eodemque modo invenitur

$$\cos a - 2 \cos 2 a + 3 \cos 3 a - \frac{1}{2^2} (1 + \text{tg.}^2 \frac{a}{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos a - 2^3 \cos 2 a + 3^3 \cos 3 a - \frac{1}{2^4} (2 + 8 \text{ tg.}^2 \frac{a}{2} + 6 \text{ tg.}^4 \frac{a}{2})$$

$$\cos a - 2^5 \cos 2 a + 3^5 \cos 3 a - \frac{1}{2^6} (16 + 136 \text{ tg.}^2 \frac{a}{2} + 240 \text{ tg.}^4 \frac{a}{2} + 120 \text{ tg.}^6 \frac{a}{2})$$

ubi, coëfficientibus a; b; c ... et A, B, C ... eodcm ut supra ordine dispositis crit

quarum aequationum ope facili negotio summae omnium nostrarumserierum assignari possunt,

I. Posito
$$a = 0$$
 erit
 $1 - 2 + 3 - 4 + = \frac{\Gamma}{4}$
 $1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + = -\frac{\Gamma}{23}$
 $1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + = \frac{\Gamma}{4}$
 $1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + = -\frac{17}{16}$
 $1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + = \frac{3\Gamma}{4}$ etc.

quas series ctiam ill. Euler (Calc. diff. Pars II cap. VII) invenit:

Posito autem $a = 9.0^{\circ}$, habebitur

1 - 1 + 1 - 1 +
$$\frac{1}{2}$$
 ut constat
1 - 3² + 5² - 7² + $\frac{1}{2}$
1 - 3⁴ + 5⁴ - 7⁴ + $\frac{5}{2}$
1 - 3⁶ + 5⁶ - 7⁶ + $\frac{1}{2}$
1 - 3⁸ + 5⁸ - 7⁸ + $\frac{1385}{2}$ etc. etc.

14. Desunt nunc series iisdem ut superiores terminis, sed omnibus positivis, compositae.

Differentiando aequationem

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \frac{1}{2} \cot g \cdot \frac{a}{2}$$
 obtine bimus
 $\sin a + 2^2 \sin 2a + 3^2 \sin 3a + \frac{1}{23} \cot g \cdot \frac{a}{2} (2 + 2 \cot g \cdot \frac{a}{3})$
 $\sin a + 2^4 \sin 2a + 3^4 \sin 3a + \frac{1}{23} \cot g \cdot \frac{a}{2} (16 + 40 \cot g \cdot \frac{a}{2} + 24 \cot g \cdot \frac{a}{2})$
et $\cos a + 2 \cos 2a + 3 \cos 3a + \frac{1}{2} \frac{1}{4} (1 + \cot g \cdot \frac{a}{2})$
 $\cos a + 2^3 \cos 2a - 3^3 \cos 3a + \frac{1}{2} \frac{1}{2} (2 + 8 \cot g \cdot \frac{a}{2} + 6 \cot g \cdot \frac{a}{2})$ etc.

ubi videmus, coëfficientes cosdem esse ut in § praecedenti, summasque istas a praecedentibus non nisi mutatione tangentis in cotangentem discrepare.

15. Transeamus jam ad series ejusdem formae, in quibus m et n quascunque quantitates integras negativas designant, quem in finem iterata integratione eodem modo ascendere debebimus, ut antea per differentiationes succedentes descendere oportuit, habito autem respectu quantitatum constantium per integrationes introductarum.

Jam antea invenimus

$$\frac{a}{2} = \sin a - \frac{1}{\xi} \sin 2 a + \frac{1}{3} \sin 3 a - \frac{1}{\xi} \sin 3$$

quae series per ∂a multiplicata et integrata suppeditat,

$$\frac{a^2}{4} = -\cos a + \frac{1}{2}\cos 2a - \frac{1}{3^2}\cos 3a + \dots + \text{Const.}$$

d determinationem quantitatis constantis, sit a = 0, unde

Const.
$$= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} +$$

Sint jam numeri Bernoulliani (Euler Calc., diff., Pars II. Cap. V)

 $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$ $\mathfrak{B} = \frac{1}{30}$ $\mathfrak{C} = \frac{1}{42}$ $\mathfrak{D} = \frac{1}{30}$ $\mathfrak{C} = \frac{5}{66}$ $\mathfrak{F} = \frac{5}{52}$ detc. et brevitatis causa.

$$A = \frac{2-\tau}{1+2} \mathfrak{A}$$

$$A_{y} = \frac{2^{3}-1}{1(2^{3})^{3}} \mathfrak{B}$$

$$\mathbf{A}_{"} = \frac{2^{5}-1}{1\cdot 2\cdots 6} \, \mathfrak{C}$$

$$A_{///} = \frac{27-1}{1+2\cdots8} \mathfrak{D}$$
 etc.

quibus positis, erit ut constat $C = A\pi^2$ ubi $\pi = 3.1415920$. unde series nostra fit.

$$\cos a - \frac{1}{2^2}\cos 2a + \frac{1}{3}\cos 3a - \frac{1}{2^2}\cos 4\pi$$

quae per da multiplicata, integrataque praebet

$$\sin a - \frac{1}{2^3} \sin 2a + \frac{1}{3^3} \sin 3a - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + A \pi^2 a$$
 constante integrationis evanescente.

Eodem labore saepius repetito tandem invenietur pro n numero integro impari

$$\sin a - \frac{1}{2n} \sin 2a + \frac{1}{3n} \sin 3a - \frac{1}{4n} \sin 4a + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sin 4a + \frac{1}{2n} \sin$$

signam superities, so n est formate 2(2p) + 1 = 1, 3, 3 = 1...

. inferius 2(2p+1)+1 = 3, 7, 11 = 1...

et pro m numero integro pari

$$\cos a - \frac{1}{5m}\cos 2a + \frac{1}{3m}\cos 3a - \frac{1}{5m}\cos 3a$$

£6. Restant insuper series sequentes

$$S = \cos a - \frac{1}{2} \cos 2a + \frac{1}{3} \cos 3a$$

$$s = \sin a - \frac{1}{2^2} \sin 2a + \frac{1}{3^2} \sin 3a - \frac{1}{2^2}$$

$$s' = \cos a - \frac{1}{2^3} \cos 2a + \frac{1}{3^3} \cos 3a - \frac{1}{2^4}$$

$$s'' = \sin a - \frac{1}{2^4} \sin 2a + \frac{1}{3^3} \sin 3a - \frac{1}{2^4}$$

Quarum prima, ut constat, praebet $S = \log_{10} 2 \cos_{\frac{a}{2}}$. Summas autem sequentium, quamvis termino finito exprimere non possumus, tamen quantitatem transcendentem, unde earum summatio dependet, in genere exhibere licebit. Differentiando nimirum alteram seriem obtinebimus

unde concluditur fore
$$\frac{\partial s}{\partial a} = S$$
 vel $s = \int \partial a \log 2 \cos \frac{a}{2}$ codemque modo $s' = -\iint \partial a^2 \log 2 \cos \frac{a}{2}$ etc. ita ut in genere sit sin. $a = \frac{1}{2^m} \sin 2a + \frac{1}{3^m} \sin 3a - \frac{1}{2^m} + \int_{-1}^{m-1} (\partial a)^{m-1} \log 2 \cos \frac{a}{2}$, signum superius pro $m = 2, 6, 10, 14$. cos. $a = \frac{1}{2^n} \cos 2a + \frac{1}{3^n} \cos 3a - \frac{1}{2^n} + \int_{-1}^{n-1} (\partial a)^{n-1} \log 2 \cos \frac{a}{2}$, signum superius pro $n = 5, 9, 13, 17$.

Ad casdem expressiones *Eulerus* sed toto coelo diversa via perveniebat. Vide Acta Acad. Imp. scient. Tom. I. Pars. II. pag. 3. vel Instit. calc. Integralis. Vol. IV. p. 154. cdit. altera.

Hinc denique facile concluditur, serierum

$$\Sigma = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{2^7}$$

quarum summationem ill. Euler (Calc. diff. Pars II. cap. 7) ut difficillimam in medio reliquit, summas exprimi posse modo sequenti

$$\Sigma = -\int s \, \partial a$$

$$\Sigma' = \int \partial a \int \partial a \int s \, \partial a$$

$$\Sigma'' = -\int \partial a \int \partial a \int \partial a \int \partial a \int s \, \partial a \text{ etc.}$$

ubi $s = \int \partial a \log 2 \cos \frac{a}{2}$, omnibus integralibus pro casu singulari a = 0 sumtis.

17. Jam ad sevies ejusdem eum praecedentibus formae pervenimus, quarum autem omnes termini codem affecti sunt signo.

Supra autem invenimus

$$\frac{\pi - a}{2} \sin a + \frac{1}{2} \sin 2 a + \frac{1}{3} \sin 3 a +$$

id quod per da multiplicatum integratumque dabit

$$\frac{a}{4} - \frac{\pi a}{2} = \cos a + \frac{1}{2} \cos 2a + \frac{1}{3} \cos 3a + \dots + \text{Const.}$$

Invenitur autem Const. = $-\frac{2 \sqrt{\eta} \pi^2}{4 \sqrt{2}}$

unde codem modo sequitur

$$\frac{a^3}{12} - \frac{\pi^{3^2}}{4} + \frac{2 \sqrt[3]{\pi^2 a}}{1 \cdot 2} = \sin a + \frac{1}{2^3} \sin 2 a + \frac{1}{3^3} \sin 3 a + \frac{1}{3^3}$$

Posito proinde brevitatis gratia

$$B = \frac{2 \mathfrak{A}}{1 \cdot 2}$$

$$B_1 = \frac{2^3 \mathfrak{B}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$B_2 = \frac{2^5 \mathfrak{E}}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot 6}$$

$$B_3 = \frac{2^7 \mathfrak{D}}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot 8} \text{ etc.}$$

facili negotio invenietur

pro n numero integro impari

$$\begin{array}{c}
\sin a + \frac{1}{2n}\sin 2a + \frac{1}{3n}\sin 3a + \frac{1}{3n$$

signum superius pro n = 2(2p+1)+1 = 3, 7, 11...

... inferius ... 2(2p) + 1 = 5, 9, 13...

et pro m numero integro pari

$$= \pm \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}a^{m}}{\frac{1}{2}a^{m}} & \cos 2a + \frac{1}{3^{m}}\cos 3a + \frac{1}{2} \\ \frac{\frac{1}{2}a^{m}}{\frac{1}{2}a^{m}} & \frac{\frac{1}{2}\pi a^{m-1}}{\frac{1}{2}a^{m}} + \frac{\frac{1}{2}\pi a^{m-2}}{\frac{1}{2}a^{m}} - \frac{\frac{1}{2}\pi^{4}a^{m-4}}{\frac{1}{2}a^{m}} \\ + \frac{\frac{1}{2}a^{6}a^{m}-6}{\frac{1}{2}a^{m}} & \frac{1}{2}a^{m} & \frac{1}{2}a^{m} \end{cases}$$
 (D)

signum superius pro m = 2(2p+1) = 2, 6, 10... inferius . . . 2(2p) = 4, 8, 12...

18. Desunt hic series

T =
$$\cos a + \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{3}\cos 3a + \frac{1}{2}\sin a + \frac{1}{2^2}\sin 2a + \frac{1}{3^2}\sin 3a + \frac{1}{2^2}\cos a + \frac{1}{2^3}\cos 2a + \frac{1}{3^3}\cos 3a + \frac{1}{2^4}\sin a + \frac{1}{2^4}\sin 2a + \frac{1}{3^4}\sin 3a + \frac{1}{3^4}\sin$$

Ast cum sit $T = -\log_2 2 \sin_2 \frac{a}{2}$, erit $t = \int T \partial a$ $t' = -\iint T \partial a^2$ $t'' = -\iiint T \partial a^3 \text{ etc. etc.}$

Cum autem formula $\int \partial a \log \sin \frac{a}{2}$ omnem integrationem prorsus respuat, ulterius progredi haud licebit, immo ne pro a = 0 quidem hace integralia termino finito dari possunt, in quo casu haberentur summae serierum

quas series etiam ill. Euler (calc. diff. Pars II. cap. VI) summare frustra conatus est.

19. Quodsi serie A addatur series C, habebitur

$$sin. a + \frac{1}{3}n sin. 3 a + \frac{1}{5}n sin. 5 a + \frac{1}{5}n sin.$$

Eodem modo aequationum B et D summa praebebit

$$\begin{array}{c} \cos a + \frac{1}{3m}\cos 3a + \frac{1}{5m}\cos 5a + \frac{1}{5m}$$

in quibus acquationibus brevitatis gratia suppositum est

$$C = \frac{2 \cdot 2 - 1}{1 \cdot 2} \mathfrak{A}$$

$$C_1 = \frac{2^4 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mathfrak{B}$$

$$C_2 = \frac{2^6 - 1}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 6} \mathfrak{C}$$

$$C_3 = \frac{2^8 - 1}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 8} \mathfrak{D} \text{ etc. etc.}$$

His jam seriebus inventis nullo fere negotio innumerabiles propemodum casus singulares memoratu dignissimos evolvere liceret, quos autem ob praescriptos huic dissertationi fines angustos in anam occasionem differre visum est.

Sectio tertia.

20. Aequatio tang. $x = \frac{\alpha \sin a}{1 + \alpha \cos a}$, quae nobis in prima sectione tantae utilitatis fuerat, insuper solutioni alius problematis non omnino attentione indigni inserviet.

Problema.

Valorem quantitatis tang. a per seriem exprimere, quae per sinus angulorum multiplorum ipsius a procedit.

Solutio.

Cum sit
$$ig.\frac{a}{2} = \frac{sin. a}{1 + cos. a}$$
, ponatur
 $\frac{1}{1 + cos. a} = A \sin. a - B \sin. 2a + C \sin. 3a - D \sin. 4a +$

unde altera hujus acquationis parte per (1 - cos. a) multiplicata, prodibunt acquationes conditionales sequentes

$$B \equiv 2 A - 1$$

$$C \equiv 3 A - 2$$

$$D \equiv 4 A - 3$$

$$E = 5 A - 4 \text{ etc.}$$

ubi notatu dignum, primain harum quantitatum A prorsus arbitrariam remanere, unde sequitur problema nostrum per infinitas series solvi posse, quae omnes in hae generali continentur

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \cdot \frac{a}{5} = A \sin a - (2A - 1) \sin 2a + (3A - 2) \sin 3a - (4A - 3) \sin 4a + \dots$$

I. Pro casu singulari A = 1 erit etiam B = C = D. = 1 et hinc

$$\frac{1}{2}$$
 tg. $\frac{a}{5}$ = sin. a - sin. $2a$ + sin. $3a$ -

uti jam §. 13. inventum fuerat.

II. Pro A = 0 erit B = -1, C = -2, D = -3 unde $\frac{1}{2}$ tg. $\frac{a}{0}$ = sin. 2a - 2 sin. 3a + 3 sin. 4a - 4 sin. 5a + ...

Hujus autem aequationis disserentiale est

$$\frac{1}{4 \cos^{2} \frac{a}{2}} = 1.2 \cos 2a - 2.3 \cos 3a + 3.4 \cos 4a -$$

quod pro a = 0 abit in

$$\frac{1}{4} = 1.2 - 2.3 + 3.4 - 4.5 +$$

series nota, cum sit

1. 2 - 2.
$$3x + 3$$
. $4x^2 - 4.5x^3 + \frac{2}{(1+x)^2}$

III. Pro A=-1 erit B=-3, C=-5, D=-7 under $\frac{1}{2}$ tg. $\frac{a}{2}$ = - sin. a + 3 sin. 2a - 5 sin. 3a + 7 sin. 4a - cujus aequationis differentiale pro a = 0 dat

$$\frac{1}{3} = -1 + 2.3 - 3.5 + 4.7 - 5.9 + ...$$

Ad seriem autem postremam aliter demonstrandam erit ut constat

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \frac{x}{(1-x)^2}$$

quod ponatur $\equiv s$. Jam si singuli hujus seriei termini respective per 1, 3, 5, 7.. multiplicentur, prodit

$$x + 2.3x^2 + 3.5x^3 + 4.7x^4 +$$

cujus summa si ponatur s' erit, secundum methodum ill. Euleri in suo cale. diff. Pars. II. eap. II. §. 24 expositam,

$$s' = s + 2x \cdot \frac{\partial s}{\partial z}$$

unde omnibus rite reductis habetur

$$s' = \frac{x + 3x^2}{(1-x)^3}$$

ubi si ponatur $x \equiv -1$ erit

$$-1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 - \frac{1}{2^3} = \frac{1}{4}$$
 ut supra.

21. In sectione prima (§. 6.) inventum fuerat $C = \frac{1 + n^2}{n} \sin C - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + n^4}{n^2} \sin 2 + C + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + n^6}{n^3} \sin 3 + C - \frac{1}{n^3} \cos 3 + C + \frac{1}{n^3} \cos 3 + \frac{1}{n^3} \cos 3$

ubi notatu quam maxime dignum, hanc seriem ex duabus aliis esse conflatam, quae si ponantur x et y, erit

$$x = n \text{ sin. } C - \frac{1}{2}n^2 \text{ sin. } 2C + \frac{1}{3}n^3 \text{ sin. } 3C - y = \frac{1}{n} \text{ sin. } C - \frac{1}{2n^2} \text{ sin. } 2C + \frac{1}{3n^3} \text{ sin. } 3C - \frac{1}{3n^3}$$

Sint jam A. B, C anguli et a, b, c latera trianguli sphaerici illis respective opposita et $n \equiv - \text{tg.} \frac{\alpha}{2} \text{ tg.} \frac{b}{2}$ unde per, formulain Neperianam habebinus

cotg.
$$\frac{A+B}{2} = \frac{1-n}{1+n}$$
 tg. $\frac{1}{2}$ C.

Ex hac acquatione ill. Legendre (Géométrie, Notes) methodo pereleganti invenit esse

$$\frac{A+E+C}{2}-90^{\circ}=x.$$

Nos autem supra reperimus $x + y \equiv C$ unde sequitur esse

$$y = 90 + \frac{C - A - B}{2}$$
 hoc est

$$\frac{A+B}{2} = 90 + \frac{C}{2} - \frac{1}{n} \sin \cdot C + \frac{1}{2n^2} \sin \cdot 2 + C - \frac{1}{3n^3} \sin \cdot 3 + C + \dots (I).$$

I. Eadem ratione in §. 11 invenimus

$$-C = \frac{1+m^2}{m} \sin C + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+m^4}{m^2} \sin 2C + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+m^6}{m^3} \sin 3C +$$

quae series iterum ex duabus sequentibus componitur

$$x = m \sin . C + \frac{1}{2}m^2 \sin . 2 C + \frac{1}{3}m^3 \sin . 3 C + y = \frac{1}{m} \sin . C + \frac{1}{2m^2} \sin . 2 C + \frac{1}{3m^3} \sin . 3 C + .$$

Posito autem $m \equiv \text{tg. } \frac{b}{2} \text{ cotg. } \frac{a}{2} \text{ erit, secundum ill. } Legendre loc. cit.$

$$x = \frac{180 - (A - B + C)}{2}$$

unde cum supra reperimus $x + y + C \equiv 0$, sequitur fore

$$y = \frac{A - B - C - 180}{2}$$
 hoc est

$$\frac{A-B}{2} = 90 + \frac{C}{2} + \frac{1}{m} \sin C + \frac{1}{2m^2} \sin 2C + \frac{1}{3m^3} \sin 3C + \dots (II).$$

Eadem methodus etiam ad binas sequentes series ab ill. Legendre datas, quibus latera per angulos dantur, accomodari potest, ita quidem, ut quaternis seriebus istis aliae quatuor adjici possint, quibus postremis solutio D. Legendre completa redditur, cum novae nostrae series iis tantum in easibus applicationem patiantur, in quibus veteres quatuor ob terminos divergentes adhibere nequeunt. Restat proinde, ut etiam pro logarithmo tertii lateris vel anguli aliae series, eadem indole gaudentes, in medium proferantur. Has autem jam in alia dissertatiuncula (Sur les hauteurs observées près du méridien, Vol. V des mémoires de St. Petersb.) publici juris feci. Collectae proinde nunc omnes formulae inventae, ita sese habebunt

$$\frac{A+B}{2} = 90 - \frac{C}{2} + n \sin \cdot C - \frac{n^2}{2} \sin \cdot 2C + \frac{n^3}{3} \sin \cdot 3C - \frac{A-B}{2} = 90 - \frac{C}{2} - m \sin \cdot C - \frac{m^2}{2} \sin \cdot 2C - \frac{m^3}{3} \sin \cdot 3C - \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} \sin \cdot 2C - \frac{m^3}{3} \sin \cdot 3C - \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 2C - \frac{m^3}{2} \sin \cdot 3C - \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 2C - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 2C - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 3C - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 2C - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 3C - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 2C - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 3C - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 2C - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 3C - \frac{m^2}{2} \cos \cdot 3$$

Acquationes praecedentes a D. Legendre datae sunt, quibus addimus octo sequentes, iis casibus adaptatae, quibus priores ut divergentes satisfacere non possunt.

$$\frac{A+B}{\frac{1}{2}} = 90 + \frac{C}{2} - \frac{1}{a} \sin C + \frac{1}{2}\pi^{2} \sin 2C - \frac{1}{3}\sin 3C + \frac{1}{2}\pi^{2} \sin 2C - \frac{1}{3}\sin 3C + \frac{1}{2}\pi^{2} \sin 2C + \frac{1}{3}\pi^{3} \sin 3C + \frac{1}{2}\pi^{2} = -\frac{1}{2}c - \frac{1}{p}\sin c - \frac{1}{2p^{2}}\sin 2c - \frac{1}{3}\sin 3c - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\cos c - \frac{1}{2}\sin 2c - \frac{1}{3}\sin 3c - \frac{1}{2}\cos c - \frac{1}{2}\cos 2c - \frac{1}{3}\sin 3c - \frac{1}{2}\cos 3c - \frac$$

III. Inventis nunc caeteris octo aequationibus, nullo negotio faciliorem earum demonstrationem inveniemus. Primae quatuor a D. Légendre datae ex formulis Neperianis deductae sunt, quae formulae in genere per aequationem

tang.
$$\frac{x}{2} = \frac{i+b}{1-b}$$
 . tang. $\frac{y}{2}$

repraesentari possunt. Jam facile demonstratur, ex hac aequatione valorem ipsius $\frac{x}{n}$ proditurum esse sequentem

 $\frac{x}{3} = \frac{1}{5} + b \sin y + \frac{1}{5}^2 \sin 2y + \frac{5}{3}^3 \sin 3y + \frac{1}{5}^2 \sin 2y + \frac{5}{3}^3 \sin 3y + \frac{1}{5}^2 \sin 2y + \frac{1}{5}^2 \sin 2y + \frac{1}{5}^2 \sin 3y + \frac{1}{5}^2$

Ast cum cadem acquatio etiam sie scribi potest

$$tg\frac{x}{2} = -\frac{1+\frac{t}{b}}{1-\frac{t}{b}}tg,\frac{y}{2}$$

unde aequationes meae petitae sunt.

sequitur fore, mutatis tantummodo b in $\frac{1}{b}$ et y in 360 - y, $\frac{x}{2} = 180 - \frac{y}{2} - \frac{1}{b} \sin y - \frac{1}{2}b - \sin 2y - \frac{1}{3}b3 \sin 3y - \frac{1}{2}b - \frac{1}{3}b3 \sin 3y -$

Quoad acquationes quatuor postremas, jam loc. cit. (Mem. Vol. 17.) adnotavi, si pro

 $\frac{1-\sin a \sin b \cos C - \cos a \cos b}{2}$ ponatur $f^2 + 2fg \cos C + g^2$ pro f et g duplices prodire valores, nimirum

$$f \equiv \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \text{ vel etiam } f \equiv \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}$$

 $g \equiv \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}$ $g \equiv \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}$

unde ctiam pro quovis logarithmo quatuor serierum postremarum duplicem aequationem nacti sumus

22. Coronidis loco considerabimus quasdam series ex prioribus sponte sua fluentes.

Supra inventum fuerat
$$\frac{a}{2} \equiv \sin a - \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{1}{3} \sin 3a - \cot \cos 2 \cos \frac{a}{2} \equiv \cos a - \frac{1}{2} \cos 2a + \frac{1}{3} \cos 3a - \cot \frac{a}{2} \cos 2a + \frac{1}{3} \cos 3a - \cot \frac{a}{2} \cos a + \frac{1}{3} \cos 3a - \cot \frac{a}{2} \cos a + \frac{1}{3} \cos 3a - \cot \frac{a}{2} \cos a + \frac{1}{3} \cos 3a - \cot \frac{a}{2} \cos a + \frac{1}{3} \cos 3a - \cot \frac{a}{2} \cos 3a$$

Multiplicata serie prima per $\cos a$ et altera per $\pm \sin a$. vel priori per $\sin a$ et secunda per $\pm \cos a$, obtinchimus, quatuor series sequentes

$$\sin 2a - \frac{1}{2}\sin .3a + \frac{1}{3}\sin .4a - \frac{1}{4}\sin .5a + \pm \frac{a}{2}\cos .a + \sin .a \cdot \log .2\cos \frac{a}{2} \\
\frac{1}{2}\sin .a - \frac{1}{3}\sin .2a + \frac{1}{4}\sin .3a - \frac{1}{5}\sin .4a + \pm -\frac{a}{2}\cos .a + \sin .a \cdot \log .2\cos \frac{a}{2} \\
1 - \frac{1}{2}\cos .a + \frac{1}{3}\cos .2a - \frac{1}{4}\cos .3a + \pm \frac{a}{2}\sin .a + \cos .a \cdot \log .2\cos \frac{a}{2} \\
\cos .2a - \frac{1}{2}\cos .3a + \frac{1}{3}\cos .4a - \frac{1}{4}\cos .5a + \pm -\frac{a}{2}\sin .a + \cos .a \cdot \log .2\cos \frac{a}{2}$$

Summa primae et secundae harum serierum est

$$\frac{1}{4}\sin a + \frac{1}{1 \cdot 3}\sin 2a - \frac{1}{2 \cdot 4}\sin 3a + \frac{1}{3 \cdot 5}\sin 4a - \frac{1}{4 \cdot 6}\sin 5a + \frac{1}{4 \cdot 6}\sin a \cdot \log 2 \cos \frac{a}{2} \quad . \quad . \quad (II)$$

earumdemque differentia

$$\frac{2}{1 \cdot 3} \sin. 2a - \frac{3}{2 \cdot 4} \sin. 3a + \frac{4}{3 \cdot 5} \sin. 4a - \frac{5}{4 \cdot 6} \sin. 5a + \frac{a}{2} \cos. a + \frac{1}{4} \sin. a$$

quarum prima pro a = 90 praebct

log.
$$4 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \text{ et altera}$$

 $\frac{1}{4} = \frac{3}{2 \cdot 4} - \frac{5}{4 \cdot 6} + \frac{7}{6 \cdot 8} - \frac{9}{8 \cdot 10} + .$

Eodem modo summa tertiae et quartae aequationum I. suppeditat

$$\cos a \cdot \log 2 \cos \frac{a}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos a$$

$$=\frac{2}{1\cdot 3}\cos a - \frac{3}{2\cdot 4}\cos 3a + \frac{4}{3\cdot 5}\cos 4a - \frac{5}{4\cdot 6}\cos 5a +$$

et earumdem differentia

$$\frac{a}{2}\sin a := \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos a - \frac{\tau}{1 \cdot 3}\cos 2a + \frac{\tau}{2 \cdot 4}\cos 3a - \frac{\tau}{3 \cdot 5}\cos 4a + \frac{\tau}{4 \cdot 6}\cos 5a \dots (III)$$

quarum prima dat

 $\log_{1} 2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} - \frac{5}{4 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 5}$

et secunda pro a = 0

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{5 \cdot 7}$$

et pro $a = 90^{\circ}$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{1 \cdot 3} - \frac{\tau}{3 \cdot 5} + \frac{\tau}{5 \cdot 7} - \frac{\tau}{7 \cdot 9} + \tilde{\epsilon}$$

23. Multiplicata serie III (§. 22) per ∂a integrataque erit $\frac{a}{2} - \frac{1}{4} \sin a - \frac{1}{2} \int a \partial a \sin a$ $\frac{\tau}{\tau + 2 \cdot 3} \sin 2 a - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \sin 3 a + \frac{\tau}{3 \cdot 4 \cdot 5} \sin 4 a - .$

Facile autem invenitur

$$\int a \partial a \sin a = \sin a - a \cos a$$
,

unde sequitur, quantitate constante integrationis evanescente.

$$\frac{a}{2}(1 + \cos a) - \frac{3}{4}\sin a$$

 $\frac{1}{1+2+3}\sin 2a - \frac{1}{2+3+4}\sin 3a + \frac{1}{3+4+5}\sin 4a - \frac{1}{4+5+6}\sin 5a + \frac{1}{3+4+5}\sin 6a + \frac{1}{3+4+5$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12} - \frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12}$$

I. Quodsi acquatio II (§. 22) eodem modo per ∂a multiplicatur; erit $-\frac{1}{4}\cos a - \int \partial a \sin a \cdot \log 2 \cos \frac{a}{2} = \frac{1}{1+2+3}\cos 2a - \frac{1}{2+3+4}\cos 3a + .$ Ast $\int \partial a \sin a \cdot \log 2 \cos \frac{a}{2} = \cos \frac{2a}{2} - 2 \cos \frac{2a}{2} \cdot \log 2 \cos \frac{a}{2}$ unde $\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\cos \frac{2a}{2} + 2 \cos \frac{2a}{2} \cdot \log 2 \cos \frac{a}{2}$ unde $\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\cos 2a - \frac{1}{2+3+4}\cos 3a + \frac{1}{3+4+5}\cos 4a - \frac{1}{4+5+6}\cos 5a + \frac{1}{4+5+6$

 $\log 4 - \frac{5}{4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{r}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{r}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{r}{4 \cdot 5} +$ et pro $a = 180^{\circ}$, in quo casu facile demonstratur fore

 $2 \cos^2 90 \cdot \log 2 \cos 90 = 0$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}$$

quarum serierum summa praebet

 $\log 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} +$ earunidemque differentia

 $\frac{3}{4} - \log_2 2 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8}$

Habemus autem ut constat,

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{10} + \frac{1}$$

unde conjunctis duabus postremis seriebus habebitur

$$\frac{\pi}{8}$$
 - log. $\sqrt{2}$ = $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ + $\frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8}$ + $\frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12}$ + $\frac{1}{14 \cdot 15 \cdot 16}$ + .



DE TRANSFORMATIONE SERIEI IN FRACTIONEM CONTINUAM

AUCTORE

F. T. SCHUBERTO.

Conventui exhibuit die 17 Maji 1815.

§. 1. Quanquam problema de que hie agitur, saepius jam fuit solutum, non tamen inutilem fore existimo methodum quam hie expositurus sum, quippe quae legem quam ejusmodi fractiones sequuntur, relationemque inter singulos illius terminos existentem, lucidissime estendit. Proposita serie secundum potentias incognitae aut variabilis α procedente, semper licet, divisione per primum terminum instituta, formam ei dare sequentem,

$$Ax^{n}$$
 (1 + α_{1} x + α_{2} x² + cet.).

Quodsi series sit fracta, ex. gr. $\frac{Ax^n + Bx^{n+1}}{ax^m + bx^m + 1} + \frac{Cx^n + 2 + cet}{cx^m + 2 + cet}$ facile est, similem illi tribuere formam, scilicet

$$\frac{A}{a} \tilde{x}^n - m \left(\frac{1 + \frac{B}{A} x + \text{cet.}}{1 + \frac{b}{A} x + \text{cet.}} \right).$$

Quare nonnisi series hujus formae tractabimus.

§. 2. Proposita itaque series

$$S = 1 + c_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + cet.$$

convertatur in fractionem continuam

$$\frac{1}{1+x}$$

$$\frac{a_1+x}{a_2+x}$$

$$\frac{a_3+\cot x}{a_3+\cot x}$$

et ponátur

et sic porro, ut sit $z_1 = a_1 + \frac{x}{z_2}$, $z_2 = a_2 + \frac{x}{z_3}$, ct in universum $z_n = a_n = \frac{x}{z_n + 1}$: unde crit

$$S = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + cet. = \frac{1}{1 + \frac{x}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1 + x}$$

et si utrinque ducas in $z_i + x$, adipisceris aequationem

$$0 = x + (z_1 + x) (a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \text{cet.}), \text{ sive }$$

$$0 = (1 + a_1 z_1) + (a_1 + a_2 z_1) x + (a_2 + a_3 z_1) x^2 + \dots + (a_n + a_{n+1} z_1) x^n + \text{cet.}$$

quae quidem, digesta secundum potestates x, et substituto valore $z_1 = a_1 + \frac{x}{z_2}$, convertitur in hanc:

(A)
$$0 = (1 + \alpha_1 \ a_1) + (\frac{\alpha_1}{z_2} + \alpha_1 + \alpha_2 \ a_1) \ x$$

 $+ (\frac{\alpha_2}{z_2} + \alpha_2 + \alpha_3 \ a_1) \ x^2 + \dots \dots$
 $+ (\frac{\alpha_n}{z_2} + \alpha_n + \alpha^{n+1} \ a_1) \ x^n + \text{cet.}$

§. 3. Primus hujus seriei terminus constans praebet aequationem, qua primus denominator a_i determinatur, videlicet

(1)
$$0 = 1 + a_1 a_1$$
 sive $a_1 = -\frac{1}{a_1}$.

Rejecto itaque hoc termino, acquatio (A) ducta in z_2 , et divisa per x_1 induit formam

$$0 = (a_1 + (a_1 + a_2 a_1)z_1) + (a_2 + (a_2 + a_3 a_1 z_2)x + \dots + (a_n + (a_n + a_{n+1} a_1)z_1)x^{n-1} + \text{cet.}$$

quae, substituto $z_2 = a_2 + \frac{x}{z_3}$, et posito

$$a_1 + a_2 a_1 \equiv A_1^{(1)}$$
, et omnino $a_n + a_{n+1} a_1 \equiv A_n^{(1)}$, evadit

(B)
$$\mathbf{o} = (\alpha_{1} + A_{1}^{(1)} a_{2}) + (\frac{A_{1}^{(1)}}{z_{3}} + \alpha_{2} + A_{2}^{(1)} a_{2}) x + \dots$$

 $+ (\frac{A_{n-1}^{(1)}}{z_{3}} + \alpha_{n}^{(1)} + A_{n}^{(1)} a_{2}) x^{n-1} + \text{cet.}$

unde ad determinandum secundum denominatorem a_2 , primus terminus praebet acquationem

(2)
$$0 = a_1 + A_1^{(1)} a_2$$
 seu $a_2 = -\frac{a_1}{A_1^{(1)}}$;

quo termino omisso, aequatio (B) dueta in $z_3 = a_3 + \frac{x}{z_4}$, et divisa per α , positoque $\alpha_n + A_n^{(1)} \alpha_2 = A_n^{(2)}$, transformabitur in sequentem

(C)
$$0 = (A_{1}^{(1)} + A_{2}^{(2)} a_{3}) + (\frac{A_{2}^{(2)}}{z_{4}} + A_{2}^{(1)} + A_{3}^{(2)} a_{3}) x + \dots$$

 $+ (\frac{A_{n-1}^{(2)}}{z_{4}} + A_{n-1}^{(1)} + A_{n}^{(2)} a_{5}) x^{n-2} + \text{cet.}$

§. 4. Terminus primus dat aequationem

(3)
$$0 = A_1^{(1)} + A_2^{(2)} a_3$$
, sive $a_3 = -\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(2)}}$,

ac si in residuo, in $z_4 = a_4 + \frac{x}{z_5}$ ducto, substituamus

$$\mathbf{A}_{n-1}^{(1)} + \mathbf{A}_n^{(2)} a_3 = \mathbf{A}_n^{(3)}$$
, nova orietur aequatio

$$\mathbf{A}_{n-1}^{(1)} + \mathbf{A}_{n}^{(2)} a_{3} = \mathbf{A}_{n}^{(3)}, \text{ nova orietur aequatio}$$

$$\mathbf{(D)} \circ = (\mathbf{A}_{2}^{(2)} + \mathbf{A}_{3}^{(3)} a_{4}) + (\frac{\mathbf{A}_{3}^{(3)}}{\mathbf{Z}_{5}} + \mathbf{A}_{4}^{(2)} + \mathbf{A}_{4}^{(3)} a_{4}) x + \dots$$

$$+ (\frac{\mathbf{A}_{n-1}^{(3)}}{\mathbf{Z}_{5}} + \mathbf{A}_{n-1}^{(2)} + \mathbf{A}_{n}^{(3)} a_{4}) x^{n-3} + \text{cet.}$$

cunjs terminus primus iterum dat

(4)
$$0 = \Lambda_2^{(2)} + \Lambda_3^{(3)} a_4$$
, seu $a_4 = -\frac{\Lambda_2^{(2)}}{\Lambda_3^{(3)}}$.

§. 5. Lex progressionis satis jam patet; eamque esse universalem demonstratum crit, si ostenderimus, assumtam pro certo valore a_m , eam itidem obtinere casu a_{m+1} . Aequationes (C), (D), set valores a_3 , a_4 , cum quantitatibus compendii causa introductis, $A_n^{(3)} = A_{n-1}^{(1)} + A_n^{(2)}a_3$, sequenti adstrictae sunt legi, quam quidem susque ad m = 4 vigere vidimus:

(a)
$$0 = (A_{m-2}^{(m-2)} + A_{m-1}^{(m-1)} a_m) + (\frac{A_{n-1}^{(m-1)}}{z^{n+1}} + A_{m-1}^{(m-2)} + A_m^{(m-1)} a_m) x + \text{cet.}$$

ubi est (§. 4.) $A_n^{(3)} = A_n^{(1)} + A_n^{(2)} a_3$, h. e.

(b)
$$A_n^{(m-1)} = A_{n-1}^{(m-3)} + A_n^{(m-2)} a_{m-1}$$
.

Acquationis autem, quae definitioni denominatoris a_m inservit, a primo termino aequationis (a) suppeditatae, hujus formae est,

$$(c) \quad 0 = A_{m-2}^{(m-1)} + A_{m-1}^{(m-1)} a_m.$$

Rejecto itaque hoc termino in aequatione (a), eaque ducta in $z_{m+1} = a_{m+1} + \frac{x}{z_{m+2}}$ (§. 2.), nova orietur aequatio, cujus per x divisae primus terminus constans erit

$$0 = A_{m-1}^{(m-1)} + (A_{m-1}^{(m-2)} + A_m^{(m-1)} a_m) a_{m+1},$$

seu substituto

 $A_{n-1}^{(m-2)} + A_n^{(m-1)} a_m = A^{(m)}, \quad 0 = A_{m-1}^{(m-1)} + A_n^{(m)} a_{m+1},$ quae immediate oriuntur ex aequationibus (b), (c), si ibi m+1 loco m substituitur.

§. 6. In universum itaque verum est, in evolvenda serie $S = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$ sequentes obtinere aequationes:

 $0 = 1 + a_1 a_1(\S.3.), \quad 0 = a_1 + A_1^{(1)} a_2(\S.3.), \quad 0 = A_1^{(1)} + A_2^{(2)} a_3(\S.4.),$ et generation $0 = A_{m-2}^{(m-2)} = A_{m-1}^{m-1} a_m (\S.5.), \text{ sive}$

(a)
$$a_m = -\frac{A^{(m-2)}}{A_{m-1}};$$

ubi est $A_n^{(1)} = \alpha_n + \alpha_{n+1} a_1 (\S. 3.), A_n^{(2)} = \alpha_n + A_n^{(n)} a_2 (\S. 3.)_F$ $A_n^{(3)} = A_{n-1}^{(1)} + A_n^{(2)} a_3 (\S. 4.), \text{ et omnino}$

(b)
$$A_n^{(m)} = A_{n-1}^{(m-2)} + A_n^{(m-1)} a_m$$
 (§. 5.)

quae cum (a) comparata, praebet

(c)
$$\Lambda_n^{(m)} = \Lambda_{n-1}^{(m-2)} - \Lambda_n^{(m-1)} \frac{\Lambda_{n-2}^{(m-2)}}{\Lambda_{m-1}^{m-1}}$$
;

in quibus aequationibus literae $m_\tau n$, quoslibet numeros integros atque positivos denotant..

Exemplum I.

§. 7. Si logarithmum naturalem numeri 1 + x in fractionem continuam evolvere placet, posito $\log(1+x) = x.S$, series data erit

$$S = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \text{cet.}$$

proinde
$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}$$
, $\alpha_2 = +\frac{1}{3}$, etc. generatinque $\alpha_n = \pm \frac{1}{n+1}$,

ubi semel observare oportet, signum superius semper adhibendum esse, si n fuerit numerus par, inferius autem, si n impar. Hinc reperitur (§. 6.), $a_1 = -\frac{1}{1} = +2$;

$$A_{n}^{(1)} = \alpha_{n} + 2 \alpha_{n+1} = \pm \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right) = \pm \frac{n}{(n+1)(n+2)};$$

$$\alpha_{2} = -\frac{\alpha_{1}}{A_{1}^{(1)}} = \pm \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2 \cdot 3}} = \pm 3;$$

$$A_{n}^{(2)} = \alpha_{n} + 3 A_{n}^{(1)} = \pm \left(\frac{1}{n+1} - \frac{3n}{(n+1)(n+2)}\right) = \pm \frac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)};$$

$$\alpha_{3} = -\frac{A_{1}^{(1)}}{A_{2}^{(2)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3+4}} = \pm 1;$$

$$A_{n}^{(3)} = A_{n-1}^{(1)} + A_{n}^{(2)} = \pm \frac{n-1}{n(n+1)} + \frac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \pm \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)n};$$

$$a_{4} = -\frac{A_{3}^{(2)}}{A_{3}^{(3)}} = \pm \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \pm 5;$$

$$A_{n}^{(4)} = A_{n-1}^{(2)} + 5 A_{n}^{(3)} = \pm \frac{2(n-2)}{n(n+1)} + \frac{5(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)n} = \pm \frac{3(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+1)n}.$$

§. 8. Formulae istae clare ostendunt legem, qua numeri $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, etc. pariterque a^1 , a_2 , etc. procedunt. Est nempe, usque ad $r \equiv 3$ et $s \equiv 4$,

(1)
$$A_n^{(r)} = + \frac{(n-r+1)(n-r+2).....(n-\frac{r+1}{2})(n-\frac{r-1}{2})}{(n+2)(n+1)n.....(n-\frac{r-5}{2})(n-\frac{r-3}{2})}$$

(2)
$$A_n^{(s)} = + (\frac{1}{2}s + 1) \frac{(n-s+1)(n-s+2)....(n-\frac{1}{2}s-1)(n-\frac{1}{2}s)}{(n+2)(n+1)n....(n-\frac{1}{2}s+3)(n-\frac{1}{2}s+2)},$$

(3)
$$a_r = +\frac{4}{r+1}$$
; (4) $a_s = +(s+1)$.

Verum est in universum $(\S. 6. (a))$,

$$a_{r+2} = -\frac{\Lambda_r^{(r)}}{\Lambda_s^{(s)}}, \text{ et } a_{s+2} = -\frac{\Lambda_s^{(s)}}{\Lambda_{s+1}^{(s+1)}};$$

et substituto $r \equiv n$ in (1), et $s \equiv n$ in (2), reperitur, ob r numerum imparem, $s \equiv r + 1$ parem,

$$A_r^{(r)} = + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r+1}{2}}{(r+2)(r+1)r \cdot \dots \cdot \frac{r+5}{2} \cdot \frac{r+3}{2}}, \text{ et}$$

$$A_s^{(s)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s+1)}{(s+2)(s+1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}s+3)(\frac{1}{2}s+2)}$$

$$= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+1}{2} \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+3)(r+2) \cdot \dots \cdot \frac{r+5}{2}},$$

ideoque
$$-\frac{\Lambda_r^{(r)}}{\Lambda_s^{(s)}} = +\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+1}{2}}{(r+2)(r+1) \cdot \dots \cdot \frac{r-5}{2} \cdot \frac{r+3}{2}} \times \frac{(r+3)(r+2) \cdot \dots \cdot \frac{r+5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+1}{2} \cdot \frac{r+3}{2}},$$

sive $a_{r+2} = \frac{r+3}{\frac{r+3}{2} \cdot \frac{r+3}{2}} = \frac{4}{r+3}$, quae ad assem convenit cum aequatione (3), si ibi r+2 loco r substituatur.

Praeterea est generatim (§. 6. (b)) $A_n^{(s+1)} = A_{n-1}^{(r)} + A_n^{(s)} a_{s+1}$, ideoque $A_{s+1}^{(s+1)} = A_{r+1}^{(r)} + a_{r+2} A_{s+1}^{(s)}$. Est autem, substituto n = r+1 in (1) et n = s + 1 = r + 2 in (2)

$$\mathbf{A}_{r+1}^{(r)} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+1}{2} \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+3)(r+2) \cdot \dots \cdot \frac{r+7}{2} \cdot \frac{r+5}{2}},$$

$$A_{s+1}^{(s)} = + \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s + 1) (\frac{1}{2} s + 1)}{(s+3) (s+2) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2} s + 3)} = + \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+1}{2} \cdot \frac{r+3}{2} \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+4) (r+3) \cdot \dots \cdot \frac{r+7}{2}}.$$

Substituto itaque valore modo invento $a_{r+2} = \frac{4}{r+3}$, reperitur

$$A_{s\pm 1}^{(s+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+3)(r+2) \cdot \dots \cdot \frac{r+7}{2}} \left(\frac{r+3}{r+4} \cdot \frac{4}{r+3} - \frac{2}{r+5} \right)$$

$$= + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+3)(r+2) \cdot \dots \cdot \frac{r+7}{2}} \left(\frac{2}{(r+4)(r+5)} \right),$$

sive $A_{s+1}^{(s+1)} = +\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+4)(r+3) \cdot \dots \cdot \frac{r+5}{2}}$; quo valore substituto, fit

$$-\frac{A_{r}^{(s)}}{A_{s+1}^{(s+1)}} = +\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+3)(r+2) \cdot \dots \cdot \frac{r+5}{2}} \times \frac{(r+4)(r+3) \cdot \dots \cdot \frac{r+5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{r+3}{2}},$$

sive $a_{s+2} = +(r+4) = +s+3$; quae iterum perfecte congruit cum aequatione (4), numero s binario aucto.

Demonstravimus itaque, aequationes (3) et (4) veras esse, quoscunque numeros impares et pares literae r et s denotent. Ex

binis aequationibus, $a_r = \frac{4}{r+1}$, $a_s = s+1$, sequitur, non solum cunctos numeros a esse affirmativos, verum ctiam regula qua computantur facillima. Prior enim dat

$$a_1 = 2; a_3 = 1; a_5 = \frac{2}{3}; a_7 = \frac{1}{2}; a_9 = \frac{2}{5}; a_{11} = \frac{1}{3}; a_{13} = \frac{2}{7}; a_{15} = \frac{1}{4};$$
 et sie porro, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{2}{12}$, etc.. Posterior dat
$$a_2 = 3; a_4 = 5; a_6 = 7; a_8 = 9,$$

et sic porro per omnes numeros impares.

Exemplum II.

§. 9. Proposita serie Leibnitiana Arc. tang. $t = \frac{t}{1} - \frac{3}{3} + \frac{15}{5} - \cot t$ arcus crit $\equiv t \cdot S$, assumta serie

S =
$$1 - \frac{t^2}{3} + \frac{14}{5}$$
 - cet., seu posito $t^2 = x$,
S = $1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{7}x^3 + \text{cet.}$

ita ut sit
$$\alpha_1 = -\frac{1}{3}$$
, $\alpha_2 = +\frac{1}{5}$, et omnino $\alpha_r = -\frac{1}{2r+1}$, $\alpha_s = +\frac{1}{2s+1}$, seu $\alpha_n = +\frac{1}{2n+1}$. Unde obtinemus (§. 6.)

$$a_{1} = +3; \quad A_{n}^{(1)} = \alpha_{n} + 3\alpha_{n+1} = \pm \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}\right) = \pm \frac{4n}{(2n+1)(2n+3)};$$

$$a_{2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3 \cdot 5}} = \pm \frac{5}{4};$$

$$A_{n}^{(2)} = \alpha_{n} + \frac{5}{4}A_{n}^{(1)} = \pm \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{5n}{(2n+1)(2n+3)}\right) = \pm \frac{3(n-1)}{(2n+1)(2n+3)};$$

$$a_{3} = \frac{\frac{4}{3 \cdot 5}}{\frac{3}{5 \cdot 7}} = \pm \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 3};$$

$$A_{n}^{(3)} = A_{n-1}^{(1)} + \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 3} A_{n}^{(2)} = \pm \frac{4(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{4 \cdot 7 \cdot (n-1)}{3(2n+1)(2n+3)} = \pm \frac{12(n-1)(n-2)}{3(2n+3)(2n+1)(2n-1)};$$

$$a_{1} = \pm \frac{3}{5 \cdot 7} = \pm \frac{9 \cdot 9}{5 \cdot 8};$$

$$a_4 = \frac{+\frac{3}{5 \cdot 7}}{+\frac{64}{3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5}} = +\frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 8};$$

$$A_n^{(4)} = A_{n-1}^{(2)} + \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 8} A_n^{(3)} = \pm \frac{3(n-2)}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{3 \cdot 9 \cdot (n-1)(n-2)}{2(2n+3)(2n+1)(2n-1)} = \pm \frac{3 \cdot 5 \cdot (n-2)(n-3)}{2(2n+3)(2n+1)(2n-1)}.$$

§. 10. Lex progressionis numerorum $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, etc. a_1, a_2 , etc. usque ad $r \equiv 3$ et $s \equiv 4$, sequentibus declaratur formulis:

(1)
$$A_a^{(r)} = \frac{r+1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (r+1) \times (n-r+1) (n-r+2) \cdot \dots (n-\frac{r-1}{2})}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots r \times (2n+3) (2n+1) \cdot \dots (2n-r+2)}$$

(2)
$$A_n^{(s)} = \pm 2^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (s-1) \times (n-s+1) \cdot (n-s+2) \cdot \dots \cdot (n-\frac{s}{2})}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot s' \times (2n+3) \cdot (2n+1) \cdot \dots \cdot (2n-s+3)}$$

(3)
$$a_r = + \frac{(2r + 1)(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (r - 1))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot r)^2},$$

(4)
$$a_s = + \frac{(2s+1)(1.3.5...(s-1))^2}{(2.4.6...s)^2};$$

unde sequitur

$$A_{r}^{(r)} = +2^{\frac{r+1}{2}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (r+1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \frac{r+1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots r \times (r+2)(r+4) \cdot \dots (2r+1)(2r+3)},$$

$$A_{s}^{(r)} = -2^{\frac{r+1}{2}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (r+1) \times 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \frac{r+3}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots r \times (r+4)(r+6) \cdot \dots (2r+5)},$$

$$A_{s}^{(s)} = -2^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (s+1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \frac{s}{2}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots s \times (s+3)(s+5) \cdot \dots (2s+1)(2s+3)},$$

$$A_{s+1}^{(s)} = +2^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (s+1) \times 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (\frac{s}{2}+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \times s \times (s+5)(s+7) \cdot \dots (2s+5)}, \text{ vel}$$

$$(5) A_{r}^{(r)} = +\frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (r+1))^{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2r+1)(2r+3)},$$

$$(6) A_{s}^{(r)} = -\frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (r+1))^{2} \cdot \frac{r+3}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot r \times (r+4)(r+6) \cdot \dots \cdot (2r+5)},$$

6)
$$A_s^{(r)} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6) \cdot (7 + 1) \cdot (2r + 5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot r \times (r + 4) \cdot (r + 6) \cdot \dots \cdot (2r + 5)}$$

(7)
$$A_s^{(s)} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (r+2)}{(r+4)(r+6) \cdot \ldots \cdot (2r+3)(2r+5)}$$

(8)
$$A_{s+1}^{(s)} = + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (r+2) \cdot \frac{r+3}{2}}{(r+6)(r+8) \cdot \dots \cdot (2r+5)(2r+7)}$$

Quare cum in universum sit $(\S. 6.)$ (a) (b),

$$a_{r+2} = -\frac{A_r^{(s)}}{A_s^{(s)}}, \ A_{s+1}^{(s+1)} = A_s^{(r)} + A_{s+1}^{(s)} \ a_{r+2}, \ \text{et} \ a_{s+2} = -\frac{A_s^{(s)}}{A_{s+1}^{(s+1)}},$$
reperitor $a_{r+2} = -\frac{a_s^{(s)}}{a_{s+1}^{(s)}}, \ \text{h. e.}$

(9)
$$a_{r+2} = + \frac{(2r+5)\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (r+1))^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (r+2))^2}$$

$$= \frac{A_{s+1}^{(s+1)} = (6) + (8) \cdot (9)}{\frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (r+1))^2 \cdot \frac{r+3}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots r(r+6)(r+8) \cdot \dots (2r+5)} \left(\frac{2r+5}{(r+2)(2r+7)} - \frac{1}{r+4}\right), \text{ h. e.}$$

(10)
$$A_{s+1}^{(s+1)} = + \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (r+3))^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2r+5)(2r+7)}$$

et $a_{s+2} = -\frac{(7)}{(10)}$, sive

(11)
$$a_{s+2} = +\frac{(2r+7) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (r+2))^{2}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (r+3))^{2}}$$

= $\frac{(2s+5) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (s+1))^{2}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (s+2))^{2}}$.

Quamobrem, aequationibus (9) cum (3), et (11) cum (4) perfecte congruentibus, si ibi r+2 loco r et s+2 loco s substituatur, patet, aequationes (3); (4), generaliter veras esse.

§. 11. Formulae itaque (3), (4), sufficient ad fractionem in infinitum continuandam. Datur autem brevior adhuc via. Comparantes etenim aequationem (4) cum (3), et (9) cum (4), animadvertimus, relationem inter eas existere admodum simplicem. Reperitur nempe

productum $a_r.a_s = \frac{(2r+1)(2r+3)}{(r+1)^2}$, et $a_s.a_{r+2} = \frac{(2r+3)(2r+5)}{(r+2)^2}$; unde sequitur in universum

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{(n+1)^2 a_n},$$

quae formula inservit cuique denominatori a_{n+1} ex immediate antecedente a_n computando. Sufficit itaque supputasse $a_1 = +3$, unde caeteri omnes proveniunt, et quidem positivi, videlicet

$$a_{2} = \frac{5}{4}; \ a_{3} = \frac{5 \cdot 7}{3^{2} \cdot 5} 4 = \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 3}, \ a_{4} = \frac{7 \cdot 9}{4 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 3}{4 \cdot 7} = \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 8};$$

$$a_{5} = \frac{9 \cdot 11}{5^{2}} \cdot \frac{8 \cdot 8}{9 \cdot 9} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 11}{5 \cdot 5 \cdot 9}, \ a_{6} = \frac{11 \cdot 13}{6 \cdot 6} \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 9}{8 \cdot 8 \cdot 11} = \frac{13 \cdot 5 \cdot 5}{16 \cdot 16},$$

$$a_{7} = \frac{13 \cdot 15}{7 \cdot 7} \cdot \frac{16 \cdot 16}{13 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 16}{5 \cdot 5}, \ a_{8} = \frac{15 \cdot 17}{8 \cdot 8} \cdot \frac{5 \cdot 7 \cdot 7}{3 \cdot 16^{2}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 17}{8^{3} \cdot 16^{2}},$$

$$a_{9} = \frac{17 \cdot 19}{9 \cdot 9} \cdot \frac{8^{2} \cdot 16^{2}}{5^{2} \cdot 7^{2} \cdot 17} = \frac{8^{2} \cdot 16^{2} \cdot 19}{5^{2} \cdot 7^{2} \cdot 9^{2}}.$$

Supputatio numeris hoc modo adhue facilius conficitur. Posito $n+1 \equiv m$, invenimus

$$a_{m} = \frac{(2m-1)(2m+1)}{m^{2}a_{m-1}} = \frac{4m^{2}-1}{m^{2}a_{m-1}} = (4-\frac{1}{m^{2}})\frac{1}{a_{m-1}}$$

Unde prodit $a_{10} = \left(4 - \frac{1}{100}\right) \frac{5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{8^2 \cdot 16^2 \cdot 19}$, ubi $\frac{5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{8^2 \cdot 16^2 \cdot 19} = 0.3187...$ jam supputatum fuerat, ut itaque sit

$$a_{10} \equiv 1,2748 - 0,0032 \equiv 1,2716 \dots$$

12. Comtemplemur nunc seriem; quae ipsa est fracta,

Comtemplemur nunc seriem; quae ipsa est frac
$$S = \frac{1 + a_1 x + a_2 x^2 + cet}{1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + cet} = \frac{1}{1 + x}.$$

Posito itaque ut supra (§. 2.)

$$a_1 + \frac{x}{a_2 + \dots} = z_1$$
; $a_2 + \frac{x}{a_3 + \dots} = z_2$, etc. ut sit $z_n = a_n + \frac{x}{z_{n+1}}$, ideoque $S = \frac{1}{1+x} = \frac{z_1}{z_1+x}$, erit

$$(1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cot)(z_1+x)=(1+\beta_1x+\beta_2x^2+\cot)z_1$$
, unde, posito $\alpha_1-\beta_1=\gamma_1$, $\alpha_2-\beta_2=\gamma_2$, $\alpha_n-\beta_n=\gamma_n$,

oritur aequatio

$$0 = (\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cot) z_1 + (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cot) x, \text{ sive}$$

$$0 = (1 + \gamma_1 z_1) + (\alpha_1 + \gamma_2 z_1) x + (\alpha_2 + \gamma_3 z_1) x^2 + \dots$$

$$+ (\alpha_n + \gamma_{n+1} z_1) x^n + \cot.$$

quae, substituto $z_i = a_i + \frac{x}{z_2}$, transit in

(A)
$$0 = (1 + \gamma_1 a_1) + (\frac{\gamma_1}{z_2} + a_1 + \gamma_2 a_1) x + \dots + (\frac{\gamma_n}{z_2} + a_n + \gamma_{n+1} a_1) x^n + \text{cet.}$$

§. 13. Quodsi hanc acquationem, et sequentes quae inde naseuntur, tractamus ut supra (§. 3. 4.), nanciscimur

(1)
$$0 = 1 + \gamma_1 a_1$$
, deinde, posito $a_n + \gamma_{n+1} a_1 = A_n^{(1)}$,
(B) $0 = (\gamma_1 + A_1^{(1)} a_2)$
 $+ (\frac{A_1^{(1)}}{z_3} + \gamma_2 + A_2^{(1)} a_2) x + (\frac{A_2^{(1)}}{z_3} + \gamma_3 + A_3^{(1)} a_2) x^2 + \text{cet.}$

unde sequitur primum

(2)
$$0 = \gamma_1 + A_1^{(1)} a_2$$
, praetereaque positó $\gamma_n + A_n^{(1)} a_2 = A_n^{(2)}$,

(C)
$$0 = (A_1^{(1)} + A_2^{(2)} a_3) + (\frac{A_2^{(2)}}{z_4} + A_2^{(1)} + A_3^{(2)} a_3) x + \text{cet.}$$

unde pariter sequitur

(3)
$$0 = A_1^{(1)} + A_2^{(2)} a_1$$

§. 14. Quum haec aequatio (C) nihil differat a supra inventa (C) (§. (4.), eaedem quoque consequentiae jure inde deducuntur, unde, ut supra, aequationes obtinentur generales (§. 6.)

(a)
$$a_{m} = -\frac{A_{m-2}^{(m-2)}}{A_{m-1}^{(m-1)}};$$
 (b) $A_{n}^{(m)} = A_{n-1}^{(m-2)} + A_{n}^{(m-1)} \quad a_{m};$ (c) $A_{n}^{(m)} = A_{n-1}^{(m-2)} - A_{n}^{(m-1)} \quad \frac{A_{m-2}^{(m-2)}}{A_{n}^{(m-1)}};$

ubi respectu priorum terminorum animadvertere oportet, esse

$$0 = 1 + \gamma_{1} \ a_{1}; \ 0 = \gamma_{1} + A_{1}^{(1)} \ a_{2}; \ A_{n}^{(1)} = \alpha_{n} + \gamma_{n+1} a_{1}; A_{n}^{(2)} = \gamma_{n} + A_{n}^{(1)} a_{2}.$$

Haud inutile erit, et hanc methodum exemplo illustrare.

 $_{\nu}$ 15. Quaesita tangente arcus u in fractionem continuam evoluta, novimus esse

tang
$$u = \frac{u - \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{u^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{u^7}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} + \text{cet.}}{1 - \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \frac{u^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{u^6}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} + \text{cet.}} = u \cdot S.$$

posito nempe $u^2 \equiv x$, et serie

$$S = \frac{1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} x^2 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} x^3 + \text{cet.}}{1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^2 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} x^3 + \text{cet.}}.$$

Est itaque
$$\alpha_1 = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ \alpha_2 = +\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \ \sigma_r = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2r+1)}, \ \alpha_s = +\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2s+1)}; \ \beta_1 = -\frac{1}{2}; \ \beta_2 = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \ \beta_r = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2r+1)}, \ \beta_s = +\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2s+1)}; \ \text{proinde}$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = +\frac{1}{3}; \ \gamma_2 = -\frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \ \gamma_r = +\frac{2r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2r+1)}, \ \gamma_s = -\frac{2s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2s+1)}; \ \text{unde reperitur}$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\gamma_1} = -3; \ A^{(1)} = \alpha_n - 3 \ \gamma_{n+1} = \pm \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+1)} \pm \frac{6 \ (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)}; \ \alpha_2 = -\frac{\gamma_1}{A^{(1)}_{1}} = \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 2} = \pm 5; \ A^{(2)}_n = \gamma_n + 5 \ A^{(1)}_n = +\frac{2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+1)} \pm \frac{5 \cdot 4 \cdot n \ (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)}; \ \alpha_3 = -\frac{A^{(1)}_1}{A^{(2)}_2} = -\frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = -7; \ A^{(3)}_n = A^{(1)}_n = -7 \ A^{(2)}_n = \mp \frac{4 \cdot (n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+1)} \pm \frac{7 \cdot 8 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot n (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n+3)} = -\frac{16 \cdot (n+1) \cdot$$

$$a_{4} = -\frac{A_{2}^{(2)}}{A_{n}^{(3)}} = +\frac{8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7} \times \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9}{16 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 9;$$

$$A_{n}^{(4)} = A_{n-1}^{(2)} + 9 A_{n}^{(3)} = +\frac{8n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} + \frac{9 \cdot 16(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+3)}$$

$$= +\frac{32(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+3)}.$$

§. 16. Hinc jam perspicitur lex, quae quidem valet usque ad $r \equiv 3$ et $s \equiv 4$; formulisque sequentibus declaratur:

(1)
$$a_r = -(2r+1)$$
; (2) $a_s = +(2s+1)$;

(3)
$$A_n^{(r)} = + 2(n - r + 1) A_n^{(r-1)};$$

(4)
$$A_n^{(s)} = -2(n-s+1) A_n^{(s-1)}$$
.

Praeterea patet, quemcunque e valoribus exhibitis $A_n^{(m)}$, si n+1 pro n substituatur, signum + mutare, divisumque esse per 2(n-m+1)(2n+5)ita ut sit

(5)
$$A_{n+1}^{(m)} = \frac{A_{n}^{(m)}}{2(n-m+1)(2n+5)^{\circ}}$$
. Quibus praemissis sequitur

(4)
$$A_s^{(s)} = -2 A_{r+1}^{(r)}$$
, ob (5) $A_{r+1}^{(r)} = \frac{-A_r^{(r)}}{2(2r+5)}$,

$$\mathbf{A}_{s}^{(s)} = + \frac{\mathbf{A}_{r}^{(r)}}{2r + 5}$$
, ideoque

quum in universum sit (§. 14. (a)) $\hat{a}_{r+2} = -\frac{\hat{A}_{r}^{(r)}}{\hat{A}^{(r)}}$,

(6)
$$a_{r+2} = -(2r+5)$$
.

(6)
$$a_{r+2} = -(2r+5)$$
.
Praeterea est (5) $A_{s+1}^{(r)} = -\frac{A_s^{(s)}}{2(2s+5)} = -\frac{A_r^{(r)}}{2(2r+5)(2s+5)}$.

ideoque
$$a_{r+2}A_{s+1}^{(c)} = +\frac{A_r^{(r)}}{2(2s+5)}$$
. Quare quum sit (§. 14. (b))

$$A_{s+1}^{(s+1)} = A_{r+1}^{(r)} + a_{r+2} A_{s+1}^{(s)}, \text{ sequitor}$$

$$A_{s+1}^{(s+1)} = -\frac{A_r^{(r)}}{2} \left(\frac{1}{2r+5} - \frac{1}{2s+5} \right) = -\frac{A_r^{(r)}}{(2r+5)(2s+5)}$$

Est autem in genere (§. 14. (a)) $a_{s+12} = -\frac{A_{s}^{(s)}}{A_{s+1}^{(s+1)}}$, unde substituto $A_{s}^{(s)} = \frac{A_{r}^{(r)}}{2r+5}$, prodit (7) $a_{s+2} = +(2s+5)$.

Quum aequationes (6), (7), nil aliud sint nisi formulae (1), (2), in quibus r+2 et s+2 pro r et s substitutae sunt, sequitur, legem (1) et (2) esse universalem. Est itaque $a_n = \pm (2n + 1)$, atque numeri a_1 a_2 etc. sequentem constituunt seriem:

-3, +5, -7, +9, -11, +13, etc. enjus termini signo + aut - afficiuntur; prout forma 4n+1 aut 4n-1 induti sunt. Restituto jam valore $x \equiv u^2$, et tang $u \equiv u$. S, obtinctur

tang.
$$u = \frac{u}{1 + u^2} = \frac{u}{1 - u^2}$$

$$\frac{-u}{3 + u^2} = \frac{u}{3 - u^2}$$

$$\frac{-3 + u^2}{5 + u^2} = \frac{3 - u^2}{5 - u^2}$$

$$\frac{-7 + u^2}{9 + \dots} = \frac{u}{9 - u^2}$$

$$\frac{-11 - cet}{11 - cet}$$

§. 17. Proposita serie ejusmodi formae, ut denominatoris termini iidem quidem sint ae numeratoris, at signis alternis, videlicet

$$S = \frac{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + cet}{1 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 + cet}$$
 ubi (§. 12.)

 $\beta_1 \equiv -\alpha_1$, $\beta_2 \equiv +\alpha_2$, etc. ideoque $\gamma_1 \equiv 2\alpha_1$. $\gamma_2 \equiv 0$, et generation $\gamma_r \equiv +2\alpha_r$, $\gamma_s \equiv 0$. Hinc reperitur (§. 14.)

$$a_{i} = -\frac{1}{2\alpha_{i}}; A_{r}^{(i)} = \alpha_{r}, A_{s}^{(i)} = \alpha_{s} - \frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_{1}} = \frac{\alpha_{1}\alpha_{s} - \alpha_{s+1}}{\alpha_{1}};$$

$$a_2 = -\frac{\gamma_1}{\Lambda^{(1)}} = -2; \ \Lambda_r^{(2)} = \gamma_r - 2\Lambda_r^{(1)} = 0,$$

$$\Lambda_s^{(2)} = -2\Lambda_s^{(1)} = 2\frac{\gamma_{5+1}^2 - \alpha_1}{\alpha_1} \gamma_5; \ \alpha_3 = -\frac{\Lambda_s^{(1)}}{\Lambda_s^{(2)}} = \frac{\gamma_{5+1}^2 - \alpha_3}{2(\lambda_1 \gamma_2 - \alpha_3)};$$

$$A_{r}^{(3)} = A_{r-1}^{(1)} + a_{3} A_{r}^{(2)} = A_{r-1}^{(1)} = \frac{a_{1} a_{r-1} - a_{r}}{a_{1}};$$

$$A_{s}^{(3)} = A_{r}^{(1)} + a_{3} A_{s}^{(2)} = a_{r} + \frac{a_{1} (a_{s+1} - a_{1} a_{s})}{a_{1} a_{2} - a_{3}};$$

$$a_{4} = -\frac{A_{2}^{(2)}}{A_{3}^{(3)}} = +2; \quad A_{r}^{(4)} = A_{r-1}^{(2)} + 2 A_{r}^{(3)} = 0;$$

$$A_{s}^{(4)} = A_{r}^{(2)} + 2 A_{s}^{(3)} = 2 A_{s}^{(3)} = 2 a_{r} + \frac{2a_{1} (a_{s+1} - a_{1} a_{s})}{a_{1} a_{2} - a_{3}}.$$

§. 18. Lex qua istae quantitates procedunt, satis jam apparet. Reperimus nempe usque ad m = 2,

(1)
$$a_{2m} = \pm 2$$
; (2) $A_r^{(2m)} = 0$; (3) $A_s^{(2m)} = \pm 2 A_s^{(2m-1)}$;
(4) $A_r^{(2m-1)} = A_{r-1}^{(2m-3)}$;

ubi signum superius vel inferius adhibendum est, prout m numerus par vel impar.

Quum igitur in universum sit ($\{., 14, (b)\}$)

 $\begin{array}{c} A_{2m+1}^{(2m+1)} = A_{2m}^{(2m-1)} + A_{2m+1}^{(2m)} \, a_{2m+1} = A_{2m}^{(2m-1)} \,, \quad \text{ob} \quad A_{2+1}^{(2m)} = 0 \\ \text{per aequationem (2)} \,, \quad \text{atque } A_{2m}^{(2m)} = \pm 2 \, A_{2m}^{(2m-1)} \, \text{per (3)} \,, \quad \text{quumque praeterea sit (§. 14. (a))} \, a_{2m+2} = -\frac{A_{2m}^{(2m)}}{A_{2m+1}^{(2m)}} \,, \quad \text{sequitur} \end{array}$

 $a_{2m+2} = +2$; quae aequatio ostendit, formulam (1) generaliter veram esse, h. e. cunctos denominatores indicis paris a_{2m} esse = 2, at signa + alternare, ita ut sit

$$a_2 = -2$$
, $a_4 = +2$, $a_6 = -2$, $a_8 = +2$; et in genere (5) $a_{4n} = +2$; (6) $a_{4n+2} = -2$.

Praeterea est generaliter (§. 14. (b))

$$A_r^{(2m+1)} = A_{r-1}^{(2m-1)} + A_r^{(2m)} a_{2m+1}$$
, et $A_n^{(2m+2)} = A_{n-1}^{(2)} + A_n^{(2m+1)} a_{2m+2}$.

Prior dat, ob aequationem (2),

(7)
$$A_r^{(2m+1)} = A_{r-1}^{(2m-1)}$$
.

Posterior dat, substituto $a_{2m+2} = \overline{+2}$, et valore (7),

$$\mathbf{A}_{r}^{(2m+2)} = \mathbf{A}_{r-1}^{(2m)} + 2 \mathbf{A}_{r-1}^{(2m-1)}, \text{ et } \mathbf{A}_{s}^{(2m+2)} = \mathbf{A}_{r}^{(2m)} + 2 \mathbf{A}_{s}^{(2m+1)};$$

unde,
$$ob$$
 (3) $A_{r-1}^{(2m)} = \pm 2 A_{r-1}^{(2n-1)}$, et (2) $A_r^{(2m)} = 0$, fit (8) $A_r^{(2m+2)} = 0$, et (9) $A_s^{(2m+2)} = \pm 2 A_s^{(2m+1)}$.

Quae aequationes quum exacte congruant cum (2) et (3), pariterque aequatio (7) cum (4), sequitur, aequationes (1), (2), (3), (4), in universum veras esse.

$$a_r = \pm \frac{\frac{1}{2} \Lambda_{r-1}^{(r-4)}}{\frac{1}{2} \Lambda_{r-1}^{(r-2)}} \quad \text{et} \quad a_{r+2} = \pm \frac{\Lambda_{r-1}^{(r-2)}}{2 \Lambda_{r+1}^{(r)}}.$$

§. 20. Tali modo reperitur (§. 17. 18.) et (10) (11); $a_{1} = -\frac{1}{2 A_{1}^{(1)}}; \quad a_{3} = -\frac{A_{1}^{(1)}}{A_{2}^{(2)}} = +\frac{\frac{1}{2} A_{1}^{(1)}}{A_{2}^{(1)}} = +\frac{\frac{1}{2} A_{1}^{(1)}}{b},$ $a_{5} = -\frac{A_{2}^{(1)}}{2 A_{4}^{(3)}} = -\frac{\frac{1}{2} b}{A_{5}^{(1)} - 2 a_{3} A_{4}^{(1)}} = \frac{-\frac{1}{2} b}{c},$

$$a_{7} = + \frac{A_{4}^{(3)}}{2 A_{6}^{(5)}} = \frac{+ \frac{1}{2} c}{A_{4}^{(1)} + 2 a_{5} A_{6}^{(3)}} = \frac{+ \frac{1}{2} c}{A_{4}^{(1)} + 2 a_{5} A_{5}^{(1)} - 4 a_{3} a_{5} A_{6}^{(1)}} = \frac{+ \frac{1}{2} c}{d},$$

$$a_{9} = - \frac{A_{6}^{(5)}}{2 A_{8}^{(7)}} = \frac{- \frac{1}{2} d}{A_{6}^{(3)} - 2 a_{7} A_{8}^{(5)}} = \frac{- \frac{1}{2} d}{A_{5}^{(1)} - 2 (a_{3} + a_{7}) A_{6}^{(1)} - 4 a_{5} a_{7} A_{8}^{(3)}} = \frac{- \frac{1}{2} d}{e};$$

$$= \frac{- \frac{1}{2} d}{A_{5}^{(1)} - 2 (a_{3} + a_{7}) A_{6}^{(1)} - 4 a_{5} a_{7} A_{7}^{(1)} + 8 a_{3} a_{5} a_{7} A_{8}^{(1)}} = \frac{- \frac{1}{2} d}{e};$$

cujus progressionis lex facile animadvertitur. Reperitur nempe

$$\frac{a_{11}}{A_{5}^{(1}+2(a_{5}a_{9})\Lambda_{7}^{(1)}-4(a_{3}a_{5}+a_{3}a_{9}+a_{7}a_{9})\Lambda_{8}^{(1)}-8a_{5}a_{7}a_{9}\Lambda_{9}^{(1)}+10a_{3}a_{5}a_{7}a_{9}\Lambda_{10}^{(1)}}$$
 et sic porro.

Quantitates $A^{(1)}$, e quibus hae formulae sunt compositae, reperiuntur ope aequationum (§. 17.) $A^{(1)}_r = \alpha_r$ et $A^{(1)}_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s + 1}{\alpha_1}$. Denominatores α_2 , α_4 , etc. sunt $= \pm 2$ (§. 18.).

Exemplum I.

§. 21. Proposita serie
$$S = \frac{1+x+x^2+x^3+cet}{1-x-x^2-x^3+cet}$$
, habemus $a_1 = +1$, adeoque $A_r^{(1)} = +1$, $A_s^{(1)} = 0$; unde eruitur $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = -2$; $a_3 = \frac{1}{0}$; $a_4 = +2$; $a_5 = 0$; $a_6 = -2$; etc. Quare quum sit $z_3 = a_3 + \frac{x}{a_4 + x}$ (§. 12.), fit $z_3 = \infty$, $z_2 = a_2 + \frac{x}{z_3 + \dots} = a_2$, $z_1 = a_1 + \frac{x}{z_2} = a_1 + \frac{x}{a_2}$; eritque $S = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$, ubi fractio abrumpitur. Est itaque $S = \frac{1}{1-2x} = \frac{1+x}{a_1+x}$, h. c. $\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+cet}{1-x+x^2-x^3+x^4-cet} = \frac{1+x}{1-x}$

quod quidem per se patet, siquidem numerator seriei est $= (1+x) (1+x^2+x^4+x^6+\text{cet.})$, denominator autem $= (1-x) (1+x^2+x^4+x^6+\text{cet.})$.

Exemplum II.

§. 22. Data serie
$$S = \frac{1+x+2}{1-x+2} \frac{x^2+3}{x^2-3} \frac{x^3+4}{x^3+4} \frac{x^4+cer}{cer}$$
, est (§. 17.) $a_n = +n$, $A_r^{(1)} = +r$, $A_s^{(1)} = s - (s+1) = -1$; unde deducitur

 $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -2$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = +2$, $a_5 = +\frac{1}{4}$, $a_6 = -2$, $a_7 = +1$, $a_8 = +2$, $a_9 = \infty$; ergo $z_8 = a_8 + \frac{z}{a_9 + \dots} = a_8 = +2$; et fractio in termino octavo abrumpitur, quod indicio est, seriei summam assignari posse. Facile namque perspicitur, posito

, $1+x+2x^2+3x^3+\cot$. \equiv M, et $1-x+2x^2-3x^3+\cot$. \equiv N, ita ut sit $S=\frac{M}{N}$, esse $M\equiv 1+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x^2}{(1-x)^2}$, cumque M abeat in N, quando x negativum induit valorem, esse $N=\frac{1+x+x^2}{(1+x)^2}$, ideoque $S=\frac{(1-x+x^2)(1+x)^2}{(1+x+x^2)(1-x)^2}=\frac{(1+x)(1+x^3)}{(1-x)(1-x^3)}$ sive $S=\frac{1+x+x^3+x^4}{1-x-x^3+x^4}$.

Qua serie comparata cum forma supra exhibita (§. 12. 14.), erit $\alpha_1 \equiv +1$, $\alpha_2 \equiv 0$, $\alpha_3 \equiv \alpha_4 \equiv +1$, $\beta_1 \equiv -1$, $\beta_2 \equiv 0$, $\beta_3 \equiv -1$, $\beta_4 \equiv +1$; atque omnes coëfficientes indice affecti quaternione majore evanescunt. Est itaque

 $\gamma_1 = +2$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = +2$, $\gamma_4 = 0$, $\gamma_5 = 0$, $\gamma_6 = 0$, etc. unde obtinetur

$$a_{1} = -\frac{1}{2}$$
, $A_{1}^{(1)} = +1$, $A_{2}^{(1)} = -1$, $A_{3}^{(1)} = +1$, $A_{4}^{(1)} = +1$; $A_{5}^{(1)} = A_{6}^{(1)} = 0$ etc. $a_{2} = -2$; $A_{2}^{(2)} = +2$, $A_{3}^{(2)} = 0$, $A_{4}^{(2)} = -2$; $A_{5}^{(2)} = 0$, etc.

$$a_3 = -\frac{1}{2}$$
; $A_3^{(3)} = -1$, $A_4^{(3)} = +2$, $A_5^{(3)} = +1$, $A_6^{(3)} = 0$, $A_7^{(3)} = 0$, etc.
 $a_4 = +2$; $A_4^{(4)} = +4$; $A_5^{(4)} = 0$, $A_6^{(4)} = 0$, etc.
 $a_5 = +\frac{1}{4}$; $A_5^{(5)} = +2$, $A_6^{(5)} = +1$, $A_7^{(5)} = 0$, $A_8^{(5)} = 0$, etc.
 $a_6 = -2$; $A_6^{(6)} = -2$, $A_7^{(6)} = 0$, $A_8^{(6)} = 0$, etc.
 $a_7 = +1$; $A_7^{(7)} = +1$, $A_8^{(7)} = 0$, $A_9^{(7)} = 0$, etc.

 $a_3 = +2$; $A_3^{(8)} = 0$, $A_9^{(8)} = 0$, $a_9 = -\frac{1}{0}$;

cuncta ut supra,

MESURE

DE LA HAUTEUR DU MONT ELBRUS, AU-DESSUS DU NIVEAU DE LA MER.

PAR

V. WISNIEWSKI.

Présenté à la Conférence le 20 Mars 1816.

Parmi les nombreuses chaines de montagnes, qui traversent et limitent le vaste Empire de Russie, celle du Caucase occupe un rang distingué, à cause de son élévation et de son étendue; et elle mérite à ce titre une attention particulière de la part des géognostes. Mais malheuresement cette célèbre chaine est habitée par des peuples, dont le brigandage et la défiance mettent de grands obstacles aux voyages scientifiques; nos connaissances par rapport à cette chaine resteront donc probablement encore long tems très - imparfaites. Dans ces circonstances une observation même isolée ne saurait être sans intérêt, si elle fait accroître la masse des matériaux, pour la description future de cette chaine de montagnes; c'est aussi dans cette persuasion que j'ose présenter à l'Académie Impériale les observations et le calcul de la hauteur du mont Elbrus, accompagnés de quelques remarques, sur la position de la ville d'Astrakhan au-dessous du niveau de la mer.

La chaine des montagnes Caucases se compose des alpes très élevées et fort escarpées, dont la plupart ont des cimes couvertes de neiges éternelles. On distingue parmi ces alpes principalement une montagne, ayant la forme d'un còne tronqué, et située dans la partie occidentale de la chaine. Les peuples montagnards la nom-

ment, Elbrus. L'académicien Güldenstädt, qui avait fait un voyage scientifique dans les contrées meridionales de la Russic pendant les années 1768 - 1775, remarque, que cette montagne est la plus élevée des alpes du Caucase *). Et en éffet on peut s'en convaincre aisément en été, si on compare entre elles les cimes de ces alpes : parceque le voile blanc, qui couvre la surface conique du mont Elbrus, surpasse de beaucoup en étendue les convertures pareilles des cimes des autres montagnes, en ayant égard, dans cette éstime, à leur situation respective.

MM. Engelhardt et Parrot ayant sait en 1812 un nivellement barométrique de la ligne du Caucase, avaient désiré de déterminer aussi la hauteur du mont Elbrus, par une opération du même genre; cependant ils ont été contraint d'y renoncer, en partie à cause de la méfiance des montagniards, qui n'ont pas voulu y consentir, en partie aussi parce que d'autres obstacles s'y opposaient. Mais une pareille entreprise faite sur le mont Kasbek, situé près du chemin de Géorgie, a été couronnée d'un plein succès; M. Parrot y monta plus de 500 toisses au-dessus de la limite des neiges éternelles, et il éstima la cime plus élevée, de 240 toisses. Cette station étant élevée, d'apres les observations barométriques, de 2167,9 toisses au-dessus du niveau de la mer noire **), il en conclut la hauteur du mont Kasbek 2400 toisses au-déssus du même niveau; presque la même que celle du Montblanc, la plus élevée des montagnes d'Europe. L'erreur d'éstimation ne peut être ici que très peu considérable, vu la proximité de la station à la cime. Ce résultat rendait donc la détermination de la hauteur du mont Elbrus d'autant plus désirable, que cette montagne est la plus élevée de la chaine, comme nous l'avons deja remarqué ei-dessus.

^{*)} D. Johann Anton Güldenstüdt Reisen durch Rußland und im Caucasischen Gebürge, herausgegeben von P. S. Pallas, St. Petersburg 1791 II. Theil pag. 25.

^{3*)} Reise in die Krym und den Kaukasus, von Moritz von Engelhardt und Friedrich Parrot, Berlin 1815 Vol. 1. pag. 205.

Faisant en l'année 1812 des observations astronomiques à la ligne du Caucase, pour y déterminer la position géographique de plusieurs points, je saisis l'occasion de déterminer aussi la hauteur du mont Elbrus. Les mêmes obstacles, qui se sont présentés à MM. Engelhardt et Parrot, ne me permirent pas de monter sur cette montagne; c'est pourquoi je me decidai à mesurer sa hauteur trigonométriquement. La saison fort avancée n'étant point favorable à l'exécution de cette opération, je la rémis à l'année suivante; cependant j'observai encore la distance apparente au zénith et l'azimuth du mont Elbrus, à Stauropol le 11 Novembre. Impatient de connaître à peu-près la hauteur de cette montagne au-dessus du niveau de la mer, je supposai sa distance de Stawropol d'après la lévée militaire, exécutée par des officiers d'Etat-Major; et ayant fait le ealcul sur ces données et sur mes observations barométriques de Stauropol, j'en ai tiré 10700 pieds de France pour la hauteur cherchée. Le mont Elbrus se trouva done d'après ce résultat approximatif effectivement beaucoup plus élevé que le mont Kasbek.

Je me portai au mois de Mai de l'année suivante vers le mont Elbrus, dans la vue d'y approcher autant que possible; mais ne pouvant me fier à des montagniards avec mes instruments, sans m'exposer à des grands risques, je fus contraint de faire mon opération près de nos forteresses Konstantinogorskaja et Kislowodskaja; où j'ai observé les distances apparentes au zénith et les azimuths de la dite montagne, et les hauteurs du baromètre et du thermomètre. Il fallait encore déterminer trigonométriquement les distances de ces stations au mont Elbrus, mais les circonstances ne m'ayant pas permis d'y mesurér pour eet effet une base assez grande, j'aimai mieux ealculer ces distances de la position géographique de Stawropol et des stations de Konstantinogorskaja et de Kislowodskaja, déterminée récemment par moi, et combinée avec les azimuths du mont Elbrus, que j'y avais observés. L'élévation des trois stations ei - dessus mentionnées au - dessus du niveau de la

mer a été déterminée par la comparaison de mes observations du baromètre et du thermomètre avec celles, qui ont été faites à *Astrakhan* par le Correspondant de l'Académie Mr. le Conseiller de Collége de *Lokhtine*.

Ayant ainsi rassemblé les données nécessaires, j'en ai déduit la hauteur du mont *Elbrus* plus exactement, en la fixant par deux déterminations différentes à 2898 toisses; comme l'on verra ci - après dans l'exposé de mes observations.

La position de la ville d'Astrakhan par rapport au niveau de la mer, m'a été nécessaire pour la détermination de celle des mes stations; je la calculai donc sur différentes observations barométriques, qui m'ont donné pour résultat, que la ville d'Astrakhan est située 37, 8 toisses au-dessous du niveau de l'océan. On trouvera à la fin de ce mémoire les données, sur lesquelles est fondé ce résultat remarquable.

EXPOSITION DES OBSERVATIONS.

N' ayant en d'autre instrument, pour la mesure des angles, qu'un sextant à réflexion de huit pouces de rayon, exécuté par Troughton, dont j'étais muni pour la détermination de la position géographique des principaux points de l'Empire, je ne pouvais mesurer directement la distance apparente de la cime du mont Elbrus au zénith, parceque l'image de cette montagne n'a pu être observée dans l'horison artificiel. J'observai donc avec le sextant des distances du soleil à la cime de la dite montagne, pendant que cet astre se trouvait près de son vertical. Ces distances étant réduites au vertical mentionné, et puis ajoutées aux distances apparentes du soleil au zénith, qui ont été calculées pour le moment de l'observation, donnaient pour résultat la distance ap-

parente de la cime au zénith du lieu d'observation. Mais il failait aussi déterminer l'azimuth de la cime du mont Elbrus, pour pouvoir calculer l'instant du passage du soleil par le vertical mentionné; c'est que j'ai fait moyennant d'autres distances du soleil à la cime, observées loin du dit vertical.

On peut voir assez souvent à la ligne du Caucase la chaîne des glaciers dans toute sa splendeur le matin et soir; mais en revanche elle se présente très rarement vers le midi, où un brouillard épais la dérobe presque tonjours aux yeux de l'observateur. Cette circonstance ne m'était pas favorable, parceque aux trois stations ci-dessus mentionnées le mont Elbrus git dans des directions peu cloignées du midi, comme l'on voit dans la figure 2^{de} Tab. IX; il m'était donc impossible de multiplier les observations près des verticaux de la montagne autant que je l'aurais fait, pour diminuer l'influence de l'incertitude de la réfraction terrestre. Cependant l'accord entre les résultats, ci-dessous indiqués pour la hauteur du mont Elbrus, est plus grand que je n'osai l'espérer; et je me flatte que le résultat moyen s'approche très près de la vérité.

La cime du mont *Elbrus* se divise en deux éminences peu élevées, situées presque sons le même parallele, dont l'éminence occidentale, ayant une pointe au bord occidental, forme un assez bon signal; l'éminence orientale au contraire n'offre pas, à beaucoup près, cet avantage. Je les nommerai desormais cime occidentale et cime orientale.

Avant d'exposer mes observations, je vais indiquer les formules, sur lesquelles je les ai calculées. Soit donc (Fig. 1 Tab. IX) Z le zénith du lieu de l'observation, E la cime du mont Elbrus, et S le soleil. En consequence EZ et SZ soient des distances apparentes de la cime et du soleil au zénith, et ES la distance apparente du soleil à la cime. Ayant les trois côtés mentionnés, je

calculai l'angle SZE, ou la différence des azimuths de la cime et du soleil, par la formule connue:

$$\cos SZE = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\gamma - ES) \sin \frac{1}{2}(\gamma + ES)}{\sin SZ \sin EZ};$$

[1]

[2]

où l'angle auxiliaire y est déterminé par l'équation:

$$\cos \gamma = \cos SZ \cos EZ$$
.

Ajoutant l'angle SZE à l'azimuth du soleil, j'obtenais l'azimuth de la cime du mont Elbrus.

Je determinai la distance de la cime mentionnée au zénith, comme je l'ai déjà dit, par des distances du solcil à la cime observées, lorsque cet astre se trouvait près du vertical EZ. Or si l'observation eut été faite dans le vertical même, le triangle ZSE se réduirait à l'arc EZ, et on aurait alors la distance de la cime au zénith simplement égale à la somme des distances apparentes du solcil au zénith et à la cime; ainsi on aurait:

$$ES' = EZ - S'Z = EZ - SZ$$

et cos $ES' = \cos(EZ - SZ)$.

Mais pour une distance observée hors du vertical mentionné, le même triangle SZE donne:

 $\cos ES \equiv \cos (EZ - SZ) - 2\sin^2 \frac{1}{2}SZE \sin EZ \sin SZ$ d'où l'on tire :

$$2 \sin \frac{I}{2}$$
 (ES – ES') = $\frac{2 \sin^2 \frac{I}{2} SZE \sin EZ \sin SZ}{\sin \frac{I}{2} (ES + ES')}$.

L'arc (ES — ES') n'excédant pas un degré, on peut mettre $2 \sin \frac{1}{2}$ (ES — ES') $\equiv \Delta$ (ES), et diviser le second membre par $\sin 4''$ pour l'avoir en secondes; ainsi cette équation se change en:

$$\Delta (ES) = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{S} SZE \sin EZ \sin SZ}{\sin (ES + \frac{\Delta ES}{2}) \sin 1''}.$$

Au moyen de cette formule j'ai calculé les réductions ΔES pour des distances observées près du vertical EZ.

Voici maintenant mes observations:

Distances du soleil

à la cime orientale du mont Elbrus, observées à Stauropol le 11 Novembre 1812 n. st., sous 45° 3′ 0″,0 de latitude.

N°. de l'obser- vation.	Tems solaire vrai avant midi , observé au chronomètre de <i>Barraud</i> .	Distance apparente du soleil à la cime orientale, obser- vée, réduite au cen- tre du soleil et cor- rigée de l'erreur du sextant.
I.	10 ^b 0'35",9	28° 14′ 20″
II.	10 2 15, 5	28 4 20
III.	11 20 32, 0	26 7 12
IV.	11 23 28, 0	26 14 18
V.	11 24 28, 0	26 17 41

Ayant calculé d'abord par les observations I. et II. l'azimuth approché de la cime orientale du mont Elbrus, au moyen d'une valeur éstimée de EZ, mise dans la formule [1], je réduisis les distances observées III. IV. et V. au vertical ZE passant par la cime mentionnée; c'est-à-dire aux distances S'E, en retranchant des distances SE les corrections Δ SE, calculées sur la formule [2]. Ces distances ainsi réduites, étant ajoutées aux distances correspondantes du soleil au zénith, donnaient des valeurs approchées de l'inconnue ZE; dont la valeur moyenne étant mise dans le calcul de la formule [1], donna l'azimuth par l'observation I. $\equiv 348^{\circ}$ 27 3 ½ et par l'observation II. $\equiv 348^{\circ}$ 25′ 34″. Mettant dans le calcul de la formule [2] pour l'azimuth la valeur moyenne 348° 26′ 32'', et pour ZE la valeur approchée, j'en ai tiré pour les observations III. IV. et V. les résultats suivans:

	ou la réduction de la distance	Distance du solent à la cime orien- tale, observée, réduite au centre du soleil et au vertical.	moment de l'obser-	Distance apparente de la cime orientale au zénith, conclue de l'observation.
III.	1' 3",4	26° 6′ 8′,6	$73^{\circ} 6'21'',4$	89 12 30
IV.	3 19,9	26 10 58,1	73 0 54,5	89 11 53
V.	4 23,6	26 13 17,4	72 59 8,8	89 12 26

D'où je conclus la distance apparente de la cime orientale du mont Elbrus au zénith de la station de Stauropol

(a)

(b)

890 12/ 16".

Je rapporte ici encore les observations faites à Stawropol l'année suivante, dans la vue de déterminer plus exactement l'azimuth du mont Elbrus; elles sont avec leurs résultats les suivantes:

Distances du soleil à la cime orientale du mont Elbrus, observées à Stawropol le 22 Août 1813 nouveau style.

N°. de l'obser- vation.	Tems solaire vrai avant midi, observé au chronomètre de Burraud.	Distance apparente du soleil à la eime orientale, réduite au centre du soleil et corrigée de l'er- reur du sextant.	Azimuth de la cime orientale conclu de l' observation.
I.	$7^{b} \ 41' \ 8 \ ,2$	70° 42′ 23″	$348^{\circ}\ 23'\ 5''$
II.	7 57 27,7	68 26 49	348 23 46
III.	7 59 52,3	68 637	348 22 55

Azimuth de la cime orientale du mont Elbrus observé à Stawropol - 348° 23′ 15″.

Le même azimuth a été observé l'année précédente $\pm 348^{\circ}26'32''$, mais le lieu d'observation d'alors était situé 150 pas, ou à - peu - près 50 toisses vers l'orient. Supposant la distance du mont *Elbrus* 99000 toisses, la réduction du dit azimuth au dernier

lieu d'observation sera — 1' 42", 0, et par conséquent l'azimuth même = 348° 24' 50"; ce qui diffère 1' 35" de l'azimuth tantôt déterminé. Cette différence est fondée en partie sur ce que la cime orientale n'est pas pointue, et que par conséquent le point de mire devait-y-être éstimé; le tems ayant été plus favorable à la dernière détermination (b), je pense qu'il vaut mieux s'en tenir exclusivement à celle - ci.

Voici encore les observations, qui ont été faites pour la détermination de l'azimuth de la eine occidentale.

à la cime occidentale du mont Elbrus, observées à Stauropol le 22 Août 1813 nouveau style.

N°. de l'obser- vation.	Tems solaire vrai, avant midi.	Distance apparente du soleil à la cime occidentale, obser- vée, réduite au cen- tre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.	Azimuth de la cime occidentale conclu de l'observation.
IV.	7 ^b 44′ 14″,2	70° 37 49″	348° 40′ 20″
V.	7 47 6,0	70 12 29	348 46 40
VI.	7 52 38,8	69 26 14	348 46 53
VII.	8 2 42.3	68 4 57	348 47 47
VIII.	8 6 14,5	67 36 51	348 47 54

Azimuth moyen de la cime occidentale du mont Elbrus, observé à Stawropol - 348° 47′ 7″. (c)

La chaine des glaciers du Caucase, qui à Stauropol n'est point visible hormis le seul mont Elbrüs, se présenta dans toute sa splendeur à la séconde station, près de la forteresse Konstantinogorskaja; elle y occupe au delà de soixante dix degrés de l'horison depuis SE, ou elle semble commencer par le mont Kasbek,

jusqu'au $SO_{\frac{1}{4}}^{\mathbf{I}}S$, où elle finit par le mont *Elbrus*. Les observations faites à cette station, et les résultats obtenus par la méthode cidessus exposée, sont les suivans:

Distances du soleil

à la cime orientale du mont Elbrus, observées le 6 Juin 1813 n. st. près de la fortesse Konstantinogorskaja, sous 44° 2′ 35″, 3 de latitude.

N°. de l'obser- vation,	Tems vrai solaire , obsérvé au chronomètre de <i>Barraud</i> .	Distance apparente du centre du soleil à la cime <i>orientale</i> , observée et corrigée de l'erreur du sex- tant.	Azimuth de la cime orientale conclu de l'observation.
I.	7 ^b 43′ 28′′,3 av. m.	113° 32′ 10″	31° 17′ 5″
II.	7 59 3,3 av. m.	110 26 43	31 17 29
III.	8 11 9,7 av. m.	108 2 59	31 16 58
IV.	5 29 27,9 ap.m.	70 50 5	31 15 25
V.	5 44 19,7 ap.m.	72 55 30	31 14 20

Valeur moyenne de l'azimuth de la cime orientale du mont Elbrus, observé à la station de Konstatinogorskaja - 31° 16' 15".

(d)

Quoique les azimuths conclus des observations IV. ct V. ne s'accordent pas sensiblement avec ceux des trois premières observations, néanmoins je ne crois pas qu'il soit nécessaire de les exclure; parceque cette discordance provient en majeure partie de la forme de la cime même qui, n'étant pas pointue, offrait à l'observation un très mauvais signal.

Distances du soleil

à la cime occidentale du mont Elbrus, observées le 6. Juin 1813 au même lieu d'observation.

No. de l'obser- vation.	Tems vrai solaire, après midi.	Distance du soleil à la cime occiden- tale observée, ré- duite au centre du soleil et corrigée de l'erreur du sex- tant.	Azimuth de la eime <i>occidentale</i> conclu de l'ob- servation.
VI.	5 b 33' 19",2	70° 30′ 59′′	32° 9′ 28′′
VII.	5 47'55,5	72 34 0	32 9 27

Azimuth de la cime occidentale du mont Elbrus 32° 9' 28".

(e)

Voici les observations, que j'ai faites le même jour pour la détermination de la distance apparente de deux cimes au zénith.

Distances du soleil à la cime orientale du mont Elbrus.

N°. de Tob- ser- vation.	Tems vraj solaire après midi.	Distance du solcil à la cime orientale observée, réduite au centre du solcil et corrigée de l'er- reur du sextant.	ΔES, ou la réduction de la distance au verteal ZE	Distance apparente de la cime orientale au zérnith, conclue de Fobservation.
VIII.	0 ^b 57' 42',9	62° 38 5'	<u> </u>	87° 4 55"
IX.	0 59 26,0	62 29 50	- 2 40,7	87 5 50
X.	1 4 5 1,5	62 0 54	8 54,4	87 4 56
XI.	1 6 29,8	61 53 53	11 28,9	87 6 7
XII.	1 14 55,2	61 12 18	- 29 38,4	87 4 37
XIII.	1 16 3,2	61 8 36	-3241,3	87 6 3

Distance apparente de la cime orientale au zénith de la station de Konstantinogorskaja - - 87° 5'25" (f

Distances du soleil

à la cime occidentale du mont Elbrus.

N°. de l'obser- vation.	Tems vrai solaire après midi.	Distance apparente du soleil à la cime occidentale, obser- vée réduite au cen- tre du soleil et cor- rigée.	ΔES, ou la reduction de la distance au ver- tical ZE.	Distance apparente de la cime occidentale au zénith, conclue de l'observation.
XIV.	1 0 40",0	62° 21′ 18″	<u> 2′ 15″,6</u>	87° 5′ 19″
XV.	1 1 50,0	62 15 8	-312,8	87 -5 29
XVI.	1 8 9,4	61 41 13	-11 12,8	87 4 50
XVIII.	1 9 19,4	61 35 26	13 12,0	87 4 58

Distance apparente de la cime occidentale au zénith de la station de Konstantinogorskaja - 87° 5' 9",0.

J'avais été contraint de prendre ma troisième station sur une montagne assez éloignée de la forteresse Kislowodskaja, parceque près de cette forteresse les montagnes circonvoisines derobent la vue de la chaine de glaciers du Caucasc. Ayant lié cette station avec la forteresse par un triangle orienté, dont la base avait 7648 pieds anglais de longueur, j'ai trouvé sa position par rapport au centre de la forteresse 0° 0′ 1″,0 au nord, et la différence des méridiens en arc 0° 2′ 32″,0 à l'orient. La latitude de la forteresse ayant été déterminée par moi 43° 54′ 6″,0, celle de la station mentionnée est en conséquence 43° 54′ 7″,0. Les observations que j'y ai faites sont avec leurs résultats les suivantes:

Distances du soleil à la cime occidentale du mont Elbrus, observées le 13 Juin 1813 n. st.

N°. de l'ob- servation.	Tems vrai solaire, observé au chronomêtre de Barraud av m.	Distance du soleil à la cime occidentale observée, réduite au centre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.	Asimuth de la cit a e occidentale du mont Elbrus, conclu de l'observation.
I.	10 ^b 47′ 19″,0	76° 10′ 39′′	23° 15′ 32″
III.	10 49 36,4	75 51 48	23° 15′ 50
III.	10 52 43,0	75 26 4	23° 15′ 30°

Azimuth de la cime occidentale du mont Elbrus, observé à la station Kislowodskaja - 23° 1

230 15/ 39%.

Distances du soleil à la cime occidentale du mont Elbrus, observées le même jour.

No. de l'ob- servation.	Tems vrai solaire, après midi.	Distance apparente du soleil à la cime occidentale, observée, réduite au contre du soleil et corrigée de l'erreur du sextant.	tale au zénith, con-
IV.	0630/47/,4	64 47 55 / -3 0",2	860 22 431
V.	0 32 9,8	64 41 26 -1 50,4	86 22 27
VI.	0 33 55,3	64 33 37 -0 46,0	86 22 29
VII.	0 35 11,7	64 28 17 -0 16,7	86 22 44
VIII.	0 36 16,9	04 23 27 -0 3.2	86 22 37
IX.	0 38 3,3	$64 \ 15 \ 48 \ -0 \ 3,7$	86 22 32
X.	0 39 17,3	04 10 48 -0 20,4	80 22 42
XI.	0 41 18,9	64 1 40 -1 16,6	86 21 55
XII.	0 43 4,1	$63 \ 55 \ 26 \ -2 \ 33,8$	86 22 44
XIII.	0 44 54,5	63 48 22 -4 23,0	86 22 56
XIV.	0 46 24,5	63 42 8 -6 13,2	86 22 29
_XV.	0 47 33,7	$63 \ 37 \ 57 \ -7 \ 50,6$	36 22 42

Distance apparente de la cime occidentale au zénith de la station Kislowodskaja - 8

86° 22′ 35″.

(h)

Après avoir ainsi déterminé les distances apparentes des cimes du mont Elbrus au zénith des stations, je vais à présent calculer leurs distances rectilignes aux stations mêmes; en me servant pour cet effet d'une base déduite de la position géographique des stations de Stauropol et de Konstantinogorskaja, qui a été determinée par moi au moyen de deux chronomètres et du sextant à réflexion mentionné. Soit donc dans le triangle sphérique QSO (Fig. 3 Tab. IX). S la station de Stauropol, O celle de Konstantinogorskaja et Q le pôle; en conséquence soit QS le complément de la latitude de la station de Stauropol, QO celui de la latitude de la station de Konstantinogorskaja, et l'angle SQO la différence des méridiens de ces stations. Ces trois parties du triangle étant connues, je calcule l'are SO, ou la distance de deux stations, par la formule:

$$\sin \frac{1}{2} SO = \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} (QO - QS) + \sin^2 \frac{1}{2} SQO \sin QS \sin OQ};$$
et puis les angles QSO et SOQ par celles - ci :
$$\sin QSO = \frac{\sin QO}{\sin SO} \sin SQO$$

 $\sin SOQ = \frac{\sin Q S}{\sin S O} \sin SQO.$

D'après mes observations QS $\equiv 44^{\circ} 57' 0''$, QO $\equiv 45^{\circ} 57' 24''$,7 et l'angle SQO $\equiv 1^{\circ} 3' 26''$,85; il en résulte :

(j) SO =
$$1^{\circ} 15' 27'',51$$

(k) QSO = $142 48, 47,9$
(l) QOS = $36 26 41,5$.

La distance de la station de *Staurropol* à celle de *Konstantinogorskaja*, et les angles QSO et QOS étant ainsi calculés dans l'hypothèse de la terre sphérique, je vais à présent les réduire au sphéroide, dont je suppose l'applatissement d'après Mr. *Délambre* $\frac{1}{308.65} \equiv 0,00324$, le rayon de l'équateur étant $\equiv 1$, et en conséquence le carré de l'excentricité $e^2 \equiv 0,006,4693$.

Soit (Fig. 4 Tab. IX) PSK la surface du sphéroide terrestre, P son pôle; soyent S et K les deux stations, dont les lati-

tudes observées H et H,; en tirant les deux normales SM et KM, qui couperont l'axe aux points M et M, on aura l'angle SMP=90°-H et KM'P=90°-H. Decrivons du point M avec la normale SM comme rayon une surface sphérique SQNO; elle passera nécessairement par le point S de la première station, et coupera les prolongements de l'axe terrestre et de la normale de la seconde station aux points Q et N. Du centre M de cette sphère tirons au point K la ligne MK, dont le prolongément se confondra nécessairement avec la partie NK du prolongement de la normale M'K, à cause de la petitesse de l'angle MKM'; il s'agit maintenant de déterminer ce dernier angle. La partie CM de l'axe terrestre, interceptée entre les centres du sphéroide C, et de la sphère décrite M, étant *)

 $CM = \frac{e^2 \sin H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = 0.006,4693 \sin H + 0.000,0209 \sin^3 H \dots,$ et la normale, ou le rayon de la surface sphérique décrite

$$SM = \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = 1 + 0.003,2346 \sin^2 H + 0.000,0157 \sin^4 H...$$
 [3]
On a MM' = 0.006,4850 × 2 sin \(\frac{1}{2}\) (H - H₂) cos \(\frac{1}{2}\) (H + H₂)
- 0.000,0157 sin (H - H₂) cos \(\frac{3}{2}\) (H + H₂)...

ou même sans erreur sensible dans notre cas:

$$MM' = 0.006,4693 \sin(H - H_1) \cos(\frac{H + H_1}{2}).$$

Or le triangle MKM' donne l'angle MKM' en secondes, qui soit desormais designé par $dH_{/} = \frac{\text{M M'} \cos H_{/}}{\text{M K} \sin \mu'}$, ou :

$$dH_{/} = 1334''$$
, $4 \sin (H - H_{/}) \frac{\cos H_{/}}{MK} \cos (\frac{H + H_{/}}{2})$; en y mettant SM pour MK, qui en diffère très peu, comme nous le verrons ci-après, il vient:

$$dH_{\prime} = 1334'', 4 \sin (H - H_{\prime}) \cos H_{\prime} \cos (\frac{H + H_{\prime}}{2})$$

$$-4'', 3 \sin (H - H_{\prime}) \sin^{2} H \cos H_{\prime} \cos (\frac{H + H_{\prime}}{2}) \cdot \dots \quad [4]$$
Les latitudes H et H, des stations de Stauropol et de Konstanti-

^{*)} Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien ; par Delambre; Paris an VII pag. 69.

nogorskaja ayant été determinées par moi $45^{\circ}3'0''$,0 et $44^{\circ}2'35''$,3, cette formule donne $dH_{/} = 11''$,993.

Du centre M de la sphère et dans le plan PMK tirons une ligne parallele à la normale M'K de la station Konstantinogorskaja, elle traversera la surface de la sphère au point O, et l'arc NO sera la mesure de l'angle ci - dessus déterminé $\equiv dH_{\rm c}$. L'angle PMO est donc \equiv PM'K $\equiv 90^{\circ} - H_{\rm c} = 45^{\circ}$ 57' 24",7. Ainsi il est évident que j'ai calculé ci-dessus, dans l'hypothèse de la terre sphérique pour la distance de deux stations l'arc de cercle SO $\equiv (j) \equiv 1^{\circ} 15' 27'',51$; je vais donc le réduire à l'arc SN, qui est la mesure de l'angle au centre SMN. Soit λ la différence des méridiens de deux stations, ou l'inclinaison de deux plans PSM et PKM, l'arc SO est donné par l'équation:

 $\cos SO \equiv \cos \lambda \cos H \cos H_{/} + \sin H \sin H_{/},$ qui étant différentiée par rapport à SO et à H_/ determine

$$d(SO) = -dH_{1} \left(\frac{\sin (H - H_{1}) + 2 \sin^{2} \frac{1}{2} \lambda \cos H \sin H_{1}}{\sin SO} \right).$$

Calculant cette équation, je trouve la correction de l'arc SO ou $d(SO) \equiv -9''$, 65, et l'arc SN en degrés, ou l'angle SM_N $(m) \equiv 1^{\circ} 15' 17''$, 86.

La corde du sphéroide SK, ou la distance rectiligne entre les deux stations, est determinée par l'equation:

SK = $\sqrt{(SM - KM)^2 + 4\sin^2\frac{1}{2}(SMN)} \times SM \cdot KM$. Mais dans le triangle MKM' on a: $(KM - KM') \equiv dH$, $\sin 4''KM' \tan gH$, $\equiv \frac{KW'}{KM} MM' \sin H$, $\equiv e^2 \frac{KM'}{KM} \sin (H - H_{/}) \sin H$, $\cos (\frac{H + H_{/}}{2})$. $\frac{KW'}{KM}$ différant très peu de l'unité, on peut mettre :

$$\begin{array}{c} \overline{KM} & \text{different très peu de l'unité, on peut mettre:} \\ KM = KM' + e^2 \sin (H - H_{/}) \sin H_{/} \cos \left(\frac{H + H_{/}}{2}\right). \\ \text{Or } KM' = 1 + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 H_{/} + \frac{2}{8}e^4 \sin^4 H_{/} \dots [3] \\ \text{et } SM = 1 + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 H_{/} + \frac{3}{8}e^4 \sin^4 H_{/} \dots \\ \text{done } SM - KM = \frac{1}{2}e^2 \left(\sin^2 H - \sin^2 H_{/}\right) + \frac{3}{8}e^4 \left(\sin^4 H - \sin^4 H_{/}\right) \dots \\ - e^2 \sin (H - H_{/}) \sin H_{/} \cos \left(\frac{H + H_{/}}{2}\right); \end{array}$$

ou en négligeant les quantités du cinquieme ordre:

$$SM - KM = KN = 2e^{2} \sin^{2}(\frac{H-H}{2}) \cos^{2}(\frac{H+H}{2}) = \frac{1}{2}e^{2} \sin^{2}(H-H) \cos^{2}(\frac{H+H}{2})$$

$$= 0.003,2346 \sin^{2}(H-H) \cos^{2}(\frac{H+H}{2}).$$
[5]

(SM-KM) étant du quatrieme ordre, on peut ometire son carré dans l'équation de la corde ci-dessus donnée, qui se réduit à celle-ci:

SK = 2 sin \(\frac{1}{2} \) SMN \(\frac{1}{2} \) SM \(\frac{1}{2} \) KM;

ou même sans erreur sensible à $SK \equiv 2 \sin \frac{1}{2} SMK$. SM. Ainsi la corde du sphéroide SK ne diffère sensiblement de la corde correspondante SN de la sphère circonscrite; et elle est dans notre cas

 $\equiv 2 \sin \frac{1}{6} (m) \text{ SM} \equiv 0.021.9383,$ (n)

en parties du demi - grand axe du sphéroide.

Nous avons encore à déterminer les corrections des angles QSO et QOS calculés ci - dessus (k) et (l). Le triangle sphérique NSO donne $\sin NSO = \sin NO \frac{\sin NOS}{\sin SN}$; c'est - à - dire :

$$d \text{ (QSO)} = dH_{/} \frac{\sin QOS}{\sin NS} = 325'',3.$$

Retranchant donc $d(QSO) \equiv 5'25'', 3$ de l'angle QSO (k), nous aurons l'angle $QSN \equiv 142^{\circ}43'22'', 6$. (0)

Pour calculer la correction de l'autre angle QOS, je decris du point M' comme centre, avec la normale M K de la station Konstantinogorskaja comme rayon, une autre surface sphérique, qui coupera les prolongements de l'axe terrestre et de la normale SM de Stawropol aux points Q, et N,; et je tire du point M' et dans le plan PMS une ligne parallele à la normale SM, qui traversera cette surface sphérique au point O. L'arc N, O, sera donc la mesure de l'angle M SM = -dH, et l'angle Q, M'O, sera égal à l'angle PMS $= 90^{\circ} - H$. En outre l'angle PMK $= PMO = 90^{\circ} - H$, et la différence des méridiens λ restant les mêmes, les triangles sphériques Q, O, K et Q S O sont semblables; et on a pour la détermination de la correction de l'angle S O Q = O, K Q, l'équation:

$$d(SOQ) \equiv d(O, KQ) \equiv dH \frac{\sin Q, O, K}{\sin N, K}$$

L'équation [4] donne $dH \equiv 11''$, 788; et on a

(*p*)

 $N_{r}K \equiv 0, K + d(0, K) \equiv 0S + d(0, K) \equiv 1^{\circ}15'27'', 5 - 9'', 4$ = 1° 15' 18'',1 et Q, O, K = QSO (k).

Avec ces quantités on trouve $d(O, KQ_i) \equiv 5'25'', 3$, égale à d(QSO); on a ainsi l'angle Q, KN_i , c'est - à - dire l'angle que fait le plan vertical SNM' passant par la station de Stawropol avec le méridien de la station Konstantinogorskaja PKM'(!) = $36^{\circ}26'41', 5 + 5'25'', 3 = 36^{\circ}32'6'', 8$.

Nous allons à présent déterminer les distances rectilignes des deux cimes du mont *Elbrus* aux trois stations ci-dessus mentionnées, et la position géographique de mêmes cimes.

Calcul par rapport à la cime orientale.

L'azimuth de la cime orientale observé à Stawropol, se trouve dans l'exposition des observations (b) = 348° 23' 15"; en retranchant l'angle $QSN + 180^{\circ} = (0) ... 322^{\circ}$ 43' 22",6 nous aurons l'angle que font deux plans verticaux passans par la station Konstantinogorskaja et par la cime orientale, l'angle qui soit désigné par la lettre S = 25° 39′ 52″,4. L'azimuth de la même cime observé à la station Konstantinogorskaja (d) . . 31° 16' 15" étant ajouté à l'angle Q KN, ei-dessus calculé (p)..36° 32' 6',8, donne la somme 67° 48' 21'',8, qui étant déduite de 180° laisse pour résidu l'angle K, que font les plans verticaux passans par la cime orientale et par la station de Stauropol = 112° 11' 38",2. Si on mène des points S et K du sphéroide les cordes KE et SE au point E du sphéroide, situé au-dessous de la eime orientale du mont Elbrus, on construira un triangle rectiligne SEK, dont le côté SK (n) est donné. Pour avoir les angles y adjacents S et K, il faut réduire les angles horisontaux, ei-dessus trouvés S et K, au plan de ce triangle, au moyen des dépressions des points K et E, et S et E, calculées pour les points S et K. Mais comme il n'est pas nécessaire de déterminer pour cet effet ces dépressions rigoureusement, on pourra sans inconvénient négliger la différence, qui existe entre le sphéroide et les surfaces sphériques circonscrites. En conséquence on pourra regarder les côtés du triangle rectiligne SEK comme des cordes d'une sphère, et calculer, par le théorème de Mr. Legendre, l'excès sphérique de la somme de trois angles du triangle sphérique correspondant SEK sur 180°, par la formule: l'excés en secondes = (SMN)" tang ½ SMN $\frac{\sin S}{\sin(S+K)}$. Cet excès se trouve dans notre cas = 29",6, dont le tiers 9",9 étant retranché des angles horisontaux K et S, les rédiút aux angles du triangle plan SEK. On a ainsi l'angle S = 25° 39' 42",5. et l'angle K = 112° 11' 28",3; en outre la corde du sphéroide SK, ou un côté du triangle SEK étant trouvé ci-dessus (n).. = 0.021,9383, on en déduit les distances rectilignes de la cime orientale aux stations de Stawropol et de Konstantinogorskaja, c'est-a-dire:

la corde du sphéroide
$$SE = 0.030.2716$$
, (q) et la corde - $KE = 0.014.1581$. (r)

Puisque les cordes du sphéroide ne diffèrent pas sensiblement des cordes correspondantes des sphères circonscrites. [6], on aura en divisant les cordes SE et KE par les normales correspondantes SM et KM' (Fig. 4), on aura dis-je le double des sinus de la moitié des angles aux centres M et M'. Les normales SM et KM' étant [3]. 1,001,6241 et 1,001,5670, on trouve:

l'angle SME =
$$1^{\circ} 43' 54'',08$$
 (s)
et l'angle KM'E = 0 48 35, 78.

Pour calculer la position géographique de cette cime, désignons par la lettre K (Fig. 4) le point du sphéroide situé au-dessous d'elle, S soit encore le point du sphéroide correspondant à la station de Stawropol, et N soit le point où le prolongement de la normale M'K de la cime traverse la surface sphérique, décrite du point

M avec la normale SM comme rayon. L'angle QSN sera en conséquence égal à l'azimuth de la cime, observé à Stauropol (b), moins $180^{\circ} \equiv 168^{\circ} \ 23' \ 15''$; l'angle QMS \equiv are QS, au complément de la latitude de Stauropol $\equiv 44^{\circ} \ 57' \ 0''$, et l'angle SMN (s) \equiv are NS \equiv 1° 43′ 54′′,08. Dans le triangle sphérique QSN ayant deux côtés QS et SN et l'angle compris, le trosième côté se trouve par l'équation:

cos QN \equiv cos QSN sin QS sin SN + cos QS cos SN; d'où l'on tire QN \equiv 46° 38′ 50″,2. Cet arc étant la mesure de l'angle QMN, on aura l'angle QM'N, ou le complément de la latitude de la cime, en y ajoutant l'angle MKM', qui se trouve par la formule [4] \equiv 20″,6. Ainsi QM'K \equiv 90° \rightarrow H, \equiv 46° 39′ 10″,8; et la latitude de la cime orientale du mont Elbrus \equiv 43° 20′ 49″,2.

On a de même dans le triangle sphérique QSN la différence des méridiens de *Stauropol* et de la cime *orientale* \equiv SQN $\equiv \lambda$, par la formule sin SQN $\equiv \frac{\sin SN \sin QSN}{\sin QN}$; qui donne SQN $\equiv 0^{\circ}$ 28' 45",5, dont la cime *orientale* git vers l'orient de *Stauropol*.

Calcul par rapport à la cime occidentale.

En conservant par rapport à cette cime les mêmes lettres dont nous nous sommes servi ci-dessus par rapport à la cime orientale, et en tenant la même marche, que nous y avons suivie, nous aurons l'angle S, ou l'inclinaison de deux plans verticaux, passans par la station Konstantinogorskaja et la cime occidentale, $(c) - 180^{\circ} - (0) = 20^{\circ} 3' 44'', 4$; et l'angle K, contenu entre les deux plans verticaux passans par la station de Stauropol et la cime mentionnée, $180 - (e) - (p) = 111^{\circ} 18' 25', 2$. L'excès sphérique du triangle sphérique SKE se trouve = 29'', 9, dont le tiers étant déduit des angles S et K, les réduit à $26^{\circ} 3' 34'', 4$

et 111° 18' 15",2, qui sont les angles S et K du triangle plan SKE, dans lequel on commait en outre le côté SK, ou la distance rectiligne de la station de Stauropol à celle de Konstantinogorskaja (n) = 0,021,9383; on en conclut les distances rectilignes de la cime occidentale aux deux stations mentionnées, ou

la corde SE = 0.030,1756 (u)

(x) (y)

et la corde KE $\equiv 0.014.2285$; (v)

et les angles aux centres des sphères circonscrites (Fig. 4) savoir : l'angle SME = 1° 43′ 34″,29

et l'angle KM'E $\equiv 0$ 48 50, 28

Déterminant la position géographique de cette cime de la même manière que celle de la cime orientale, je trouve avec l'azimuth observé à Stauropol (e) l'arc QN (Fig. 4). = 46° 38′ 39″.0; en y ajoutant la correction de latitude dH, = angle MKM′ = 20″,6, j'obtiens l'angle QM′K = 90° — H, = 46° 38′ 59′,6, et par conséquent la latitude de la cime occidentale du mont Eibrus=43° 21′ 0″,4. (z)

La différence des méridiens entre cette cime et la station de Stawropol résulte de ces données $\equiv 0^{\circ} 27' 42'', 0$ orientale. (aa)

Déterminons à présent la distance rectiligne de la eime occidentale à la troisième station, celle pres de la forteresse Kislowodskaja. Soit pour cet effet (Fig. 4) S la position de cette station sur le sphéroide, et K celle de la cime mentionnée; l'angle QMS, ou l'arc de cercle QS, sera en conséquence le complément de la latitude de cette station $= 90^{\circ} - 11$, qui est d'après mes observations $= 46^{\circ}$ 5' 53",0; l'angle QM'K = QMO = l'arc QO $= 90^{\circ} - H_{\odot}$, sera le complément de la latitude de la cime occidentale, ci-dessus calculé (z)= 46° 38'.59",6; et l'angle QSN, que fait avec le méridien le plan vertical passant par la eime mentionnée, est égal à $180^{\circ} -$ l'azimuth de la cime (h) $= 150^{\circ}$ 44' 21'. Ainsi pour pouvoir résoudre le triangle sphérique QSN, nous réduirons

l'angle QMO= l'arc QO=(90°-H₁), à l'arc QN=(90°-H₁-dH₁), en retranchant l'arc NO = dH₁, qui se trouve par la formule [4] = 6",76; l'arc QN est donc = 46° 38′ 52″,84. Ayant dans le triangle QSN deux côtés et un angle opposé à l'un des côtés, on trouve le troisième côté SN=0° 35′ 53″,15, qui est la mesure de l'angle au centre SMK. La normale SM étant -- [3] = 1,001,5590, il en résulte la corde SK, ou la distance rectiligne de la cime occidentale à la station près de la forteresse Kislowodskaja (cc) = 2 sin ½ SMK × SM = 0,010,4550.

Il nous reste encore à calculer seulement les hauteurs des eimes du mont Elbrus au - dessus du niveau de la mer. Soit donc (Fig. 5) SH Thorison et SM la normale du lieu de l'observation, et ESH la hauteur de la cime y observée et corrigée de l'effet de la réfractoin terrestre. SN étant la corde d'un arc de cercle décrit avec la normale du lieu SM comme rayon, et SH la tangente du même arc, l'angle HSN sera = 1 SMN; on a donc dans le triangle ESN l'angle ESN = ESH $+\frac{1}{6}$ SMN, l'angle SEN = 90° - ESH - SMN, et SN = SK, parceque la corde du sphéroide ne diffère pas sensiblement de la corde de la sphère circonscrite. Ainsi, après avoir exprimé en toises la distance rectiligne de la cime au lieu de l'observation, ou la corde SK, on aura la valeur de la ligne EN en toises \equiv SK $\frac{\sin{(ESH + \frac{1}{2}SMN)}}{\cos{(ESH + SMN)}}$; en y ajoutant la valeur de NK [5] = 10583^{t} , $4 \sin^{2} (H - H_{i}) \cos^{2} (\frac{H + H_{i}}{2})$, où H_i est la latitude de la cime, et en y joignant la hauteur du lieu de Vobservation au dessus du niveau de la mer, la somme sera la hauteur de la cime au - dessus du même niveau-

[7]

Calcul de la hauteur de la cime orientale au-des us du niveau de la mer.

La distance apparente de la cime orientale au zénith fut observée à Stawropol (a) 89° 12' 16", prennant son complément nous aurons = 0° 47′ 44"; en y rétranchant pour la réfraction terrestre d'après Mr. Delambre $0.08 \times SMN = 8' 18'',7$, il vient l'angle ESH $= 0^{\circ}39'25,3$. L'angle SMN (s) étant $= 1^{\circ} 43' 54'',08$, l'angle (ESH $+\frac{1}{5}$ SMN) est $= 1^{\circ} 31' 22'', 3$, et l'angle (ESH + SMN) = $2^{\circ} 23 19'', 4$; en outre on a la corde SK $(q) \equiv 0.030,2716$, qui étant multipliée par le rayon de l'équateur, exprimé en toises, et augmenté de la hauteur de la station au-dessus du niveau de la mer = 3272119 toises, devient = 99052 toises. Avec ces données on tire de la formule [7] la valeur de EN $= 2634^{t}7$ La dépression du point K du sphéroide au - dessous de la surface sphérique, ou la valeur de NK se trouve 4t,8 La hauteur de la station de Stauropol au - dessus du niveau de la mer, a été trouvée ci-dessous $-255^{\dagger},3$ Il résulte donc, de l'observation faite à Stauropol, la hauteur de la cime orientale au - dessus du niveau de 2894^t,8 la mer

De même la distance apparente de cette cime au zénith ayant été observée à la seconde station, celle près de la forteresse Konstantinogorskaja $(f) = 87^{\circ}5'25''$, on en a le complément $= 2^{\circ}54'35''$; en retranchant pour la réfraction $0.08 \times SMN = 3'53''.3$, il vient l'angle ESH $= 2^{\circ}50'41''.7$. L'angle SMN fut trouvé ci-dessus $(t) = 0^{\circ}48'35''.78$, l'angle $(ESH + \frac{1}{2}SMN)$ est done $= 3^{\circ}14'59''.6$, et l'angle $(ESH + SMN) = 3^{\circ}39'17''.5$.

La distance rectiligne de cette eime à la station Konstantinogor-
skaja, ou la corde SK trouvée ci-dessus $(r) \equiv 0,014,1581,$
contient 46327 toises; et il resulte de ces données CN 2631 ^t ,7
on a la dépression NK 0, 8
et la hauteur de la station Konstantinogorskaja au-
dessus du niveau de la mer, determinée ci-dessous 245, 9
La hauteur de la eime orientale au - dessus
du niveau 'de la mer, se trouve donc par
l'observation faite à la station Konstantino-
gorskaja 2878, 4.

Calcul de la hauteur de la cime occidentale, au - dessus du niveau de la mer.

A la même station fut observée la distance apparente de la cime occidentale au zénith $(g) \equiv 87^{\circ} 5' 9''$, dont le complément est = 2° 54′ 51″; en déduisant la réfraction terrestre 0,08 × SMN $\equiv 3'54'',4$, il vient l'angle ESH $\equiv 2^{\circ}50'56'',6$ L'angle SMN (y) étant $\equiv 0^{\circ} 48' 50'', 28$, on α (ESH $+\frac{1}{9}$ SMN) $\equiv 3^{\circ} 15 21'', 7$ et (ESH + SMN) = 3° 39′ 46′,8. Ces angles et la corde SK, ou la distance rectiligne de la eime calculée ei - dessus (v) = 0,014,2285 et contennant 46557 toises, donnent pour la valeur de la ligne EN $2649^{t}, 8$ la dépression NK est iei 0, 8 et la hauteur de la station Konstantinogorskaja au - dessus du niveau de la mer 245, 9On a ainsi la hauteur de la cime occidentale au dessus du niveau de la mer 2896, 5.

Les observations faites à la troisième station, celle près de la forteresse Kislowodskaja, ont donné la distance apparente de la cime occidentale au zénith (i) $\equiv 86^{\circ} 22' 35''$; en déduisant de son complément pour la réfraction terrestre 2' 52'',2, il vient l'angle ESH $\equiv 3^{\circ} 34'$, 32',8. L'angle SMN ayant été trouvé ci-dessus (bb) $\equiv 35' 53''$,15, on a (ESH $+\frac{1}{2}$ SMN) $\equiv 3^{\circ} 52' 29''$,4, et (ESH + SMN) $\equiv 4^{\circ} 10' 26''$,0; et la corde SN, ou la distance rectiligne de la cime à la station Kislowodskaja étant (cc) $\equiv 0,010,4550$ ou 34213 toises, on en tire par l'équation [7] EN $2318^{\dagger}2$. La dépression NK est dans ce cas présent seulement - - - 0^{\dagger} ,5

La station était située sur une montagne assez éloignée de la forteresse Kislowodskaja; je déterminai sa distance au centre de la forteresse, par un triangle, 11178 pieds anglais, et sa hauteur apparente au-dessus de l'horison de la forteresse 5° 33′ 50″; il en résulte son élévation au-dessus du niveau de la forteresse

170, 2

La hauteur de la forteresse Kislowodskaja audessus du niveau de la mer, déterminée eiaprès - - -

410,7

Ainsi la eime *occidentale* s'éléve au-dessus du niveau de la mer, d'après les observations faites à la station Kislowodskaja -

2899,6.

RÉSUMÉ.

Hauteur de la cime orientale du mont Elbrus.

Les observations faites à la station Stawropol la déterminent à - - - 2894,8 et celles de la station Konstantinogorskaja à 2878, 4

Je crois devoir donner la préférence à la dernière détermination, qui semble être moins affectée par l'incertitude de la réfraction terrestre, je suppose donc cette cime - - 2878 toises au dessus du niveau de l'océan.

Hauteur de la cime occidentale du mont Elbrus.

Elle résulte des observations faites à la station Konstantinogorskaja - - 2896^t,5 et de celles, qui ont été faites à la station Kislowodskaja 2899, 6 En prennant le milieu, on a pour la hauteur de cette cime au - dessus de l'océan - 2898 toises.

POSITION DE LA VILLE D'ASTRAKHAN PAR RAPPORT AU NIVEAU DE L'OCÉAN.

Le correspondant de l'Académie, Mr. le Conseiller de Collége de Lokhtine, a fait à Astrakhan des observations méteorologiques pen-

dant les années 1805 — 1813 inclusivement, et il les a communiquées régulièrement à l'Académie. Cette suite d'observations étant la plus complette qu'on y ait faite, je vais m'en servir pour la détermination de la position de cette ville par rapport au niveau de la mer; et pour cet effet je mets ici aux yeux du Lecteur les hauteurs moyennes annuelles du baromètre et du thermomètre, tirées des résumés annuels, qui ont été rédigés par l'observateur même.

		_
Année.	Hauteur moyenne annuelle du baro mètre e- pouces a- glais.	Hauteur mo- yenne du ther- momètre ex- térieur de Réaunur, ou la tempera- ture moyenne de l'air.
1805	30, 12	+ 9°,4
1806	30, 17	+ 9,4
1807	30, 21	+ 9, 1
1808	30, 25	+ 8, 6
1809	30, 28	+ 8
1810	30, 26	+ 8
1811	30, 34	+ 8
1812	30, 33	+ 8,5
1813	30, 37	+ 8,3

On remarque d'abord dans cette table, que les hauteurs du baromètre se sont accrues successivement. La cause en est fondée en partie dans le changement de logis de l'observateur; qui, ayant demeuré pendant les premiers deux ans au centre et au lieu le plus élevé de la ville, devait y observer nécessairement la hauteur du baromètre moindre qu'à son second logis, situé dans le faubourg, et où le baromètre était suspendu tout - an - plus quatre toises au-dessus du niveau moyen du Wolga. Les observations des années 1811, 1812 et 1813, faites dans un nouveau logis, situé dans la ville mème, présentent encore une augmentation de la hautenr moyenne du baromètre à peu-près d'une ligne; mais qui cette fois doit

être attribuée à une autre cause, parce que le baromètre était suspendu dans ce logis un peu plus haut, et à peu près cinq toises audessus du niveau du Wolga. Quoique en général les variations des hauteurs moyennes annuelles du baromètre, dans le climat tempéré, passent quelquesois une ligne; on remarque cependant, qu'elles n'agissent pas dans un sens plusieurs années de suite. Ainsi il est peu probable que cet accroissement, presque constant pendant les années 1811, 1812 ct 1813, soit dù à une variation extraordinaire dans l'état de l'atmosphère; au contraire il peut provenir plutot de quelque dérangement de l'instrument même. Mais dira - t - on : si l'instrument a pu être dérangé dans le transport du second logis au troisième, il a pu l'être, à plus forte raison, aussi dans le trajet de Kasan, d'où l'observateur est venu habiter à Astrakhan; par conséquent on ne saurait faire aussi aucun usage de ses observations barométriques antérieures à l'année 1811. En effet l'usage de ces observations serait très - précaire, si je n'eusse pas eu l'occasion de comparer le baromètre de Mr. de Lokhtine avec mon baromètre à siphon, de la justesse duquel je me suis assuré à plusieurs reprises. Les observations que j'ai saites pour cet effet depuis le 14 jusqu'au 18 Septembre 1811, m'ont donné la hauteur moyenne réduite du baromètre 28,612 pouces francais; et les observations faites au baromètre de Mr. de Lokhtine donnent pour la même hauteur moyenne, 23,605 pouces français; la correction de la hauteur du baromètre de Mr. de Lokhtine, réduite en pouces français, est donc = + 0p,007, dont il faut augmenter les hauteurs moyennes des années 1811, 1812 et 1813.

Les observations antérieures ne pouvant être d'aucun usage, à cause des circonstances ci-dessus énoncées, je me borne à la moyenne des hauteurs du baromètre de trois dernières années, qui est 30,347 pouces anglais, ou 28,475 pouces français; en y appliquant la correction ci - dessus déterminée, elle devient 28,482 pouces français. Le baromètre de Mr. de Lokhtine étant à cuvette, il faut encore corriger cette hauteur moyenne à raison de la variation du niveau du mer-

cure dans la cuvette. Le rapport du diametre interieur du tube au diamètre de la cuvette étant inconnu, nous le supposerons être contenu entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$, et nous le ferons $\frac{1}{7.5}$. La hauteur du baromètre étant lors de la comparaison $28^p,605$, on aura pour $28^p,475$, la correction $(\frac{1}{7.5})^2 \cdot 0^p,13 = 0,002$ pouces; qui est à déduire de la hauteur moyenne corrigée $28^p,482$, et qui la réduit ainsi à 28,480 pouces français. Nous n'avons pas besoin de tenir compte de la dépression du mercure dans le tube du baromètre, due à sa capillarité, parce que cet instrument a été ajusté sur un baromètre à syphon, pour lequel cette correction est nulle.

La température moyenne de l'air, observée par Mr. de Lokhtine pendant les derniers trois ans, est = + 8°,27 de Réaumur, ou + 10°,34 du thermomètre centésimal. Cet observateur n'ayant pas marqué la température du baromètre, nous la fixérons par estime à + 14° de Réaumur ou + 17°,5 du thermomètre centésimal; qui vraisemblablement s'approche très-près de la yérité, le baromètre se trouvant dans un cabinet habité. Au reste un degré de Réaumur d'erreur sur la température du baromètre, ne produit qu'une erreur de 0[†],9 sur la hauteur au-dessus du niveau de la mer.

Pour déduire de ces données la situation de la ville d'Astrakhan par rapport au niveau de l'océan, nous les comparérons à la hauteur moyenne du baromètre, observée par Mr. Shuckburg au niveau de l'océan à la latitude de 50° sexagésimaux, et qui est 28,183 pouces français, la température moyenne de l'air et du baromètre étant 12° ,8 de la division centésimale *). Réduisant la hauteur moyenne du baromètre de Mr. de Lokhtine, de la température supposée $+17^{\circ}$,5 du thermomètre centésimal à celle du baromètre de Mr. Shuckburg, savoir à 12° ,8 centésimaux, nous aurons à retrancher 0,025 pouces, à raison de $\frac{1}{5412}$ de la hauteur du baromètre, pour 1° centésimal de la différence de température.

^{, *)} Traité d'Astronomie physique par Biot 2de édition Tome III Additions pag. 29.

J'ai fait à Taganrock trois observations du baromètre et du thermomètre, qui pourront aussi servir à la détermination de la position de la ville d'Astrakhan par rapport au niveau de la mer, si on voudra les comparer avec des observations correspondantes, faites à Astrakhan. Les voici:

niveau de l'océan 41^t,16.

	Observations faites à Taganrock, douze toises au dessus du niveau de la mer d'Asov.			Observations correspondantes faites à Astrakhan, au baromètre et thermomètre de Mr. de Lokhtine.	
Année 1812. nouveau style.	d auteur u baro- mètre.	Température du baromètre, degrés de Réaumur.	Tempéra- ture de l'air.	Hauteur du baro. mètre, réduite en pou. ces tran. çais.	Tempéra- ture de l'air, degrés de _j Réaumur.
le 10 Août à midi	27,92	+19°,4	+200,4	28,20	-+- 18°,8
le 11 — a 9 ^b av.m.	28,00	+16,3	-+ 15, 5	28,32	+18,8
le 13 — à midi	28,19	 19 , 0	+21,3	28,46	-+ 19, 6

Hauteurs moyennes - $28,037 + 18,23 + 19,07 28,327 + 19^{\circ},07$

La température du baromètre à Astrakhan n'étant pas marquée, nous la supposerons égale à celle de l'air, c'est - à - dire à

19°,07 de Réaumur; et ajoutant à la hauteur du baromètre y observée la correction ci-dessus mentionnée = +0°,007, et retranchant 0°,005 pour la correction du niveau de la cuvette, nous ferons cette hauteur = 28,329 pouces français. De même réduisant la hauteur moyenne du baromètre, observée à Taganrock, à la temperature de 19°07 de Réaumur, nous aurons 28,042 pouces français.

On déduit de ces données par la formule de Mr. Laplace la dépression du baromètre d'Astrakhan au-dessous de celui de Taganrock 46^{\dagger} , 40; et en retranchant pour l'élévation du dernier baromètre au-dessus du niveau de la mer d'Asov 12,0 toises, il vient la dépression du baromètre d'Astrakhan au-dessous du niveau de la mer d'Asov $= 34^{\dagger}$, 40; qui diffère de celle, qui a été déduite ci-dessus de la hauteur moyenne du baromètre, observée pendant trois ans, de 6^{\dagger} , 76 en moins.

Ainsi en prennant le milieu, nous fixérons la dépression du baromètre d'Astrakhan au-dessous du niveau de l'océan à 37^t ,8; et celle du niveau du Wolga 5 toises plus bas, c'est-a-dire à 42^t 8. La ville d'Astrakhan est donc très - remarquable par sa situation au - dessous du niveau de la mer. Cette ville et la ville Quito au Pérou, située 1462 toises au - dessus de l'océan, sont les extrèmes parmi toutes les villes de la terre, pour leur situation par rapport au niveau de la mer.

Notre célèbre Naturaliste Pallas avait deja observé l'année 1773, que la mer Caspienne s'étendait autrefois beaucoup plus loin qu'à présent; et il a même tracé sur une carte le cours de son ancien bord, d'après des observations faites sur l'état salin du sol, sur les coquillages y parsemés, qui sont de mêmes genres que celles de la mer Caspienne, et sur le vestiges mèmes de l'ancien bord de cette mer, visibles aux environs

de la Colonie de Sarepta *). Tous ces indices réculent les limites anciennes de la mer Caspienne à - peu - près cinq cents Werstes, ou cinq degrés, au nord des limites actuelles. En même tems ce Naturaliste remarque que, quoique on trouve aussi encore plus haut près du Wolga des bancs entiers consistants en coquillages et en coraux, ces - ci appartiennent cependant à des genres qui se trouvent dans l'ocean, et qui n'exsitent ni dans la mer Caspienne ni même dans la mer noire; cela prouve donc une innondation eneore plus considérable, mais qui a été antérieure à l'etat ancien de la mer Caspienne. Il parle ensuite de la communication, qui existait autrefois entre cette mer et la mer noire, en l'appuyant sur les espèces communes aux deux mers, comme : les chiens de mer, les esturgeons, les argentines, les aiguilles et les pectinites; qui n'auraient pu autrement parvenir dans la mer Caspienne. Après la décharge de la mer noire, supposée par Tournefort **), cette communication s'étant rompue, le niveau de la mer Caspienne devait nécessairement s'abaiser successivement, jusqu'à ce que l'évaporation de cette mer soit devenue égale à la quantité de l'eau, reçue par des rivières qui s'y déchargent. Pallas estime cet abaissement au delà de quinze toises; mais nous venons de voir ci-dessus, que la mer Caspienne est actuellement au delà de 43 toises au-dessous de la mer noire; par conséquent il faudrait supposer cet abaissement encore plus fort.

Il serait à souhaiter que le Gouvernement fit faire des observations physiques et un nivellement, dans la contrée désignée par Pallas: pour y déterminer plus exactement les limites anciennes de la mer Caspienne, et l'endroit par où cette mer a communiqué autrefois avec la mer noire. Ce travail jetterait un plus grand jour sur cette contrée, peut - être unique sur le globe ter-

[&]quot;) P. S. Pallas Reise durch verchiedene Provinzen des Russischen Reichs. St Petersburg 1776 Tome III pag. 570.

^(*) Relation d'un Voyage au Levant Tom. I. p. 80. Tom. II. p. 63 64.

restre, et sur le mode, dont le changement mentionnée s'est opéré; et peut-ètre le lieu de l'ancienne jonction naturelle de deux mers, se trouverait-il aussi le plus convenable à leur jonction artificielle.

J'espère que la détermination de la position d' Astrakhan par rapport au niveau de la mer, présentée ici à l'Académie Impériale, sera plus exacte que celles, qui ont été faites avant moi, parce que j'ai eu l'avantage de pouvoir vérifier les instruments; et il mé semble, que cette détermination ne pourra guères s'éloigner de la vérité au delà de cinq toises. La chute du Wolga depuis Astrakhan jusqu'à son embouchure ne saurait être bien grande; cependant étant inconnue, elle nous empeche de déterminer la dépression de la mer Caspienne au-dessous du niveau de la mer noire. MM. Engelhardt et Parrot ont déterminé cette dépression par un nivellement double à 54 et 47 toises. Malheureseument une suite d'observations correspondantes du baromètre n'a pu être faite aux bords des deux mers par ces habiles observateurs, à cause du retardement éprouvé par Mr. Parrot aux stations des postes; elle aurait donné la dépression mentionnée avec toute la précision désirable. Cependant l'incertitude qui y reste encore, est deja contennue dans des limites très - étroites.

Nous allons à présent déterminer la hauteur de trois stations: Stawropol, Konstantinogorskaja et Kislowodskaja, au dessus du niveau de la mer.

J' ai fait pour cet effet à *Stauropol* huit observations du baromètre et du thermomètre l'année 1812, entre le 8 Septembre et le 22 Octobre, qui donnent la hauteur moyenne du baromètre 26,574 pouces français, la température moyenne du baromètre étant $+15^{\circ},0$ de *Réaumur*, et celle de l'air $+14^{\circ},75$. Ayant tiré des journaux

de Mr. de Lokhtine les observations correspondantes, je trouve la hauteur moyenne du baromètre observée à Astrakhan 28,401 pouces français, et celle du thermomètre extérieur $\pm + 12^{\circ}$,63 de Réaumur. Supposant la température moyenne du baromètre à Astrakhan par estime, puisque elle n'est pas marquée, $\pm 14^{\circ}0$ de Réaumur, nous aurons la hauteur du baromètre observée à Stauropol et réduite à $14^{\circ}0$,0 de température $\pm 26^{\circ}0,568$, et la température de l'air $\pm 18^{\circ}0,44$ centésimaux. Ajoutant à la hauteur du baromètre, observée à Astrakhan, $0^{\circ}0,007$, et en y retranchant $0^{\circ}0,004$, pour la correction du niveau de la cuvette, elle devient $28^{\circ}0,44$, et la température de l'air $15^{\circ}0,79$ centésimaux.

Avec ces données on trouve par la formule de Mr. Laplace la différence des niveaux entre les deux baromètres $= 293^{t},05$; et en retranchant 37^{t} ,8 pour la dépression du baromètre d'Astrakhan au-dessous du niveau de la mer, on obtient la hauteur de la station de Stawropol au - dessus du niveau de la mer $= 255^{t}$,3.

Seize observations saites à la station Konstantinogorskaja en 1813 entre le 3 et le 10 Juin, m'ont donnée la hauteur moyenne du baromètre réduite à 14° de Réaumur de température = 26,546 pouces français, et la température moyenne de l'air = + 19°,05 centésimaux. Autant d'observations correspondantes saites à Astra-khan déterminent la hauteur moyenne et corrigée du baromètre = 28,319 pouces français, dont je suppose la température + 14°,0 de Réaumur, très - peu dissérente de la température de l'air y observée 16°,46 centésimaux. Il en résulte la dissérence des niveaux entre les deux baromètres 283^t,7; et en déduisant pour la dépression du baromètre d'Astrakhan 37^t, 8, il en resulte la hauteur de la station Konstantinogorskaja au - dessus du niveau de la mer = 245^t,9.

Ensin six observations saites par moi à la sorteresse Kislowodskaja depuis le 10 jusqu'au 13 Juin 1813 inclusivement, donnent la hauteur moyenne du baromètre réduite à la température de 21° , 96 centésimaux = 25,513 pouces français, et la température moyenne de l'air pendant ces observations = 21° , 04 centésimaux. Les observations correspondantes d'Astrakhan donnent la hauteur corrigée du baromètre 28,219 pouces français, dont je crois devoir supposer cette fois la température égale à celle de l'air, qui a été observée 21° , 96 centésimaux. On trouve par ces données la différence des niveaux de ces baromètres 448° , 56, et par conséquent la hauteur de la forteresse Kislowodskaja au-dessus du niveau de la mer = 410° , 7.



RECHERCHES SUR DEUX SÉRIES

DONT LA SOMMATION A ÉTÉ PROPOSÉE

PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE COPENHAGUE;

PAR

 $N. \quad F \quad U \quad S \quad S.$

Présenté à la Conférence le 12 Juin 1816.

§. 1. Le programme publié en 1812, par la Société Royale des Sciences de Copenhague, rensermoit, entre autres problèmes proposés, une question d'Analyse conque en ces termes:

"In solutione problematum physico-mathematicorum interdum "occurrit haec series:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{7}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{7}{17 \cdot 19} + \text{ etc.}$$

", vel si terminis generalioribus haec series exprimatur:

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \text{etc.}$$

" Desideratur invenire formulam summatoriam generalem hujus " seriei, aut saltem monstrare, quomodo in aliam citius conver-" gentem seriem transformari possit."

Ce problème d'Analyse m'ayant intéressé, je lui ai consacré avec plaisir une partie de mes loisirs, d'abord sans aucune intention de concourir pour le prix; or ayant réussi à trouver non seulement la formule sommatoire générale, mais aussi son intégrale finie et déterminée, et mème à transformer les deux séries en d'autres incomparablement plus convergentes, ce succès de mon travail m'avoit determiné à transmettre mes recherches à la Société savante qui avoit fait de ce problème d'Analyse un objet de son programme. Les

évènemens militaires de 1812 et de 1813 ont empêché ce mémoire de parvenir à sa destination; c'est pourquoi je le présente à l'Académie, pour qu'elle en fasse l'usage qu'elle jugera convenable.

RECHERCHES

SUR LA SÉRIE NUMÉRIQUE

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{17 \cdot 19} + \text{etc.}$$

§. 2. La marche la plus naturelle, et qui facilite le plus ces sortes de recherches, étant de les commencer par un cas spéciel, je me suis attaché d'abord à traiter la série numérique du programme. J'en indique la somme cherchée par s, desorte que

$$2 s = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \text{ etc.}$$

Je décompose cette série en deux autres

$$t = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

 $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{17} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \text{etc.}$

dont la différence sera

$$t - u = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \text{etc.} = 2s,$$
desorte que $s = \frac{t - u}{2}$.

§. 3. Maintenant je considère la fraction $\frac{1}{1-x^4}$, laquelle, transformée en série, devient :

$$\frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \text{etc.}$$

ce qui, multiplié par la différentielle d x, nous donne:

$$\frac{\partial x}{1-x^{4}} = \partial x + x^{4} \partial x + x^{8} \partial x + x^{12} \partial x + \text{etc.},$$

et en prenant les intégrales, nous aurons :

$$\int_{\frac{1}{1}-x^{4}}^{\frac{1}{2}x} = x + \frac{x^{5}}{5} + \frac{x^{9}}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \text{etc.}$$

Observons qu'ici tous les termes évanouissent en mettant $x \equiv 0$; c'est pourquoi, si nous mettons $x \equiv 1$, l'intégrale prise entre ces deux termes d'intégration sera;

$$\int \frac{\partial x}{1-x^4} \left[\begin{array}{cc} de & x = 0 \\ a & x = 1 \end{array} \right] = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \text{etc.} = t.$$

§. 4. Reprenant maintenant la série du paragraphe précédent:

$$\frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \text{etc.}$$

Si nous la multiplions par $xx\partial x$, pour avoir

$$\frac{x x \partial x}{1 - x^{4}} = x^{2} \partial x + x^{6} \partial x + x^{10} \partial x + x^{14} \partial x + \text{etc.}$$

en prenant les intégrales, nous arrivons à

$$\int \frac{x \times \partial x}{1 - x^{4}} = \frac{x^{3}}{3} + \frac{x^{7}}{7} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{15}}{15} + \text{ etc.};$$

desorte que, pour les mêmes termes d'intégration, nous obtiendrons:

$$\int \frac{x \times \partial x}{1-x^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} \operatorname{de} & x = 0 \\ \dot{a} & x = 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \text{etc.} = u.$$

Nous voilà donc arrivés à cette sommation:

$$2 s = t - u = \int_{\frac{1}{1-x^4}}^{\frac{\partial x}{1-x^4}} - \int_{\frac{x}{1-x^4}}^{\frac{x}{1-x^4}} \begin{bmatrix} de & x = 0 \\ a & x = 1 \end{bmatrix}.$$

Mais il est évident que

$$\int \frac{\partial x}{1-x^4} - \int \frac{x \, x \, \partial x}{1-x^4} = \int \frac{(1-xx) \, \partial x}{(1-xx) \, (1+xx)} = \int \frac{\partial x}{1+xx},$$
par conséquent la somme de notre série proposée sera

$$s = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{1+xx}}^{\frac{\partial x}{1+xx}} \begin{bmatrix} \operatorname{de} & x = 0 \\ \dot{a} & x = 1 \end{bmatrix}.$$

§. 5. Or comme la formule différentielle $\frac{\partial x}{1+xx}$ est intégrable, son intégrale étant \equiv Arc. tg. x, ce qui devient zéro, en mettant $x\equiv 0$, et $\frac{\pi}{4}$, en mettant $x\equiv 1$ (où π indique la circonférence d'un cerele, dont le diamètre est $\equiv 1$), il est évident que $s\equiv \frac{1}{2}\cdot \frac{\pi}{4}$, c'est - à - dire

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \text{ etc.} = \frac{\pi}{8}.$$

§. 6. Ayant déterminé de cette manière la formule sommatoire

intégrale de la série proposée, et sa somme même, il ne sera pas sans intérêt de démontrer, par une voye un peu dissérente, que:

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15}$$
 etc.

Pour cet effet nous convertirons en série la fraction

$$\frac{1}{1+xx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^3 - \text{etc.}$$

et multipliant par la dissérentielle du nous aurons:

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \partial x - x^2 \partial x + x^4 \partial x - x^6 \partial x + x^8 \partial x - \text{etc.}$$

ce que nous présenterons sous cette forme :

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \left\{ -x^2 \frac{\partial x + x^4 \partial x + x^8 \partial x + \text{etc.}}{\partial x - x^{10} \partial x - \text{etc.}} \right\}.$$

et en prenant les intégrales nous obtiendrons:

A. tg.
$$x = \begin{cases} \frac{x}{1} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \text{etc.} \\ -\frac{x^7}{3} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{15}}{15} - \text{etc.} \end{cases}$$

où il n'est pas nécessaire d'ajouter une constante, parceque tout s'évanouit en mettant x = 0.

Mettant donc x = 1 il résulte

$$\frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{15} - \frac{1}{19} - \text{etc.} \end{array} \right.$$

ou bien, en additionnant les fractions correspondantes et divisant par 2:

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \text{etc.}$$

§. 7. Voyons aprésent comment on pourra transformer cette série en une autre qui soit plus convergente; où il faut observer d'abord que ce but peut être atteint de différentes manières. 1°) On peut partir de la formule sommatoire intégrale $\int \frac{\partial x}{1+xx}$ et la transformer en une série dont les termes décroissent plus rapi-

dement que les termes de la série proposée: 2°) on peut transformer en série plus convergente l'intégrale mème de cette formule, savoir A. tg. $x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{1} + \text{etc.}$; 3°) enfin on peut chercher une série plus convergente pour la eirconférence π . Or comme les deux derniers moyens sont assez connus, et ne sauroient d'ailleurs s'appliquer à la série générale du programme, je m'attacherai au premier moyen, comme à celui que la Société paroît avoir eu principalement en vuë, et qui fournira les moyens d'opérer une transformation semblable, lorsqu'il sera question de la série générale.

§. 8. Ayant vu ci - dessus (§. 6.) que

$$\frac{\partial^{c}}{\partial x + x^{4}} = \left\{ -x^{2} \frac{\partial x + x^{4}}{\partial x - x^{6}} \frac{\partial x + x^{3}}{\partial x - x^{10}} \frac{\partial x + \text{etc.}}{\partial x - \text{etc.}} \right.$$

je multiplie par x^4 , et en prenant les intégrales j'aurai:

$$\int \frac{x^4 \, \partial x}{1 + xx} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{17}}{17} + \text{ etc.} \\ \frac{x^7}{7} - \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{19}}{19} - \text{ etc.} \end{array} \right.$$

et pour les termes établis d'intégration il résulte que:

$$\int \frac{x^{+} \partial x}{1 + xx} \begin{bmatrix} de \ x = 0 \\ a \ x = 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{ etc.} \\ -\frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{15} - \frac{1}{19} - \text{ etc.} \end{cases}$$

c'est - à - dire que

$$\frac{1}{2} \int \frac{x^4 \partial x}{1 + xx} \left[\begin{array}{c} de \ x = 0 \\ a \ x = 1 \end{array} \right] = \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + etc.$$

et de là il suit que la somme de notre série, que nous avons nommée s, pourra aussi être exprimée de cette manière:

$$s = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2} \int \frac{x + \partial x}{1 + xx} \qquad \left[\begin{array}{c} \operatorname{de} x = 0 \\ \hat{a} \quad x = 1 \end{array} \right].$$

§. 9. Maintenant pour transformer en une série plus conver-

gente la formule intégrale $\int \frac{x^4}{1+x^2} \frac{\partial x}{\partial x}$, je la représente ainsi: $\int \frac{x^4 \partial x}{2(1-\frac{1}{2}(1-x^2))}$; et comme la fraction

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1-x^2)} = 1 + \frac{1}{2}(1-x^2) + \frac{1}{4}(1-x^2)^2 + \frac{1}{8}(1-x^2)^3 + \text{etc.},$$
il est évident que

$$\int \frac{\sin^4 \partial x}{1+xx} = \frac{1}{2} \int x^4 \partial x \left[1 + \frac{1}{2} (1-x^2) + \frac{1}{4} (1-x^2)^2 + \frac{1}{8} (1-x^2)^3 + \text{etc.}\right],$$
Or en prenant les intégrales depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, nous aurons:

$$\frac{1}{2} \int x^{4} \, \partial x = \frac{1}{2 \cdot 5};$$

$$\frac{1}{4} \int x^{4} (1 - x^{2}) \, \partial x = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5 \cdot 7} = \frac{2}{2 \cdot 7} P;$$

$$\frac{1}{8} \int x^{4} (1 - x^{2})^{2} \, \partial x = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{5 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{4}{2 \cdot 9} P;$$

$$\frac{1}{10} \int x^{4} (1 - x^{2})^{3} \, \partial x = \frac{1}{10} \cdot \frac{4^{8}}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} = \frac{6}{2 \cdot 11} P.$$
etc.
$$etc.$$

Ici, pour simplifier les formules, aussi bien que le calcul numérique, j'indique dans chaque expression par P la valeur de l'intégrale immédiatement précédente. En substituant donc ces valeurs à la place des intégrales de la série précédente, nous aurons pour les termes d'intégration établis, c'est-à-dire depuis x = 0 jusqu'à x = 1:

$$\int \frac{x^4 \partial x}{1 + xx} = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{2}{2 \cdot 7} P + \frac{4}{2 \cdot 9} P + \frac{6}{2 \cdot 11} P + \text{ etc.} = \alpha$$

et par conséquent

$$s = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{2}{2 \cdot 7} P + \frac{4}{2 \cdot 9} P + \frac{6}{2 \cdot 11} P + \text{etc} \right].$$
ou bien $s = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2} \alpha$.

§. 10. La seule contemplation de cette série fait connoître que ses termes décroissent très-rapidement. Pour nous assurer cependant plus complettement de sa plus grande convergence, comparativement avec la série proposée, nous allons calculer un même nombre de termes de l'une et de l'autre, et nommément les huit premiers de chacune. Voici le calcul:

80	èriè	proposée :
$\frac{1}{1 \cdot 3}$	=	0,3333333
$\frac{1}{5 \cdot 7}$	=	0,0285714
9.11		0,0101010
1 3.15	=	0,0051282
17.19		0,0030960
1 21,23	=	0, 0020704
1 25.27	=	0,0014814
$\frac{1}{29.31}$	=	0,0011123
S	=	0,3848940
Or $\frac{7}{8}$	=	0,3926991
faute	=	0,0078051

Sécie transformée:
$$\frac{1}{2 \cdot 5} = 0.10000000$$

$$\frac{2}{2 \cdot 7} P = 0.0142857$$

$$\frac{4}{2 \cdot 9} P = 0.0031746$$

$$\frac{6}{2 \cdot 11} P = 0.0008658$$

$$\frac{8}{2 \cdot 13} P = 0.0002664$$

$$\frac{10}{2 \cdot 15} P = 0.0000313$$

$$\frac{12}{2 \cdot 17} P = 0.0000313$$

$$\frac{14}{2 \cdot 19} P = 0.0000115$$

$$\alpha = 0.1187241$$

$$\frac{1}{2} \alpha = 0.0593620$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = 0.3333333$$

$$S = 0.3926991$$
faute = 0.0000038.

Ce calcul nous fait voir qu'en additionnant les huit premiers termes de la série proposée, nous arrivons à une somme qui est déjà fautive dans les millièmes parties, et qu'en additionnant les huit premiers termes de la série transformée, la faute n'est que dans les millionnièmes. De plus cette seconde série a encore l'avantage d'ètre bien plus facile à calculer, parceque chaque terme se déduit de celui qui le précède.

RECHERCHES

SUR LA SÉRIE GÉNÉRALE:

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \text{etc.}$$

§. 11. Après avoir expédié, dans les paragraphes précédens, la série numerique, le chemin se trouve tout frayé pour la série

générale, à laquelle il nous sera facile àprésent d'appliquer notre méthode, soit pour trouver la formule sommatrice générale, soit pour en assigner l'intégrale complète, soit enfin pour transformer la série en une autre plus convergente, pour les cas qui n'admettroient pas une intégrale d'une forme assez commode pour le calcul numérique.

§. 12. Pour cet effet désignons la somme de la série proposée par la lettre S, de sorte que

$$\frac{1}{b(b+d)} + \frac{1}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{1}{(b+4d)(b+5d)} + \text{etc.} = \frac{S}{a}$$

Décomposons chaque terme de cette série en ses deux fractions partielles, et nous aurons

$$\frac{dS}{a} = \begin{cases} \frac{1}{b} + \frac{1}{b+2d} + \frac{1}{b+4d} + \frac{1}{b+6d} + \text{ete.} \\ -\frac{1}{b+d} - \frac{1}{b+3d} - \frac{1}{b+5d} - \frac{1}{b+7d} - \text{etc.} \end{cases}$$

§. 13. Transformons maintenant en série la fraction + x ... pour avoir

$$\frac{1}{1+x^d} = \begin{cases} 1 + x^{2d} + x^{4d} + x^{6d} + \text{etc.} \\ -x^d - x^{3d} - x^{5d} - x^{7d} - \text{etc.} \end{cases}$$

ce qui, multiplié par
$$x^{b-1} \partial x$$
, nous donne
$$\frac{x^{b-1} \partial x}{1+x^d} = \begin{cases} x^{b-1} \partial x + x^{b+2d-1} \partial x + x^{b+4d-1} \partial x + \text{etc.} \\ -x^{b+d-1} \partial x + x^{b+3d-1} \partial x - x^{b+5d-1} \partial x - \text{etc.} \end{cases}$$

et en prenant les intégrales on arrive

$$\int \frac{x^{b-1} \partial x}{1+x^{d}} = \begin{cases} \frac{x^{b}}{b} + \frac{x^{b+2} d}{b+2d} + \frac{x^{b+4} d}{b+4d} + \text{etc.} \\ \frac{x^{b+d}}{b+d} - \frac{x^{b+3} d}{b+3d} - \frac{x^{b+5} d}{b+5d} - \text{etc.} \end{cases}$$

Ici nous voyons que les intégrales évanouissent en mettant x = 0; les étendant de là jusqu'à x = 1 nous aurons

$$\int \frac{x^{b-1}\partial x}{1+x^{d}} \begin{bmatrix} \det x = 0 \\ a = 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} +\frac{1}{b} + \frac{1}{b+2d} + \frac{1}{b+4d} + \frac{1}{b+6d} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{b+4} - \frac{1}{b+3d} - \frac{1}{b+5d} - \frac{1}{b+7d} - \text{etc.} \end{cases}$$

Ansi nous sommes arrivés à la formule sommatoire générale de rotre serie proposée; car les deux séries que nous venons de trouver, prises ensemble, ont pour somme $\frac{dS}{a}$ (§. 12.), et cette même somme étant aussi $=\int \frac{x^{b-1}dx}{1+x^d} \begin{bmatrix} dex = 0 \\ ax = 1 \end{bmatrix}$, il est évident que $S = \frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \text{etc.} = \frac{a}{d} \int \frac{x^{b-1}\partial x}{1+x^d}$.

lorsque les intégrales sont prises depuis le terme $x \equiv 0$ jusqu' au terme $x \equiv 1$.

§. 14. Eclaircissons ceei par quelques exemples propres à faire voir tant la vérité que les avantages de cette sómmation générale. Soit d'abord $b \equiv d$, et la somme de la série:

$$\frac{a}{d \cdot 2} d + \frac{a}{3d \cdot 4} d + \frac{a}{5d \cdot 6d} + \frac{a}{7d \cdot 8d} + \text{etc.}$$

sera exprimée ainsi:

$$S = \frac{a}{d} \int \frac{x^d - 1}{1 + x^d} \begin{bmatrix} de \cdot x = 0 \\ \hat{a} \cdot x = 1 \end{bmatrix}.$$

Or mettant $1 + x^d = z$, on aura $dx^{d-1}\partial x = \partial z$ et

$$\frac{a}{d} \int \frac{x^{d-1} \partial x}{1+x^{d}} = \frac{a}{dd} \int \frac{\partial z}{z} = \frac{a}{dd} lz + C, \text{ c'est à dire}$$

$$\frac{a}{d} \int \frac{x^{d-1} \partial x}{1+x^{d}} = l \left(1+x^{d}\right) + C,$$

où la constante C devient zéro, en mêttant x = 0. En mettant donc x = 1 on obtient

$$S = \frac{a}{d} \int \frac{x^d - 1}{1 + x^d} \left[\begin{array}{c} de \ x = 0 \\ a \ x = 1 \end{array} \right] = \frac{a}{dd} 12,$$

c'est-à-dire la série proposée devient

$$\frac{a}{dd} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \text{etc.} \right] = \frac{6}{dd} \cdot l \, 2_{8}$$

dont la vérité saute aux yeux, parceque

$$12 = \begin{cases} -1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \text{etc.} \end{cases}$$

et par conséquent

$$12 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{1.8} + \text{etc.}$$

§. 15. Soit d = 2b, et la série proposée prendra cette forme :

$$\frac{a}{b \cdot 3b} + \frac{a}{5b \cdot 7b} + \frac{a}{9b \cdot 11b} + \frac{a}{13b \cdot 15b} + \text{etc.}$$

et sa somme sera

$$S = \frac{a}{2b} \int \frac{x^b - 1}{1 + x \cdot b} \begin{bmatrix} de \ x = 0 \\ \hat{a} \ x = 1 \end{bmatrix}.$$

Mais mettant $x^b \equiv z$ on aura $x^{b-1} \partial x \equiv \frac{\partial z}{\partial b}$ et $1 + x^{2b} \equiv 1 + zz$, donc $\int \frac{x^b - 1 \partial x}{1 + x^{2b}} = \frac{1}{b} \int \frac{\partial z}{1 + zz} = \frac{1}{b} \Lambda \cdot \text{tg. } z + C$,

c'est - à - dire

$$\int \frac{x^{b-1} \partial x}{1+x^{2b}} = \frac{t}{b} A. \text{ tg. } a^{b} + C,$$

où la constante C peut être omise, parceque l'intégrale devient zéro, en mettant $x \equiv 0$. Mettant donc $x \equiv 1$ on aura

$$S = \frac{a}{2bb}$$
 A. tg. $I = \frac{\pi a}{8bb}$.

Voyons ce que donnera la série qu'on peut d'abord mettre sous cette forme :

$$\frac{a}{bb}\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \text{etc.}\right].$$

Mais novs avons vu au §. 5. que

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} = \text{etc.} \frac{\pi}{3}$$

donc il est évident que

$$\frac{a}{b \cdot 3b} + \frac{a}{5b \cdot 7b} + \frac{a}{9b \cdot 11b} + \frac{a}{13b \cdot 15b} + \text{etc.} = \frac{\pi a}{8bb}$$

§. 16. Soit d = 4b, et la série proposée prendra cette forme :

$$\frac{a}{b.5b} + \frac{a}{9b.13b} + \frac{a}{17b.21b} + \frac{a}{25b.29b} + \text{etc.},$$

et sa somme s'exprimera ainsi:

$$S = \frac{a}{4b} \int \frac{x^b - 1}{1 + x^{4b}} \begin{bmatrix} \operatorname{de} x = 0 \\ \hat{a} x = 1 \end{bmatrix},$$

ou bien, en mettant $x^b \equiv z$, ainsi:

$$S = \frac{a}{4b^2} \int \frac{\partial z}{1+z^4} \begin{bmatrix} \det z = 0 \\ \lambda z = 1 \end{bmatrix}.$$

Quoique cette intégrale seroit facile à trouver, nous ne nous y arrêterons pas, préférant de chercher l'intégrale de notre formule générale $\int \frac{x^{b-1} dx}{1+x^d} \begin{bmatrix} de x = 0 \\ 2x = 1 \end{bmatrix}$, laquelle étant trouvée, on pourra en déduire notre cas présent, aussi bien que tous les autres, pour des valeurs de a, b et d quelconques.

§. 17. Pour cet effet nous ferons usage de l'intégrale absolue et non-limitée qu'*Euler* a donnée de cette formule dans le Chapitre I. du Tome I de ses *Instit. Calc. integralis*, laquelle, en y mettant x = 1, et après y avoir fait quelques réductions assez faciles, fondées sur ce que $\sqrt{2-2\cos\alpha} = 2\sin\frac{\pi}{2}\alpha$ et

A tg
$$\frac{\sin \alpha}{1-\cos \alpha}$$
 $=$ A . tg. cot. $\frac{\alpha}{2}$ $=$ $\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\alpha}{2}$,

prendra cette forme pour les termes d'intégration établis ici, c'està-dire depuis $x \equiv 0$ jusqu'à $x \equiv 1$:

$$\int \frac{x^{b-1} dx}{1+x^{d}} = \begin{cases} +\frac{\pi(d-1)}{dd} \sin. \frac{b\pi}{d} - \frac{2}{d} \cos. \frac{b\pi}{d} l \cdot 2 \sin. \frac{\pi}{2d} \\ +\frac{\pi(d-3)}{dd} \sin. \frac{3b\pi}{d} - \frac{2}{d} \cos. \frac{3b\pi}{d} l \cdot 2 \sin. \frac{3\pi}{2d} \\ +\frac{\pi(d-5)}{dd} \sin. \frac{5b\pi}{d} - \frac{2}{d} \cos. \frac{5b\pi}{d} l \cdot 2 \sin. \frac{5\pi}{2d} \\ +\frac{\pi(d-\lambda)}{dd} \sin. \frac{\lambda b\pi}{d} - \frac{2}{d} \cos. \frac{\lambda b\pi}{d} l \cdot 2 \sin. \frac{\lambda \pi}{2d} \\ +\frac{1}{d} l \cdot 2. \end{cases}$$

Dans cette expression finie λ indique le plus grand nombre impair plus petit que d, et le dernier terme $\frac{1}{d}l^2$ ne s'ajoute que dans les cas où d est un nombre impair; avec le signe $\frac{1}{d}l^2$, lorsque l0 est un nombre impair; avec le signe l1, lorsque l2 est un nombre pair.

§. 18. D'après ce que nous venons d'exposer la somme de notre série générale proposée sera exprimée ainsi:

$$S = \frac{2a}{dd} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\pi(d-1)}{2d} \sin \frac{b\pi}{d} - \cos \frac{b\pi}{d} l \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2d} \\ + \frac{\pi(d-3)}{2d} \sin \frac{3b\pi}{d} - \cos \frac{3b\pi}{d} l \cdot 2 \sin \frac{3\pi}{2d} \\ + \frac{\pi(d-5)}{2d} \sin \frac{5b\pi}{d} - \cos \frac{5b\pi}{d} l \cdot 2 \sin \frac{5\pi}{2d} \\ - \frac{\pi(d-\lambda)}{2d} \sin \frac{\lambda b\pi}{d} - \cos \frac{\lambda b\pi}{d} l \cdot 2 \sin \frac{\lambda \pi}{2d} \\ + \frac{\pi(d-\lambda)}{2d} \sin \frac{\lambda b\pi}{d} - \cos \frac{\lambda b\pi}{d} l \cdot 2 \sin \frac{\lambda \pi}{2d} \\ + \frac{1}{2} l \cdot 2 \end{array} \right\}.$$

Il est évident que cette expression sera plus ou moins simple, plus ou moins facile à calculer, selon les valeurs de b et d de la série; et qu'il y a une infinité de cas où elle se simplifie et se réduit à un assez petit nombre de termes. Dans les cas contraires il peut arriver que le calcul se fera plus avantageusement d'après la série convergente, dans laquelle nous allons transformer la proposée, après avoir éclairci par quelques exemples l'usage de la formule ci-dessus rapportée.

§. 19. Pour cet effet nous donnerons une valeur déterminée numérique à d, en mettant $d \equiv 2$ et laissant a et b indéterminées. La série prendra cette forme :

$$\frac{a}{b(b+2)} + \frac{a}{(b+4)(b+6)} + \frac{a}{(b+8)(b+10)} + \text{etc.}$$

et sa somme sera exprimée ainsi:

$$S = \frac{a}{2} \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & \sin \theta & \frac{b\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \cos \theta & \frac{b\pi}{2} \end{bmatrix} \cdot l \cdot \sqrt{2}$$

Que si nous mettons ici $b \equiv 1$, nous aurons:

$$\frac{a}{1\cdot 3} + \frac{a}{5\cdot 7} + \frac{a}{9\cdot 11} + \frac{a}{13\cdot 15} + \text{etc.} = \frac{a\pi}{8}$$

sommation dont la vérité a déjà été démontrée au \S . 5. En mettant b = 2, nous aurons:

$$\frac{a}{2.4} + \frac{a}{6.8} + \frac{a}{12.12} + \frac{a}{14.16} + \text{ etc.} = \frac{a}{2} \cdot l \sqrt{2}$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\frac{a}{1+2} + \frac{a}{3+4} + \frac{a}{5+6} + \frac{a}{7+5} + \text{cte.} \equiv a \ l \ 2$$
,

dont la vérité a déjà été prouvée au §. 14.

§. 20. Prenons d=3, et notre série prendra cette forme :

$$\frac{a}{b(b+3)} + \frac{a}{(b+6)(b+9)} + \frac{a}{(b+12)(b+15)} + \text{etc.}$$

dont la somme se trouvera exprimée ainsi:

$$S = \frac{2a}{9} \left[\frac{\pi}{3} \sin \frac{b\pi}{3} + \frac{1}{2} l 2 \right].$$

En mettant ici b = 1, on obtient la sommation suivante :

$$\frac{a}{1.4} + \frac{a}{7.10} + \frac{a}{13.16} + \frac{a}{19.22} + \text{etc.} = \frac{2a}{9} \left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} l 2 \right].$$

En mettant b = 2, on obtient celle-ci:

$$\frac{a}{2.5} + \frac{a}{5.11} + \frac{a}{14.17} + \frac{a}{20.23} + \text{etc.} = \frac{2a}{9} \left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} l 2 \right].$$

En mettant $b \equiv 3$, on aura

$$\frac{a}{3.6} + \frac{a}{9.12} + \frac{a}{15.18} + \frac{a}{21.24} + \text{ etc.} = \frac{a12}{9}$$

laquelle se reduit à

$$\frac{1}{1,2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 8} + \text{etc.} = 12$$

sommation connue et démontrée au §. 14. Quant aux deux precédentes:

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{13.16} + \frac{1}{19.22} + \text{etc.} = \frac{2}{6} \left[\frac{\pi}{2V_3} + \frac{1}{2} l 2 \right]$$

$$\frac{1}{2.5} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{14.17} + \frac{1}{20.23} + \text{etc.} = \frac{2}{9} \left[\frac{\pi}{2V_3} - \frac{1}{2} l 2 \right];$$

on pourra facilement s'assurer de leur vérité; en les présentant sous cette forme:

A)
$$\left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{10} + \frac{1}{25} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20} - \frac{1}{20} - \frac{1}{20} - \text{etc.} \end{array} \right\} = \frac{2}{3} \left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} l \cdot 2 \right].$$

B)
$$\left\{ -\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \text{etc.}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{17} - \frac{1}{21} - \frac{1}{20} - \text{etc.}} \right\} = \frac{2}{3} \left[\frac{\pi}{273} - \frac{1}{2} 72 \right].$$

Leur somme A + B fournit

$$\frac{1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \text{etc.}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{10} + \text{etc.}} = \frac{2\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Or nous savons que la première de ces deux séries a pour somme $\frac{\pi}{2\sqrt[3]{3}}$ et l'autre $\frac{\pi}{6\sqrt[3]{3}}$ (Euleri Introd. in Anal. inf. p. 139 et 138); ainsi leur somme sera $\frac{2\pi}{3\sqrt[3]{3}}$. La différence A — B fournit:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \text{etc.} = + \frac{212}{\sqrt{3}}$$

Or nous savons que

par conséquent, en ôtant la seconde série de la première, il est évident que

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \text{etc.} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{3}.$$

§. 21. Reprenons le cas d = 4b, commencé ci-dessus (§. 16), et pour l'achever observons que

$$\int_{\frac{1}{1+z^{4}}} \left[\begin{array}{c} \det z = 0 \\ a z = 1 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} +\frac{3\pi}{5} \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{1} l \cdot 2 \sin \frac{\pi}{5} \\ +\frac{\pi}{8} \sin \frac{3}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} l \cdot 2 \sin \frac{\pi}{5} \end{array} \right\}$$

et que partant la somme de la série

$$\frac{a}{bb}\left[\frac{1}{1.5} + \frac{1}{9.13} + \frac{1}{17.21} + \frac{1}{25.29} + \text{ctc.}\right],$$

à cause de sin. $\frac{\pi}{4} \equiv \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{V_2}$ et sin. $\frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{V_2}$, sera exprimée uinsi:

$$S = \frac{a}{8 bb} \left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right/ \frac{\sin \frac{3\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} \right],$$

ou bien, à cause de sin. $\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2+1}}{2\sqrt{2}}}$ et sin. $\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2-1}}{2\sqrt{2}}}$,

$$S = \frac{\alpha}{8bb} \left[\frac{\pi}{2V_2} + \frac{\tau}{2V_2} l \frac{v'_2 + \tau}{V_2 - \tau} \right],$$

ou bien ensin, à cause de $\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}} = \frac{(\sqrt{2+1})^2}{1}$,

$$S = \frac{a}{8bb} \left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} l \left(\sqrt{2 + 1} \right) \right].$$

- §. 22. Le programme de la société Royale exigeoit des deux choses l'une: ou qu'on cherche la formule sommatoire générale de la série, ou que du moins on fasse voir comment elle peut être transformée en une autre série qui soit plus convergente. Nous venons de remplir la premiere condition dans toute sa plénitude; mais nous allons satisfaire aussi à la seconde, en cherchant une série assez convergente, au moyen de laquelle on puisse trouver la somme de la proposée avec plus de facilité dans les cas, où l'expression du §. 18. devient trop compliquée pour le calcul numérique. Nous nous servirons de la même méthode que nous avons employée au §. 9. pour la série numérique, et dont nous avons prouvé les avantages au §. 10, en faisant voir la convergence bien plus grande de la série obtenue par la transformation.
- §. 23. Ayant fait voir au §. 13. que la somme de notre série s'exprime ainsi:

$$S = \frac{a}{d} \int \frac{x^b - i \, \partial x}{1 + x^d} \left[\begin{array}{c} \operatorname{de} x = 0 \\ \hat{a} \ x = 1 \end{array} \right],$$

il s'agit maintenant de transformer la valeur de cette intégrale en une série plus convergente que la proposée. Pour arriver à ce but j'observe que

$$\int \frac{x^{b-1} \partial x}{1+x^{d}} = \frac{1}{2} \int \frac{x^{b-1} \partial x}{1-\frac{1}{2}(1-x)^{d}}.$$

Or comme la fraction

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}(1 - x^d)} = 1 + \frac{1}{2}(1 - x^d) + \frac{1}{4}(1 - x^d)^2 + \frac{1}{8}(1 - x^d)^3 + \text{etc.}$$

notre formule intégrale sera exprimée ainsi:

$$\int \frac{x^{b}-1}{1+x^{d}} \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{2} \int x^{b}-1 \frac{\partial x}{\partial x} \left[1+\frac{1}{2}(1-x^{d})+\frac{1}{4}(1-x^{d})^{2}+\frac{1}{8}(1-x^{d})^{3}+\text{etc.}\right].$$

§. 24. En prenant les intégrales depuis x = 0 jusqu'à x = 1, nous aurons :

$$\frac{1}{2} \int x^{b-1} \, \partial x = \frac{1}{2b};$$

$$\frac{1}{4} \int x^{b-1} \, (1 - x^d) \, \partial x = \frac{1 \cdot d}{4b(b+d)};$$

$$\frac{1}{8} \int x^{b-1} \, (1 - x^d)^2 \, \partial x = \frac{2d^2}{8b(b+d)(b+2d)};$$

$$\frac{1}{16} \int x^{b-1} \, (1 - x^d)^3 \, \partial x = \frac{6d^3}{16b(b+d)(b+2d)(b+3d)};$$

$$\frac{1}{32} \int x^{b-1} \, (1 - x^d)^4 \, \partial x = \frac{24d^4}{3^2b(b+d)(b+2d)(b+3d)(b+4d)};$$
etc.

etc.

ou bien, en indiquant par P chaque valeur immédiatement précédente, les mèmes intégrales seront exprimées ainsi:

$$\frac{1}{2} \int x^{b-1} \, \partial x = \frac{1}{2b}$$

$$\frac{1}{4} \int x^{b-1} \, (1-x^d) \, \partial x = \frac{1 \cdot d}{2(b+b)} \, P;$$

$$\frac{1}{8} \int x^{b-1} \, (1-x^d)^2 \, \partial x = \frac{2 \cdot d}{2(b+2d)} \, P;$$

$$\frac{1}{10} \int x^{b-1} \, (1-x^d)^3 \, \partial x = \frac{3 \cdot d}{2(b+3d)} \, P;$$

$$\frac{1}{32} \int x^{b-1} \, (1-x^d)^4 \, \partial x = \frac{4 \cdot d}{2(b+4d)} \, P.$$
etc.

etc.

§. 25. En substituant ces valeurs à la place des intégrales dans l'expression trouvée à la fin du §. 23, nous obtiendrons :

$$S = \frac{a}{d} \left[\frac{1}{2b} + \frac{d}{2(b+d)} P + \frac{2d}{2(b+2d)} P + \frac{3d}{2(b+3d)} P + \text{etc.} \right],$$

série dont ouvertement chaque terme est plus de deux fois plus grand que son précédent et qui, par conséquent, est incomparablement, plus convergente que la proposée, et cette convergence devient d'autant plus petite dans la proposée, et d'autant plus grande dans la transformée, plus que le nombre b sera grand.

§. 26. Quoique nous ayons déjà fait voir au §. 10. l'avantage de cette transformation, par l'exemple de la série numérique du programme, nous l'appliquerons encore à une autre série, dont la somme seroit pénible à calculer au moyen de la sommation générale du §. 18. Nous mettrons b = 11 et d = 10, pour avoir la série:

$$\frac{a}{11.21} + \frac{a}{31.41} + \frac{a}{51.61} + \frac{a}{71.81} + \text{etc.}$$

ct nous calculerons sa somme d'après la serie du §. précédent, qui devient dans ce cas:

$$S = \frac{a}{10} \left[\frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{10}{2 \cdot 21} P + \frac{20}{2 \cdot 31} P + \frac{30}{2 \cdot 41} P + \text{etc.} \right].$$

Voici le calcul:

$$\frac{1}{2.11} = 0,045454$$

$$\frac{10}{2.21} P = 0,010822$$

$$\frac{20}{2.31} P = 0,003491$$

$$\frac{30}{2.41} P = 0,001277$$

$$\frac{40}{2.51} P = 0,000500$$

$$\frac{50}{2.61} P = 0,000205$$

$$\frac{60}{2.71} P = 0,000086$$

$$\frac{70}{2.81} P = 0,000037$$

$$\frac{80}{2.91} P = 0,000007$$

$$0.061895.$$

§. 27. On obtient une série encore plus convergente, en représentant la proposée ainsi:

$$S = \frac{a}{b(b+d)} + \Sigma$$

et transformant d'après la même méthode, employée aux §§. 23, 24 et 25, la série

$$\Sigma = \frac{\alpha}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{\alpha}{(b+4d)(b+5d)} + \frac{\alpha}{(b-6d)(b+7d)} \text{ etc.}$$

Pour cet effet on multiplie

$$\frac{1}{1+x^d} = \begin{cases} 1 + x^{2d} + x^{4d} + x^{6d} + x^{3d} + \text{etc.} \\ -x^d - x^{3d} - x^{5d} - x^{7d} - x^{9d} - \text{etc.} \end{cases}$$

par $x^{b+2} d - 1 \partial x$, pour avoir

$$\frac{x^{b+2d-1}\partial x}{1+x^{d}} = \begin{cases} x^{b+2d-1}\partial x + x^{b+4d-1}\partial x + x^{b+6d-1}\partial x + \text{etc.} \\ -x^{b+3d-1}\partial x - x^{b+5d-1}\partial x + x^{b+7d-1}\partial x - \text{etc.} \end{cases}$$

et en prenant les intégrales depuis $x \equiv 0$ jusqu'à $x \equiv 1$, on aura

$$\int \frac{x^{b+2d-1}\partial x}{1+x^{d}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{b+2d} + \frac{1}{b+4d} + \frac{1}{b+6d} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{b+3d} - \frac{1}{b+5d} - \frac{1}{b+7d} - \text{etc.} \end{array} \right.$$

d'où l'on voit que

$$\frac{1}{d} \int_{\frac{1+x^d}{1+x^d}}^{\frac{b+2d-1}{d}x} \left[\frac{de \ x = 0}{a \ x = 1} \right] = \frac{\Sigma}{a},$$

et par conséquent

$$\sum = \frac{a}{d} \int \frac{x^b + 2 d - \tau}{1 + x^d} \left[\frac{de \ x}{a} = 0 \right].$$

§: 28. Que si nous multiplions la fraction:

$$\frac{1}{1+x^d} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1-x^d)} = 1 + \frac{1}{2}(1-x^d) + \frac{1}{4}(1-x^d)^2 + \frac{1}{3}(1-x^d)^3 + \text{etc.}$$

$$\text{par } x^b + \frac{1}{2} d = 1 \text{ } \partial x \text{ et que nous prenons les intégrales depuis } x = 0$$

$$\text{jusqn'à } x = 1, \text{ nous aurons}$$

$$\sum \frac{d}{d} \left[\frac{1}{(b+2d)} + \frac{dP}{2(b+3d)} + \frac{2dP}{2(b+4d)} + \frac{3dP}{2(b+5d)} + \text{etc.} \right]$$
 et par conséquent

$$S = \frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{d} \left[\frac{1}{2(b+d)} + \frac{dP}{2(b+3d)} + \frac{2dP}{2(b+4d)} + \text{etc.} \right]$$
où P indique dans chaque terme le terme précédent.

§ 29. Pour l'exemple du §. 26. nous aurons
$$S = \frac{a}{11-21} + \frac{a}{10} \left[\frac{1}{2\cdot 31} + \frac{10 \text{ P}}{2\cdot 41} + \frac{20 \text{ P}}{2\cdot 51} + \frac{30 \text{ P}}{2\cdot 61} + \text{ etc.} \right]$$
 Voici le calcul jusqu'au 6^{me} terme de la série :

$$\frac{1}{2 \cdot 3^{1}} = 0.016129$$

$$\frac{10 P}{2 \cdot 4^{1}} = 0.001967$$

$$\frac{20 P}{2 \cdot 5^{1}} = 0.000386$$

$$\frac{30 P}{2 \cdot 6^{1}} = 0.000095$$

$$\frac{40 P}{2 \cdot 7^{1}} = 0.0000027$$

$$\frac{50 P}{2 \cdot 8^{1}} = 0.000008$$

$$0.018012$$

$$\sum_{1,21} = 0.0018612$$

$$\frac{1}{2 \cdot 2^{1}} = 0.00043290$$

$$\frac{5}{4} = 0.0061902$$

La valeur S, qui en résulte, ne diffère de celle du §. 26. que de 7 dixmillionnièmes parties.

Ainsi les six premiers termes nous donnent ici par un calcul, rendu très aisé au moyen des P, la somme cherchée de la série $\frac{s}{a} = 0,0061902$ juste jusqu'aux parties millionnièmes inclusivement. Il est bon d'observer que la proposée est si peu convergente, que la différence entre le 2^d et 1^r terme n'excède pas $\frac{1}{132}$, et qu'entre le 6^{me} et 5^{me} elle n'excède pas $\frac{1}{29000}$.

§. 30. Les recherches instituées ici dans la vue de trouver la formule sommatrice de la série générale proposée, d'assigner l'intégrale finie de cette formule, et de transformer la série proposée en une autre plus convergente, m'ont fourni encore plusieurs autres résultats neufs et intéressans; mais comme la question proposée se bornoit à l'alternative du premier et troisième des objets mentionnés, je me suis abstenu de grossir le présent mémoire par des horsd'oeuvres, qui seront mieux à leur place dans un autre mémoire que je me propose de présenter à l'Académie à la suite de celui-ci.



SUPPLEMENTUM

AD DISSERTATIONEM MEAM:

· INVESTIGATIO TERMINORUM SERIEI

EX DATIS PRODUCTIS TERMINORUM CONTIGUORUM,

AUCTORE

N. F U S S.

Conventui exhibuit die 30 Oct. 1816.

§. 1. In memorata dissertatione, Tomo VI novissimorum Academiae Commentationum (Mémoires de l'Académie) inserta, tradidi completam solutionem problematis pro binis et ternis terminis contiguis, quorum producta sunt data, facta quoque applicatione methodi adhibitae ad scries geometricas et hypergeometricas. Reliquos casus, pro productis ex quaternis, quinis, senis, etc. per inductionem, legitimam quidem, expedivi. Postmodum animadverti, adhibendo signandi modum magis idoneum, omnia methodo non solum faciliori, sed etiam magis directa latiusque patente, absolvi posse, quam igitur in hoc supplemento exposuisse juvabit.

Problema 1.

§. 2. Invenire seriem numerorum a, b, c, d, etc. ex datis binorum contiguorum productis ab = (1), bc = (2), cd = (3). de = (4), etc.

Solutio.

Cum sit $\frac{c}{a} = \frac{(2)}{(1)}$, ideoque $c = a\frac{(2)}{(1)}$, eodem modo invenitur $d = b\frac{(3)}{(2)}$, porro

$$e = c \xrightarrow{(4)} = a \xrightarrow{(2)} \cdot \xrightarrow{(4)} g = a \xrightarrow{(2)} \cdot \xrightarrow{(4)} \cdot \xrightarrow{(5)} f = d \xrightarrow{(5)} = b \xrightarrow{(3)} \xrightarrow{(5)} \cdot \xrightarrow{(5)} h = b \xrightarrow{(3)} \cdot \xrightarrow{(5)} \cdot \xrightarrow{(7)} h = b \xrightarrow{(1)} \cdot \xrightarrow{(4)} \cdot \xrightarrow{(6)}$$

hocque modo omnes termini seriei per binos primos a et b definiuntur.

Quod si igitur series, in infinitum continuata, habeat terminos aequales, inde a et b, ideoque et reliqui, determinari poterunt. Si enim termini infinitesimi fucrint aA et bB, his aequalibus positis erit $\frac{B}{A} = \frac{a}{b}$. Est vero $b = \frac{(t)}{a}$, ideoque $\frac{B}{A} = \frac{a^2}{(1)}$, sive $a^2 = (1) \frac{B}{A}$, quocirca, ob

$$B = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{6}{6} \cdot \binom{6}{8} \cdot \binom{11}{6} \cdot \binom{11}{6}}{\binom{10}{6}} \text{ etc.}$$

$$A = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{1}{1}} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{3}{1}} \cdot \frac{\binom{6}{1}}{\binom{5}{1}} \cdot \frac{\binom{8}{1}}{\binom{7}{1}} \cdot \frac{\binom{10}{10}}{\binom{9}{10}} \text{ etc.}$$

nanciscimur sequentem valorem:

$$a^2 = (1) \frac{(1)(3)}{(2)(2)} \cdot \frac{(3)(5)}{(4)(4)} \cdot \frac{(5)(7)}{(6)(6)} \cdot \frac{(7)(9)}{(8)(8)}$$
, etc.

qui convenit cum illo quem §. 5. prioris dissertationis inveneram. Simili prorsus modo naneiscimur:

$$b^{2} = (2) \frac{(2)(4)}{(3)(3)} \cdot \frac{(4)(6)}{(5)(5)} \cdot \frac{(6)(8)}{(7)(7)} \cdot \text{etc.}$$

$$c^{2} = (3) \frac{(3)(5)}{(4)(4)} \cdot \frac{(5)(7)}{(6)(6)} \cdot \frac{(7)(9)}{(8)(8)} \cdot \text{etc.}$$

$$d^{2} = (4) \frac{(4)(6)}{(5)(5)} \cdot \frac{(6)(8)}{(7)(7)} \cdot \frac{(8)(10)}{(9)(9)} \cdot \text{etc.}$$

Corollarium.

§. 3. Hae expressiones autem, ut jam innuimus, tum tantum locum habebunt, quando termini seriei (1), (2), (3), etc, in infinitum continuatae, ad aequalitatem tendunt; si enim seriem divergentem, sive geometricam, sive hypergeometricam constituant, quaestio peculiarem requirit solutionem, quam in sequenti paragrapho exhibebimus.

Problema 2.

§. 4 Invenire seriem numerorum a, b, c, d, etc. ex datis binorum

contiguorum productis, (1), (2), (3), etc. quando termini in infinitum continuati non sunt aequales.

Solutio.

Analysis instituatur ut ante, hoc tantum discrimine, quod termini infinitesimi non amplius aequales sunt statuendi, quippe ad progressionem geometricam tendentes. Ita positis terminis infinitesimis aA et bB, cum non sit $bB \equiv aA$, statuatur $bB \equiv aAp$, ita ut $abB \equiv a^2Ap$, atque ob $ab \equiv (1)$ erit $a^2 \equiv (1)\frac{B}{Ap}$, quod a valore pro a^2 in problemate praecedente invento: $a^2 \equiv \frac{B}{A}$, tantum in eo differt, quod hic accesserit factor $\frac{I}{p}$, qui, si in praecedentes ita transferatur, ut debitum locum obtineat, valori a^2 dabit hanc formam:

$$a^2 = \frac{(1)}{(2)} \cdot \frac{(1)(3)}{(2)(4)} \cdot \frac{(3)(5)}{(4)(6)} \cdot \frac{(5)(7)}{(6)(8)}$$
 etc.

Similique modo erit:

$$b^2 = \frac{\binom{2}{3}}{\binom{3}{3}} \cdot \frac{\binom{2}{3}\binom{4}{5}}{\binom{3}{5}\binom{5}{7}} \cdot \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{5}}{\binom{7}{7}} \cdot \frac{\binom{6}{3}\binom{8}{5}}{\binom{7}{9}} \cdot \text{etc.}$$

et ita porro pro c^2 , d^2 , etc. secundum legem jam satis manifestam.

Problema 3.

§. 5. Invenire seriem numerorum a, b, c, d, etc., ex datis ternorum contiguorum productis, scil. abc = (1), bcd = (2), cde = (3), etc.

Solutio.

Si calculus ut in problemate primo instituatur, termini seriei secundum a, b, c, ita procedent:

$$a, a \stackrel{(2)}{(1)}, a \stackrel{(2)}{(1)} \stackrel{(5)}{(4)}, a \stackrel{(2)}{(1)} \stackrel{(5)}{(4)} \stackrel{(8)}{(1)}, \text{ etc.}$$
 $b, b \stackrel{(3)}{(2)}, b \stackrel{(3)}{(2)} \stackrel{(6)}{(5)}, b \stackrel{(3)}{(2)} \stackrel{(6)}{(5)} \stackrel{(9)}{(5)}, \text{ etc.}$
 $c, c \stackrel{(4)}{(3)}, c \stackrel{(4)}{(3)} \stackrel{(7)}{(6)}, c \stackrel{(4)}{(3)} \stackrel{(7)}{(6)} \stackrel{(10)}{(9)}, \text{ etc.}$

eruntque postremi hujus ternionis termini:

$$a \stackrel{(2)}{\stackrel{(1)}{\stackrel{(2)}{\stackrel{(3)}}{\stackrel{(3)}{\stackrel{(3)}}{\stackrel{(3)}{\stackrel{(3)}}{\stackrel{(3)}}{\stackrel{(3)}}{\stackrel{(3)}{\stackrel{(3)}}}\stackrel{(3)}}{\stackrel{(3)}}{\stackrel{(3)}}{\stackrel{(3)}}}\stackrel{(3)}}{\stackrel{(3)}}$$

pro quorum primo terminus sequens est $aA \frac{(3n-5)}{(3n-4)}$, et nunc, sumte n infinito, duo casus sunt distinguendi.

Casus I.

Sit $\frac{(3n+5)}{(3n+4)} = 1$, et omnes illi termini aA, bB, cC, erunt aequales, unde concluditur fore $b = \frac{aA}{B}$ et $c = \frac{aA}{C}$; quorum productum, per a multiplicatum, suppeditat aequationem:

$$abc = (1) = \frac{a^3 A A}{BC},$$

ex qua sequitur fore $a^3 \equiv (1) \frac{BC}{AA}$. Si vero ad postremos modo factores spectemus, quoniam est

$$AA = \frac{(2n+2)^2}{(3n+1)^2}$$
 et $BC = \frac{(2n+4)}{(3n+2)}$

hinc intelligitur fore:

$$a^{3} = (1) \frac{(3n+1)^{2}(3n+4)}{(3n+2)^{3}}.$$

Eodem prorsus modo, ob $c = \frac{bB}{C}$ et $d = \frac{bB}{D}$, habebinus:

$$b c d = (2) = \frac{b^3 B B}{C D}$$

ideoque $b^3 = (2) \frac{CD}{BB}$, qui valor, ob

B B =
$$\frac{(2n+3)^2}{(3n+2)^2}$$
 et C D = $\frac{(3n+5)}{(3n+3)}$

nobis suppeditat:

$$b^{3} = (2) \frac{(3n+2)^{2}(3n+5)}{(3n+3)^{3}}.$$

Similique modo invenictur

$$c^3 = (3) \frac{(3n+3)^2(3n+6)}{(3n+4)^3}$$

Quodsi nunc loco n successive scribantur numeri 0, 1, 2, 3, etc., prodibit

$$a^{5} = (1) \cdot \frac{(1)^{2}(1)}{(0)^{3}} \cdot \frac{(4)^{2}(7)}{(5)^{3}} \cdot \frac{(7)^{2}(10)}{(8)^{3}} \cdot \text{etc.}$$

$$b^{3} = (2) \cdot \frac{(2)^{2}(5)}{(3)^{3}} \cdot \frac{(5)^{2}(8)}{(6)^{3}} \cdot \frac{(8)^{2}(11)}{(9)^{3}} \cdot \text{etc.}$$

$$c^{2} = (3) \cdot \frac{(3)^{2}(6)}{(4)^{3}} \cdot \frac{(6)^{2}(9)}{(7)^{3}} \cdot \frac{(9)^{2}(12)}{(10)^{3}} \cdot \text{etc.}$$

qui valores persecte congruunt cum illis quos in priore dissertatione exhibuimus.

Casus II.

Sit $\frac{(3n+5)}{(3n+4)} = p$, ita ut terminus ille, postremum ordinis a sequens, sit $a\Lambda p$, qui cum non amplius sit Λa , necesse est ut b B et cC procedant in progressione geometrica, eritque

$$b B \equiv a \Lambda \hat{\gamma} p \text{ et}$$

$$c C \equiv a \Lambda \hat{\gamma} p^2$$

quorum productum, si insuper ducatur in a, dabit

$$abcBC \equiv a^3AAp$$

unde porro concluditur fore

$$a^3 \equiv (1) \frac{BC}{AAP} \equiv (1) \frac{BC}{AA} \cdot \frac{(1n+4)}{(3n+5)}$$

qui valor ab illo casus prioris tantum in hoc discrepat, quod in fine terminus insuper accessit, ita ut sit

$$a^{3} = (1) \frac{(1)^{2}(4)}{(2)^{3}} \cdot \frac{(4)^{2}(7)}{(5)^{3}} \cdot \cdot \cdot \frac{(3n+1)^{2}(3n+4)}{(2n+2)^{3}} \cdot \frac{(3n+4)}{(3n+5)}$$

unde si primi factores singulorum membrorum removeantur in praecedentia, quo factor ille ultimus debitum locum obtineat, crit

$$a^3 = \frac{()^2}{()} \cdot \frac{()(4)^2}{(2)^2(5)} \cdot \frac{(4)(7)^2}{(5)(8)} \cdot \frac{(7)(10)^2}{(8)^2(11)} \cdot \text{etc.}$$

Similique modo invenietur

$$b^{3} = \frac{(2)^{2}}{(3)} \cdot \frac{(2)(5)^{2}}{(3)^{2}(6)} \cdot \frac{(5)(8)^{2}}{(6)^{2}(9)} \cdot \frac{(8)(11)^{2}}{(9)^{2}(2)} \cdot \text{etc.}$$

unde lex progressionis, qua reliqui valores procedunt, jam est perspicua.

Problema 4.

§. 6. Invenire seriem numerorum a, b, c, d, etc. ex datis qua-

ternorum contiguorum productis abcd = (1), bcde = (2), cdef = (3), etc.

Solutio.

Hic igitur termini ordinum a, b, c, d, ita procedent:

$$a, a \stackrel{(2)}{=}, a \stackrel{(2)}{=} \stackrel{(5)}{=}, a \frac{(2)(6)(10)}{(1)(5)(9)}, \text{ etc.}$$

$$b, b \stackrel{(3)}{=}, b \stackrel{(3)}{=}, b \stackrel{(3)}{=}, b \stackrel{(3)}{=}, ctc.$$

$$c, c = \frac{(4)}{(3)}, c = \frac{(4)}{(3)} \frac{(8)}{(7)}, c = \frac{(4)}{(3)} \frac{(8)}{(7)} \frac{(12)}{(11)}, \text{ etc.}$$

$$d, d = \frac{(5)}{(4)}, d = \frac{(5)}{(4)} \frac{(9)}{(8)}, d = \frac{(5)}{(4)} \frac{(9)}{(8)} \frac{(13)}{(12)}, \text{ etc.}$$

eorumque postremi erunt:

$$a \stackrel{(2)}{\underset{(1)}{(5)}} \stackrel{(6)}{\underset{(9)}{(1)}} \stackrel{(14)}{\underset{(12)}{(13)}} = - \cdot \cdot (4^{n} + 2) = a A;$$

$$b = \frac{(3) (7) (11) (15)}{(2) (6) (10) (14)} = \frac{(4\pi + 3)}{(2\pi + 2)} = b B;$$

$$c \frac{(4) (8) (12) (16) - - - (4 n + 4)}{(3) (7) (11) (15) - - - (4 n + 3)} = c C;$$

$$d_{\frac{(5) (4) (13) (17) - - - (4 \pi + 5)}{(4) (8) (12) (16) - - - (4 \pi + 4)}} = dD,$$

quorum sequens in ordine a erit $aP = \frac{(4n+6)}{(4n+5)}$. Prout igitur iste factor $p = \frac{(4n+6)}{(4n+5)}$ fucrit unitati aequalis, vel secus, utrumque casum scorsim evolvemus.

Casus I.

Sit $p \equiv 1$, erit $aA \equiv bB \equiv cC \equiv dD$, ideoque $b \equiv \frac{aA}{B}$, $c \equiv \frac{aA}{C}$, $d \equiv \frac{aA}{D}$, ergo $abcd \equiv (1) \equiv \frac{a^4A^3}{BCD}$

unde adipiscimur

$$a^4 = (1) \frac{B C D}{A^3}$$
.

Cum igitur sit

BCD =
$$\frac{(4n+5)}{(4n+2)}$$
 et $A^3 = \frac{(4n+2)^3}{(4n+1)^3}$,

his valoribus substitutis erit

$$a^{+} = (1) \frac{(4n+1)^{3} (4n+5)}{4n+1+5}$$

Hinc si successive loco n scribantur numeri 0, 1, 2, 3, etc. reperietura $a^4 \equiv (1) \frac{(1)^3 (5)}{(2)^4} \cdot \frac{(5)^3 (9)}{(0)^4} \cdot \frac{(9)^3 (13)}{(10)^4} \cdot \text{ctc.}$

qui valor perfecte congruit cum illo, quem, in priore dissertatione per inductionem derivavimus.

Pro b crit b = c = d = e, hinc $c = \frac{bB}{C}$, $d = \frac{bB}{D}$, $e = \frac{bB}{E}$, ideoque

$$b c d e = (2) = \frac{b^4 B^3}{CDE}$$

ac proinde.

$$b^4 = (2) \frac{\text{CDE}}{\text{B}^3} = (2) \frac{(4n+2)^3(4n+6)}{(4n+3)^4}$$

Hoc igitur modo habebimus:

$$b^{+} \equiv (2) \frac{(2)^{3}(6)}{(3)^{+}} \cdot \frac{(6)^{3}(10)}{(7)^{+}} \cdot \frac{(10)^{3}(14)}{(11)^{+}} \cdot \text{etc.}$$

Simili modo et reliqui determinantur.

Clasus, II.,

Sit. $\frac{(4n+6)}{(4n+5)} = p$ et cum terminus; postremum; in ordine a: sequens sit aAp, medii bB; et cC et dD formabunt, progressionem geometricam, critque.

$$b B = a \Lambda \sqrt[6]{p}$$

$$c C = a \Lambda \sqrt[6]{p}$$

$$dD = a \Lambda \sqrt[6]{p}$$

quorum productum, si insuper in a ducatur; ob abcd = (1) dabit $a^4 = (1) \frac{BCD}{AJ.p}$,

qui valor ab illo casus prioris aliter non differt, nisi quod in fine: insuper factor $\frac{I}{p}$ accesserit, ita ut nunc sit

$$a_{\nu}^{4} = (1) \frac{(1)^{3}(5)}{(2)^{4}} \cdot \frac{(5)^{3}(9)}{(6)^{3}} \cdot \dots \cdot \frac{(4n+1)^{3}(4n+5)^{2}}{(4n+2)} \cdot \frac{1}{(4n+6)}$$

unde si factores in numeratore ac in denominatore ita in praecedentes removeantur, ut postremus in denominatore debitum obtineat locum, habebimus pro nostro casu:

$$a^4 = \frac{(1)^3}{(2)} - \frac{(1)(5)^3}{(2)^3(6)} \cdot \frac{(5)(9)^3}{(6)^3(10)} \cdot \frac{(9)(13)^3}{(10)^3(14)} \cdot \text{etc.}$$

Eadem methodo reperitur :

$$b^4 = \frac{(2)^3}{(3)} \cdot \frac{(2)(6)^3}{(3)^3(7)} \cdot \frac{(6)(10)^3}{(7)^3(11)} \cdot \frac{(10)(4)^3}{(11)^3(15)} \cdot \text{etc.}$$

Problema generate.

§2. 7. Invenire seriem numerorum a, b, c, d, etc: ex dalis productis v contiguorum.

Perspicuum est methodum in praecedentibus solutionibus adhibitam aeque commode problemati huic generali accommodari possessi, enim ponantur producta ex illis v terminis contiguis:

$$abcde = ---z = (1),$$

$$bcde f = ---z' = (2),$$

$$cde f q = ---z'' = (3),$$

ett ita porro, termini ordinum a, b, c, d --- z ita procedent :

$$a_{3}^{2}$$
 $a^{-\frac{(2)^{3}}{(1)}}$, $a^{-\frac{(2)}{(1)}\frac{(\gamma+2)^{3}}{(\gamma+1)}}$, $a^{-\frac{(2)}{(1)}\frac{(\gamma+2)}{(\gamma+1)}\frac{(2\gamma+2)}{(2\gamma+1)}}$ etc.
 b_{3} $b^{-\frac{(3)}{(2)}}$, $b^{-\frac{(3)}{(2)}\frac{(\gamma+3)}{(\gamma+2)}}$, $b^{-\frac{(3)}{(2)}\frac{(\gamma+2)}{(\gamma+2)}\frac{(\gamma+3)}{(2\gamma+2)}}$ etc.
 c_{3} $c^{-\frac{(4)}{(3)}}$, $c^{-\frac{(4)}{(3)}\frac{(\gamma+3)}{(\gamma+3)}}$, $c^{-\frac{(4)}{(3)}\frac{(\gamma+3)}{(\gamma+3)}\frac{(2\gamma+4)}{(2\gamma+3)}}$ etc.

$$x, x = \frac{(v-1)}{(v-2)}, x = \frac{(v-1)(2v-1)}{(v-2)(2v-2)}, x = \frac{(v-1)(2v-1)(3v-1)}{(v-2)(2v-2)(3v-2)} = \text{tc.}$$
 $y, y = \frac{(v)}{(v-1)}, y = \frac{(v)(2v-1)(2v-1)}{(v-1)(2v-1)}, y = \frac{(v)(2v-1)(3v)}{(v-1)(2v-1)(3v-1)} = \text{tc.}$
 $z, z = \frac{(v+1)}{(v)}, z = \frac{(v+1)(2v+1)}{(v)(2v)}, z = \frac{(v+1)(2v+1)(2v+1)}{(v)(2v)} = \text{tc.}$

corumque postremi crunt:

$$a \frac{(2)(v+2)(2v+2)(3v+2) - (nv+2)}{(1)(v+1)(2v+1)(3v+2) - (nv+1)} = a \mathbf{A}$$

$$b \frac{(3)(v+3)(2v+3)(3v+3) - (nv+3)}{(2)(v+2)(2v+2)(3v+2) - (nv+2)} = b \mathbf{B}$$

$$c \frac{(4)(v+4)(2v+4)(3v+4) - (nv+4)}{(4)(2v+4)(3v+4) - (nv+4)} = c \mathbf{C}$$

$$c \frac{(4) (v+4) (2v+4) (3v+4) - - (nv+4)}{(3) (v+3) (2v+3) (3v+3) - - (nv+3)} = c C$$

$$x \frac{(\nu-1)(2\nu-1)(3\nu-1)(4\nu-1)--(n\nu+\nu-1)}{(\nu-2)(2\nu-2)(3\nu-2)(4\nu-2)--(n\nu+\nu-2)} = x X$$

$$y \frac{(\nu)(2\nu)(3\nu)(4\nu)--(n\nu+\nu)}{(\nu-1)(2\nu-1)(3\nu-1)(4\nu-1)--(n\nu+\nu)} = y Y$$

$$z = \frac{(v+1)(2v+1)(3v+1)(4v+1) - - (nv+v+1)}{(v)(2v)(3v)(4v) - - - (nv+v)} = u Z.$$

Terminorum postremum sequens in ordine a erit aA $\frac{(n\nu+\nu+2)}{(n\nu+\nu+1)}$. Prout igitur iste novus factor, quem vocemus $\equiv p$, fuerit vel unitati aequalis, vel secus, utroque casu procedendum erit ut sequitur.

Casus I.

Sit
$$p = 1$$
, eritque $aA = bB = cC = --- zZ$, ideoque $b = \frac{aA}{B}$, $c = \frac{aA}{C}$, $d = \frac{aA}{D} - -- z = \frac{aA}{Z}$.

quorum productum dat

$$abcd - - - z \equiv (1) \equiv \frac{a^{v}A^{v-1}}{BCD - - Z}$$

ex qua aequatione eruitur

$$a^{V} = (1) \frac{BCDE \dots Z}{A^{V-1}}$$

Cum igitur sit

$$A^{\nu-1} = \frac{(n\nu + 2)^{\nu-1}}{(n\nu + 1)^{\nu-1}} \text{ et}$$
BCDE - - - Z =
$$\frac{(n\nu + \nu + 1)^{\nu-1}}{n\nu + 2}$$

facta substitutione prodit

$$a^{y} = (1) \frac{(ny+1)^{y-1}(ny+y+1)}{(ny+2)^{y}}$$

Quod si jam successive loco n scribantur numeri 0, 1, 2, 3, etc. orietur valor

$$a^{\nu} = (1)^{\frac{(1)^{\nu-1}}{2^{\nu}}} \cdot \frac{(\nu+1)^{\nu-1}(2\nu+1)}{(\nu+2)^{\nu}} \cdot \frac{(2\nu+1)^{\nu-1}(3\nu+1)}{(2\nu+2)^{\nu}} \cdot \text{etc.}$$

atque perspicuum est simili prorsus modo determinari b^{ν} . Instituto enim calculo reperitur:

$$b^{\nu} = (2)^{\frac{(2)^{\nu}}{3^{\nu}}} \cdot \frac{(\nu+2)^{\nu-1}(2\nu+2)}{(\nu+3)^{\nu}} \cdot \frac{(2\nu+2)^{\nu-1}(2\nu+2)}{(2\nu+3)^{\nu}} \cdot \text{etc.}$$

et ita de reliquis, quorum lex progressionis est manifesta.

Casus II.

Sit $\frac{(n + \nu + 2)}{(n + \nu + 1)} = p$, et quoniam hoc easu aA, bB, cC, etc. non amplius ad aequalitatem tendunt, sed ad progressionem geometricam, statuatur

$$b = \frac{a \stackrel{\wedge}{A} \stackrel{\wedge}{p} p}{B}$$

$$e = \frac{a \stackrel{\wedge}{A} \stackrel{\wedge}{p} p^{2}}{C}$$

$$d = \frac{a \stackrel{\wedge}{A} \stackrel{\wedge}{p} p^{3}}{D}$$

$$z = \frac{a \stackrel{\wedge}{A} \stackrel{\wedge}{p} p^{3} - 1}{Z}$$

critque productum ex omnibus

$$abcd - - z = (i) = \frac{a^{v} A^{v-1} \sqrt{v} p^{\frac{v(v-1)}{2}}}{BCDE - - Z}$$

unde posito $\alpha = \frac{y(y-1)}{2}$ erit

$$a^* \equiv (1) \frac{BCDE - Z}{A^{V-1}p}$$
,

qui valor ab illo, quem casu primo invenimus, in eo tantum discrepat, quod hic insuper accesserit factor $\frac{1}{p} = \frac{(n\nu + \nu + 1)}{(n\nu + \nu + 2)}$, ita ut pro isto casu II. habeamus

$$a^{\nu} = (1) \frac{(1)^{\nu-1}(\nu+1)}{(2)^{\nu}} \cdot \frac{(\nu+1)^{\nu-1}(2\nu+1)}{(\nu+2)^{\nu}} - \frac{(n\nu+\nu+1)}{(n\nu+\nu+2)}$$

ita ut, si hic postremus factor in praecedentes ita transferatur, ut debitum locum obtineat, se praebeat ista expressio:

$$a^{\vee} = \frac{(1)^{\vee-1}}{(2)} \cdot \frac{(1)(\nu+1)^{\vee-1}}{(2)^{\vee-1}(\nu+2)} \cdot \frac{(\nu+1)(2\nu+1)^{\vee-1}}{(\nu+2)^{\vee-1}(2\nu+2)} \cdot \frac{(2\nu+1)(3\nu+1)^{\vee-1}}{(2\nu+2)^{\vee-1}(3\nu+2)} \text{ etc.}$$

Eaedem operationes si repetantur, dabunt valores pro b^{ν} , c^{ν} , d^{ν} , etc. Ita verbi gratia habebimus

$$b^{\nu} = \frac{(2)^{\nu-1}}{(3)} \cdot \frac{(2)(\nu+2)^{\nu-1}}{(3)^{\nu-1}(\nu+3)} \cdot \frac{(\nu+2)(2\nu+2)^{\nu-1}}{(\nu+3)^{\nu-1}(2\nu+3)} \cdot \frac{(2\nu+2)(3\nu+2)^{\nu-1}}{(2\nu+3)^{\nu-1}(3\nu+3)} \cdot \text{etc.}$$

Reliquos ex sola lege progressionis, jam satis perspicua, derivare licebit.



V É RIFICATION DE LA LATITUDE

DE L'OBSERVATOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

PAR V. WISNIEWSKI.

Présenté à la Conférence le 2. Octobre 1816.

140

Les premières observations, pour la détermination de la latitude de l'Observatoire académique, ont été faites par De l'Isle. Cet Astronome rapporte dans le Vol. II. des Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae pag. 495. et suivantes, les hauteurs méridiennes de l'étoile polaire, et celles du soleil aux solstices, observées pour cet esset dans le courant de l'an 1727 et 1728; et il y détermine la latitude de l'Observatoire, par les observations de la Polaire = 59° 56′ 13″, et par celles des solstices = 59° 55′ 50″. Ayant égard à l'incertitude de la table des réfractions, dont il a fait usage dans le calcul de ces observations, il donne la présèrence au premier résultat.

Pour vérifier cette latitude, Grischow détermina en 1752 la différence des paralleles entre Arensbourg et l'Observatoire de St. Pétersbourg, en observant des hauteurs méridiennes de Procyon. Ces observations se trouvent à la fin du VIII. Tome des Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, et on y voit dans le sommaire pag. 70. la latitude de l'Observatoire qui en résulte = 59° 56′ 23″, 5 ou 24′, 5. Enfin Mr. de Roumofiki, ayant observé le solstice d'été de l'an 1763, détermina cette même latitude = 59° 56′ 23′, comme l'on voit dans le XII. Tome des Novi Commentarii. Et cette dernière détermination a été adoptée jusqu'à présent pour la latitude de l'Observatoire de l'Académic.

Quoique plusieurs observations du soleil, faites par moi en 1804 avec différens sextans à réflexion, m'avaient deja indiqué la nécessité d'une petite augmentation de cette latitude, je n'osai ecpendant alors rien décider par rapport à la quantité de cette correction, vu que les instruments de cette espèce ne peuvent pas servir à une détermination définitive de la latitude d'un Observatoire. Mais l'Observatoire ayant été muni depuis d'un cercle répétiteur, je repris la vérification de la latitude au moyen de cet instrument; et j'ai l'honneur de présenter ici à l'Académie Impériale les observations, que je viens de faire pour cet effet.

Le cercle répétiteur mentionné est construit par Mr. Troughton, célèbre artiste anglais, d'après les principes de Mr. de Borda. Il a dix-huit pouces anglais de diamètre, et ses deux lunettes achromatiques ont vingt-cinq pouces de foyer et vingt-cinq lignes d'ouverture. La lunette supérieure porte quatre verniers, qui indiquent immédiatement dix secondes sexagésimales; et le niveau est assez sensible, parce que la bulle s'y déplace de trois dixiemes d'une ligne pour une seconde d'inclinaison. Avant d'opérer avec cet instrument, je l'ai vérifié avec soin. Ayant rendu l'axe optique de la lunette supérieure sensiblement parallèle au limbe du cerele. l'ai examiné la position de l'axe rotatoire du limbe. Pour cet effet, ayant mis le limbe dans une position sensiblement verticale, j'ai place le fil parallèle au limbe, sur un objet terrestre assez éloigné; puis après avoir donné au limbe un mouvement d'un demi tour, et ayant remis la lunette sur l'objet, j'ai observé si le fil le tranchait encore dans le même point; et s'il y avait quelque déviation, je l'ai remarqué sur le cercle azimuthal, dont les verniers indiquent immédiatement dix secondes. Ayant fait cette opération sur dissérens points du limbe, j'ai reconnu, que l'axe rotatoire du limbe penchait vers le 330 me degré de la division, et que sa déviation de la position verticale était seulement de 50" sexagésimales. Les corrections, dues à cette petite déviation, deviennent insensibles, parce

que les distances au zénith observées sont assez grandes. Pour mettre le cercle dans la position verticale, aussi exactement que cela se peut faire dans ces circonstances, j'attachai les pinces avec le fil à plomb très près du diamètre, qui passe par 60° et 240° de la division; j'éludai ainsi l'erreur, qui pourrait avoir lieu dans cette opération, à cause de l'inclinaison de l'axe du limbe, ci-dessus mentionnée. Afin d'anéantir aussi tout le jeu de l'axe qui porte la lunette supérieure, je serrai fortement la vis, adaptée pour cet effet à l'extremité inférieure de cet axe; et j'eus encore d'autres attentions, pour éviter toute source d'erreur, qui aurait pu attaquer le principe de répétition.

Nonobstant toutes ces vérifications du cercle, je pris le parti d'observer avec cet instrument des étoiles, qui culminent au sud et au nord du zénith à des hauteurs peu différentes: afin que l'erreur de l'instrument, s'il en restait encore, n'influat pas sur la détermination de la latitude de l'Observatoire. Ces étoiles sont les quatre suivantes: la Polaire, a de la grande Ourse, a de l'Aigle et a d'Andromède. J'adoptai leur position moyenne d'après les déterminations les plus récentes, et nommément pour la Polaire d'après la détermination donnée par Mr. Bessel dans les Éphémérides de Berlin de l'an 1818, savoir : ascension droite moyenne le 1er Janvier 1816 = 0h 50/2/.71; déclinaison moyenne à la même époque = 89° 19' 36',08; la précession avec le mouvement propre, en ascension droite $= \pm 14\%, 18$, et en déclinaison $= \pm 19\%, 47$. Quant aux autres trois étoiles, c'est, par rapport à leur déclinaison, la détermination de Mr. Pond, qui mérite la plus grande confiance, vu qu'elle est faite récemment avec un excellent cercle entier de nouvelle construction. Voici ces déclinaisons moyennes pour le 1er Janvier 1813: a grande Ourse = 62° 45' 28",5, a sigle \equiv 8° 23′ 1′,2 et a Andromède \equiv 28° 3′ 30′,4. La précession annuelle de ces étoiles en déclinaison, y compris le mouvement propre, a été adoptée telle, que l'a donnée Mr. Piazzi dans les

Éphémérides de Berlin de l'an 1811; où j'ai pris aussi l'ascension droite moyenne de ces étoiles avec son changement annuel. Dans le calcul de l'aberration de ces étoiles, j'ai mis la constante de l'aberration = 20",25; et pour les nutations lunaire et solaire, j'ai fait usage des constantes determinées par Mr. Laplace.

Le tems de l'observation a été marqué d'après un chronomètre d'Arnold, comparé chaque fois avant et après l'observation, avec une excellente pendule de Brockbanks, reglée sur le tems sidéral par des observations de quelques étoiles à la lunette méridienne. C'est ainsi que j'ai déterminé le tems du chronomètre au moment de la culmination de chaque étoile, qu'on voit ci-dessous à la tête des observations. J'ai pris les réfractions dans les tables données récemment par Mr. Bessel.

Voici mes observations:

Vendredi le 25 Août 1816.

Distances au Zénith de l'étoile a de la grande Ourse.

Tems du Chronomètre au moment du passage inférieur de l'étoile - - = 11h 49' 47",2.

1				
No. de l' ob- servation.	Tems du chronomètre.	Angle horaire en tems.	Réduction au méridien.	Barom. = 28 24 poue. Therm de Réaumur = + 2°,7.
1. 2. 3. 4. 5. 6.	11 ^h 39' 51",2 43 5, 6 47 9, 6 50 32, 4 54 17, 6 56 42, 8	9' 57",6 6 42, 7 2 38, 0 0 45, 3 4 31, 1 6 56, 7	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	parcouru 3' 11'',25
7. 8. 9. 10. 11.	12 1 52, 4 4 15, 2 8 52, 0 11 18, 0 15 34, 4 18 9, 6	12 7, 2 14 30, 3 19 7, 9 21 34, 3 25 51, 4 28 27, 0	$\begin{vmatrix} + & 78, & 6 \\ + & 112, & 6 \\ + & 195, & 8 \\ + & 249, & 0 \\ + & 357, & 6 \\ + & 432, & 9 \end{vmatrix}$	L'arc total === 687° 3

Somme = 1544',4.

 Réfraction
 57° 15′ 15″,94

 Réfraction
 +
 1 28, 39

 Réduction au méridien
 +
 2 8, 70

Distance zénithale méridienne de a grande Ourse = 57° 18' 53",03.

Le même jour.

Observations des distances au Zénith de l'étoile a d'Andromède.

Tems du Chronomètre au moment du passage

= 12^h 56' 17",2. au méridien

No.	Tems de l'observation.	Augle horaire en tems.	Réduction au méridien.	Barom, franç 28,24 p. Therm, de Réaumur + 123,7.
1. 2. 3. 4.	$12^{h} 45' 43'', 2$ 49 38, 0 52 28, 0 54 12, 0	6 40, 3	- 184",5 - 73, 2 - 24, 1 - 7, 2	al parcouru o 2' 50",00
5. 6. 7. 8.	59 6, 8 13 1 26, 8 6 54, 4 9 20, 8	10 38, 9 13 5, 7	- 13, 2 - 44, 0 - 186, 3 - 281, 8	L'arc total === 255° :

Somme $\equiv 814^{\prime},3$.

Distance zénithale moyenne observée - = 31° 52′ 51″,25 Réfraction calculée - - - - - 35, 47 Réduction au méridien - - 1 41, 79
Distance zénithale méridienne de α d'Andromède = 31° 51′ 44″, 93.

Samedi le 2 Septembre 1816.

Observations de a de la grande Ourse au passage inférieur.

La culmination de l'étoile a eu lieu à 11^h 19'21", 9, tems du chronomètre.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire	Réduction.	Barom. = 28,42 p. Therm. = + 5°,2.
1. 2. 3. 4. 5.	11 ^h 5/34'',0 9 22, 8 13 46, 0 17 28, 4 25 21, 2	10 0, 7 5 36, 8 1, 53, 8		parcouru 72° 38′ 8″,75
6. 7. 8. 9. 10.	28 41, 6 32 39, 2 35 17, 4 38 42, 4 42 6, 0	13 19, 5 15 58, 1 19 23, 7 22 47, 8	+46, 8 $+95, 0$ $+136, 4$ $+201, 3$ $+278, 0$	arc == 5

Somme $\equiv 951'',6$

Distance zénithale moyenne observée - = 57° 15′ 48′,87

Refraction - - + 1 32, 48

Réduction moyenne - - + 1 35, 16

Distance méridienne au zénith de a grande Ourse = 57° 18' 56".5 t.

Le mème jour.

Observations de l'étoile polaire au passage supérieur.

Tems du chronomètre au moment de la culmination de la Polaire - - $= 13^{\text{h}} 23' 23'',7.$

N°.	Tems de Fobservation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. 28,42 p. Therm 5°,0.
1.	12h 59' 26",0	24' 1",5	— 34'', s	
2.	13 3 8, 4	20 18, 5	24, 9	
3.	6 6, 0	17 20, 4	18, 1	2
4.	8 29, 6	14 56, 5	- 13, 5	
5.	11 29, 6	11 56, 0	8, 6	2,8
6.	14 15, 2	9 10, 0	<u> </u>	ó.4
7.	20 6, 4	3 17, 8	_ 0, 7	7.7
8.	23 48, 0	0 24, 3	- 0, 0	11
9.	27 17, 6	3 54, 5	0, 9	,,,
10.	31 52, 8	8 30, 4	4, 4	parcouru
11.	34 36, 0	11 14, 1	- 7, 6	arc
12.	37 43, 6	14 22, 2	— 12, 5	
13.	41 36, 0	18 15, 2	-20, 1	total
14.	48 33, 2	25 13, 5	- 38, 4	
15.	51 49, 6	28 30, 4	- 49, 0	L'arc
16.	56 22, 0	33 3, 5	- 65, 9	i
		Somme	= 304',5	

Distance zénithale moyenne observée = 28° 22' 49'',30 - + 32, 20 Réfraction Réduction - - - - - - 19, 03

Distance zénithale méridienne de la Polaire - = 28° 23' 2",47.

Vendredi le 8 Septembre 1816.

Distances au zénith de a de l'Aigle.

Tems du chronomêtre au passage de l'étoile = 7h 46'24",0.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. \equiv 28.09 p. Therm. \equiv + 8°,0.
1. 2. 3. 4. 5. 6.	7 ^h 23' 9",2 . 27 38, 0 . 31 28, 0 . 34 25, 2 . 37 44, 8 . 42 0, 0		$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	619° 20′ 34″,37
7. 8. 9. 10. 11.	. 52 57, 2 . 56 20, 0 . 59 31, 6 8 2 35, 2 . 7 21, 6 . 11 14, 0	9 57, 6 13 9, 7 16 13, 8 21 1, 0	— 768, <u>5</u>	L'arc parcouru

Somme $\equiv 3723, 2$

Distance zénithale méridienne de α de l'Aigle $\equiv 51^{\circ} 32^{\prime} 45^{\prime}.75$.

Samedi le $\frac{9}{27}$ Septembre.

Distances au zénith de a de l'Aigle.

Passage de l'étoile au méridien à = 7^h 42'31", 8 tems du chronometre.

N°.	Tems de Pobservation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. = 27,98 p. Therm. + 9°,2.
1. 2. 3. 4. 5. 6.	7 ^h 39 5, 6 . 41 6, 4 . 46 15, 2 . 48 44, 4 . 52 31, 2 . 54 18, 0	3 44, 0 6 13, 6 10 1, 0	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	619°28' 42",50
7. 8. 9. 10. 11. 12.	. 56 58, 8 . 59 16, 4 8 3 27, 2 . 6 31, 6 . 9 40, 8 . 11 40, 6	16 47, 3 20 58, 8 24 3, 7 27 13, 4 29 13, 6	— 545, 9	L'arc parcouru

Distance movenne observée - - = 51° 37′ 23″,54

Réfraction - - - - 1 12, 47

Réduction - - 5 52, 50

Distance au zenith méridienne de α de l'Aigle = 51° 32′ 43″,51.

Le mème jour.

Observations de a de la grande Ourse au passage inférieur.

Passage de l'étoile au méridien à = 10h 52' 26",8.

N°.	Tems de l'observation.	Augle horaire on tems.	Réduction au méridien.	Barom. $\equiv 27,96 \text{ p}$ Therm. $\equiv +9^{\circ},2$.
1. 2. 3. 4.	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	4 11, 1 9 11, 5	+ 9,4	parcouru 18 ⁰ 2′ 45″,00
5. 6. 7. 8.	9 0, 4 10 42, 0 13 40, 0 15 30, 4	18 18, 2 21 16, 7	+179, 2 + 242, 2	L'arc p

Somme $\equiv 1040'$,8.

Le même jour.

Observations de a d'Andromède.

Passage de l'étoile au méridien à = 11h 58' 56",0.

Nº.	Tems de Fobservation	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. = 27,94 p. Therm. = +9°,3.
1. 2. 3. 4. 5. 6.	11 ^h 45 17",6 48 37, 6 52 18, 8 55 52, 8 59 27, 2 12 2 23, 2	10 20, 1 6 38, 3 3 3, 7 0 31, 3	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	383°14′18″,12
7. 8. 9. 10. 11.	7 20, 8 10 52, 4 14 38, 0 17 9, 2 21 0, 8 23 12, 4	11 58, 4 15 44, 6 18 16, 2 22 8, 4 24 20, 4	$ \begin{array}{r} -116, 9 \\ -235, 4 \\ -406, 6 \\ -547, 2 \\ -802, 6 \\ -969, 2 \end{array} $	L'arc parcouru ==

Somme = 3668,2

Distance moyenne	observée	-		-		31	° 56'	111	,51
Réfraction	ı	-	-	-		-	+ 0	35,	72
Réduction	-	-	-	-	-	-	 5	5,	6 8

Distance zénithale méridienne de a d'Andromède = 31° 51' 41",55.

Le même jour.

Observations de la Polaire au passage supérieur.

Passage de la Polaire au méridien à = 12h 56' 31",0.

N°.	Tems de Pobservation.	Angle horaire Réduction.	Barom. $\equiv 27.94 \text{ p}$ Therm. $\equiv +9^{\circ},3$
1.	12 ^h 54′ 18′,0	2' 13',4 - 0',3	
2.	1 57 45, 6	1 14, 8 - 0, 1	10
3.	13 3 39, 6	7 9, 8 — 3, 1	42",
4.	5 46, 0	9 16, 5 - 5, 2	7
5.	11 29, 6	15 1, 1 - 13, 6	26
6.	14 34, 0	18 6, 0 - 19, 8	0
7.	18 6, 8	21 39, 3 — 28, 3	397
8.	1 21 48, 8	25 22, 0 — 38, 8	1
9.	27 40, 8	31 14, 9 - 58, 9	nn
10.	30 3, 2	33 37, 7 — 68, 2	parcouru
11.	33 8, 0	36 43, 0 — 81, 3)ar.
12.	36 40, 0	40 15, 6 - 97, 3	
13.	39 54, 0	43 30, 1 - 114, 0	L'arc
14.	42 56, 0	46 32, 6 130, 4	7

Somme \equiv 659",3

Distance au zénith méridienne de la Polaire = 28° 23' 4",09.

Mecredi le 13 Septembre.

Observations de c. de la grande Ourse au passage inférieur.

Passage de l'étoile au méridien à 10h 36'0", i.

	Tems de	A 1 . 1		P
N°.	Tobservation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. $\equiv 28,34 \text{ p.}$ Therm. $\equiv +4^{\circ},0.$
				1
1.	10 ^h 20′ 10″,0	15' 52'',7	+ 134′,9	
2.	23 38, 0	12 24, 1	+ 82, 3	
3.	25 32, 4	9 29, 2	+ 48, 2	,50
A.	29 42, 8	6 18, 3	+ 21, 3	uru 1'',
5.	36 8, 0	0 7, 9	+ 0,0	con 1, 1
6.	40 2, 4	4 3, 0	+ 8, 8	parcouru
7.	44 53, 6	8 55, 0	+ 42, 5	Λ ∞
8.	48 52, 8	12 54, 8	+ 89, 2	l ä ll
9.	56 1, 6	20 4, 8	+215, 7	
10.	58 34, 8	22 38, 4	+274, 2	
11.	11 1 25, 2	25 29, 3	+347, 5	
12.	4 36, 4	28 41, 0	+ 440, 0	

Somme = 1704'', 6

Distance moyenne observée - =
$$57^{\circ}$$
 15′ 5″,62

Refraction - - + 1 32, 64

Réduction moyenne - - + 2 22, 05

Distance zénithale méridienne de α de la grande Ourse - - = 57° 19′ 0″,31.

Jeudi le 14 Septembre.

Observations de a de l'Aigle.

Tems du passage au méridien = 7^h 22' 19", 1.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. 28,42 p. Therm. → 4°.7.
1. 2. 3. 4. 5. 6.	7h 7'0',0 9 52, 8 13 3, 6 15 56, 8 18 58, 4 27 25, 6 29 26, 0	6 23, 3 3 21, 2 5 7, 3	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	7220 38' 58",13
8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.	31 56, 4 37 11, 6 41 39, 6 43 42, 0 45 54, 4 48 8, 0 49 48, 0	14 54, 9 19 23, 7 21 26, 4 23 39, 2 25 53, 1 27 33, 4	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	L'arc parcouru ==

Somme = 4646'', 1

Distance moyenne	observée			-	= 51° 37′ 4″,15
Réfraction	_	-	-	-	 + 1 15, 25
Reduction	-	-	-	-	5 31, 86
Distance zénithale	méridienne	de	α de	l' Aigle	$=51^{\circ}32'47',54.$

Le même jour.

Observations de a d'Andromède.

Tems du passage de l'étoile au méridien = 11h 38' 42",4.

N°. de l'ob- servation.	Tems du chronomètre.	Angle horaire en tems.	Réduction au méridien.	Barom. <u>28</u> 41 pouc. Therm + 3°:7.
1. 2. 3. 4. 5. 6.	11 ^h 26' 51",2 31 15, 2 33 30, 0 35 39, 2 40 0, 0 43 0, 0	11' 53',1 7 28, 4 5 13, 2 3 3, 7 1 17, 8 4 18, 3	- 231",9 - 91, 8 - 44, 8 - 15, 4 - 2, 8 - 30, 4	c parcouru 33° 7′ 56′,88
7. 8. 9. 10. 11.	45 8, 0 50 24, 0 54 0, 8 56 14, 0 59 34, 0 12 3 4, 8	6 26, 6 11 43, 5 15 20, 9 17 34, 4 20 55, 0 24 26, 4	- 68, 2 - 225, 7 - 386, 5 - 506, 4 - 716, 6 - 977, 2	L'arc p === 383°

Somme $\equiv 3297',7$.

Distance zénithale méridienne de a d'Andromède = 31° 51' 42",30.

Le même jour.

Observations de la Polaire au passage supérieur;

Tems du passage au méridien = 12h 36' 18",7.

N°.	Tems de l'observation.	Angle horaire en tems.	Réduction.	Barom. 28,41 p. Therm. + 4°,5.
1.	12h 26' 53",6	9' 26",6	5'',4	Andrew Comments of the Comment
2.	29 32, 0	6 47, 8	- 2, 8	
3.	31 56, 4	4 23, 0	 1 , 2	10
4.	35 8, 4	i 10, 5	- 0, 1	93
5.	39 57, 2	3 39, 1	0, 8	3
6.	42 39, 2	6 21, 5	- 2, 4	पर
7.	46 57, 2	10 40, 2	- 6, 9	0
8.	50 10, 0	13 53, 6	- 1 1, 7	4
9.	56 12, 0	19 56, 6	- 24, 0	
10.	59 16, 0	23 1, 1	_ 32, 0	n
11.	13 2 20, 0	26 5, 6	_ 41, 1	[no
12.	5 33, 6	29 19, 7	_ 51, 9	parcouru
13.	8 24, 4	32 11, 0	— 62, 5	
14.	11 24, 0	35 11, 0	_ 74, 6	L'aïc
15.	16 32, 0	40 19, 9	_ 98, 0	Ä
1 6.	19 28, 8	43 17, 2	-112, 8	
		Somme :	= 528",2	

Distance moyenne observée - = 28° 23′ .8″,05

Réfraction - - - 32, 27

Réduction moyenne - - 33, 01

Distance zénithale méridienne de la Polaire = 28° 23′ 7″,31

En réduisant toutes ces distances zénithales méridiennes à une même époque celle du $\frac{7}{19}$ Septembre, moyennant le changement calculé de la déclinaison apparente, on aura le tableau suivant :

L'étoile polaire.

Jour de l'observation.	Distance mérïdienne observée.	Réduction.	Distance zénithale réduite au 75 Sept.	Nombre des ob- serva- tions.
le 🔓 Sept.	28° 23′ 2″,47	+ 1",83	28° 23′ 4′′,30	16.
- 0 II	A, 09	0, 75	3, 34	14.
$-\frac{14}{26}$, —	7, 34	-2, 63	4, 68	- 15.

Distance zénithale méridienne le $\frac{7}{19}$ Sept. 28° 23′ 4″,14′ 46.

α Andromède.

le 25 Août 6 Sept.	31° 51′ 44′	//,93 — 2",91	31°51′.	42",02	8.
$-\frac{9}{21}$ Sept.	41	, 55 + 0, 40		41, 95	12.
$-\frac{\bar{1}_{4}}{26}$ —	42,	, 30 + 1, 40	- \-	43, 70	12.

Distance zénîthale méridienne le 7/19 Sept. 31° 51' 42',65 32.

a grande Ourse.

$le = \frac{25 \text{ Août}}{6 \text{ Sept.}}$	57°	18	53",03	+4,	34	57° 18'	57",37	12.
$-\frac{2}{14}$ Sept.	-	-	56, 51	+ 1,	67		58, 18	10.
- 9	-	-	59, 81	0,	66		59, 15	8.
$-\frac{13}{55}$ —	-	19	0, 31	 1,	99		58, 32	12.

Distance zénithale meridienne le 1/19 Sept. 57° 18' 58",17 42.

a Aigle.

le $\frac{8}{20}$ Sept.	51° 32′ 45″, 75	+ 0, 02	51° 32′ 45″,77	12.
$-\frac{9}{21}$ —	43, 51	+ 0, 04	43, 55	12.
$-\frac{14}{26}$ -	47, 54	+0, 14	47, 68	14.

Distance zénithale méridienne le 7 Sept. 51° 32′ 45″,77 38.

Nous avons donc le $\frac{7}{19}$ Sept. la somme des distances zénithales observées de l'étoile polaire et de a Andromède = $60^{\circ}14'46''$, 79. Mais la différence de la déclinaison apparente de ces étoiles, calculée pour

le même jour, est de 60° 14′ 55′,80; il-y-a donc 9″,01 de moins; ce qui provient de la somme des erreurs du cercle répétiteur, correspondante aux distances zénithales de dites étoiles. Pareillement la somme des distances zénithales de α grande Ourse et α Aigle a été observée ci-dessus = 108° 51′ 43′,94. Mais ou a la somme des complémens de la déclinaison apparente de dites étoiles le ½ Septembre = 108° 51′ 57″, 33; la somme des erreurs du cercle répétiteur, correspondante aux distances zénithales de ces étoiles, est donc de 13″, 39. De même en combinant les observations de la Polaire avec celles de α de l'Aigle, on trouve la somme des erreurs = 11′, 25; et par les observations de α d'Andromède et de α grande Ourse on a pour la même somme = 11″, 15.

Les précautions nécessaires ayant été prises, pour éviter toute source d'erreur qui pourrait attaquer le principe de repétition, on doit être surpris de voir neanmoins si peu d'accord dans les résultats ci-dessus rapportés. On serait peut-être tenté, d'attribuer ces erreurs du cercle à quelque jeu de la vis de rapel de la lunette sapérieure; mais dans ce cas les erreurs devraient être à pen près constantes pour toutes les distances au zenith, ce qui pourtant n'a pas lieu dans les sommes des erreurs ci-dessus rapportées. Au reste il faut remarquer que, pour obvier à une erreur de ce genre, la vis de rapel a été munie d'un ressort et d'une chaine de montre, moyennant quoi elle est pressée continuellement contre son écrou et contre ses collets, de sorte qu'elle ne peut y vaciller d'aucune maniere. Je me suis aussi assuré par des experiences reiterees, que la vis de pression destinée à fixer l'alidade sur le limbe du cercle, remplit très bien sa fonction. Après d'infructueuses recherches sur la source des erreurs mentionnées du cercle, je remarquai enfin que la lunette supérieure, étant attachée à la pièce du centre sur une base trop petite, savoir de cinq pouces seulement, pourrait être sujette à une petite flexion. Pour m'en convaincre, ayant mis le cercle dans une position verticale,

je pointai les deux lunettes, supérieure et inférieure, sur un objet terrestre, et j'attachai ensuite un poids de quatre onces près de l'objectif de la lunette supérieure. Je remarquai alors comme je l'ai présumé, que la lunette supérieure avait subi évidemment une flexion: car le fil horisontal de cette lunette ne couvrait plus l'objet terrestre, quoique cela avait lieu à la lunette inférieure. Cette flexion était à-peu-près de quinze secondes, et elle avait encore augmenté par un autre poids pareil, ajouté ensuite au premier. Ainsi il devient vraisemblable par ces expériences, que les erreurs du cercle ci-dessus mentionnées, tirent leur origine de cette source. Or une telle flexion de la lunette supérieure devant être dans son maximum à 90° du zénith, et nulle dans le zénith même, on pourra supposer par approximation l'erreur du cercle x', sur une distance au zénith observée α' , à - peu - près égale à A sin a; où A est une constante à déterminer par l'observation. Soient donc pour la Polaire, a d'Andromède, a de la grande Ourse, et a de l'Aigle, les distances au zénith observées et les erreurs du cercle correspondantes: α' , α'' , α'' , α''' , α''' , et α^{IV} , α^{IV} ; en faisant usage des quatre sommes des erreurs du cercle ci-dessus rapportées, nous aurons pour la détermination de la constante A, les quatre équations suivantes:

$$A = \frac{x' + x''}{\sin \alpha' + \sin \alpha'} = \frac{9'', \text{ ot}}{1, \text{ oo33}} = 8'', 98$$

$$= \frac{x''' + x^{1}V}{\sin \alpha''' + \sin \alpha^{1}V} = \frac{13'', 39}{1, 6248} = 8'', 24$$

$$= \frac{x' + x^{1}V}{\sin \alpha' + \sin \alpha^{1}V} = \frac{11'', 25}{1, 1585} = 8', 94$$

$$= \frac{x'' + x'''}{\sin \alpha'' + \sin \alpha'''} = \frac{11, 15}{1, 3696} = 8'', 14.$$

Les quatre valeurs obtenues ainsi pour la constante A, s'accordent assez bien pour justifier notre hypothèse; nous adopterons donc pour la valeur de A la moyenne 8',575, et nous ajonterons aux distances au zénith observées de quatre étoiles mentionnées, les corrections respectives: $A \sin \alpha'$, $A \sin \alpha''$, $A \sin \alpha'''$ et $A \sin \alpha'^{V}$. Nous obtiendrons ainsi pour la latitude de l'Observatoire les résultats suivans:

gr. Ourse $\[\begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c}$
62°44′28″,42 28 441, 01 62 4425, 73 88 19 37, 92 8 23 38, 63 8 23 38, 66 62 44 23, 40
Déclinaison appa- rente calculée.

Cette détermination fait voir que la latitude de l'Observatoire de l'Académie a été supposée jusqu'à présent trop petite de 8"; dorénavant nous la supposerons en nombres ronds = 59° 56′ 31".

Les résultats obtenus pour la latitude, par les observations des quatre étoiles mentionnées, s'accordent assez bien, comme l'on voit dans le tableau suivant:

•		Nombre d'obser- vations.
Polaire -	59° 56″ 31″,54	46.
a d'Andromède	31, 15	32.
a grande Ourse	30, 54	42.
a de l'Aigle -	31, 09	38.

DE L'ABERRATION DES-ÉTOILES FIXES.

PAR

I. I. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 26 Février 1817.

6. 1. L'aberration des corps célestes est une fonction de leur vitesse et de celle de la lumière. Cette dernière étant regardée comme constante, quelle que soit la nature et la distance des astres', les seules variables dont l'aberration dépend, sont les vitesses de la terre et de l'astre dont il s'agit. De plus, le mouvement des étoiles fixes étant tout-à-fait insensible, leur aberration est donnée par une fonction, dans laquelle il n'entre qu'une seule variable, savoir la vîtesse de la terre, ou plutôt son rapport à celle de la lumière. Il est vrai que cette vitesse, dans toute l'étendue de l'orbe terrestre, ne change que de sa 30 me partie, de sorte que la vitesse et l'aberration vraie ne s'écarte jamais de la movenne que de sa 60^{me} partie. Les astronomes se sont donc permis, dans leurs calculs des aberrations, de regarder comme constant le mouvement de la terre, ou le rapport qui existe entre sa vitesse et celle de la lumière; et j'avais pris la même liberté dans mon traité d'Astronomie théorique. Mais comme il est indispensable, d'avoir égard à la variabilité du mouvement, lorsqu'il s'agit des planètes, d'ont la vitesse ou ses variations sont plus considérables, ce qui est surtout le cas de Mercure qui a la plus grande vitesse et excentricité, il paraît naturel, d'apporter le même soin au mouvement de la terre, et par conséquent aux aberrations des étoiles fixes. Les formules que j'avais trouvées pour cet effèt, et qui sont contenues dans ce mémoire, sont à peu près les mêmes que celles données par Mr. Delambre dans son excellent ouvrage d'A-

stronomie théorique et pratique, qui vient de paraître. Mais comme je les ai trouvées d'une autre manière, et que cet objet mérite d'être envisagé sous plusieurs points de vue, je crois que ce petit mémoire ne sera pas tout-à-fait inutile.

§. 2. La sensation de la vue est l'effèt d'une liaison entre notre oeil et un objet éloigné, produite par la lumière, et nous voyons l'objet suivant la direction, dans laquelle le rayon sorti de cet objet vient frapper nos yeux. Cette direction, à l'instar de tous les effèts mécaniques, est composée de la vitesse et de la direction de ces trois corps, l'objet, l'oeil, et la lumière, ou des deux derniers seulement, lorsqu'il s'agit des étoiles fixes dont le mouvement n'est pas sensible. Leur aberration dépend donc 1) du rapport qui existe entre les vitesses de la lumière et de la terre, 2) de l'angle que fait le mouvement de la terre avec la direction du rayon de lumière qui frappe nos yeux, c'est-à-dire, de l'angle formé par la tangente de l'orbe terrestre et la ligne droite menée de la terre à l'étoile, angle que nous nommerons D. Or on sait, par le théorème de la composition des vitesses et des forces, connu sous le nom du parallélogramme des forces, que la déviation de la lumière de sa direction originaire, ou l'aberration que nous appellerons w, est donnée par cette proportion:

 $\sin \Phi$ est à $\sin \omega$ ou à ω , comme la vitesse de la lumière est à celle de la terre.

Nommant donc V, v, ces vitesses, le lieu apparent de l'étoile s'inclinera du lieu vrai vers la tangente de l'orbe terrestre, d'un angle $\omega = \frac{v}{V} \sin \varphi$. Pour déterminer le rapport $\frac{v}{V}$, nous suivrons Mr. Delambre qui a trouvé, par une foule d'observations d'éclipses des satellites de Jupiter, que la lumière parcourt le grand axe de l'orbe terrestre en 46 min. 26 sec. Pendant le même tems, la terre décrit antour du Soleil, avec sa vitesse moyenne, un angle de 40%,5; et comme le moyen mouvement d'une planète est égal à un arc circulaire, dont le rayon est le demi-grand axe de son

ellipse, la valeur moyenne de $\frac{v}{V}$ est $\frac{\sin 20'', 45}{1}$, ou en secondes d'un degré, $\frac{v}{V} = 20'', 25$. En nommant μ , ν , le moyen et le vrai mouvement de la terre, la véritable valeur de $\frac{v}{V}$, dans un point donné de l'orbite de la terre, sera $\frac{v}{\mu} 20'', 25$. Faisant donc, pour abréger,

 $20'',25 \equiv m \text{ et } \nu \equiv \xi \mu$, nous aurons (A) $\omega \equiv \xi m \sin \varphi$.

- §. 3. Soit (Fig. 2.) T la terre, Tt la direction de son T_ab . II. mouvement, ou la tangente de son orbite, TF la droite menée au Fig. 2. vrai lieu d'une étoile, qui serait aussi la direction suivant laquelle nous verrions l'étoile, si la terre était immobile. Alors, menant dans le plan FTt, entre TF et Tt, une droite Tf qui fait avec TF l'angle ω , le lieu apparent de l'étoile sera déterminé par la ligne Tf; et $FTf = \omega$ sera l'aberration, laquelle doit être décomposée en deux directions, dont l'une est perpendiculaire à l'Ecliptique, et l'autre parallele à elle.
- §. 4. Soit ATB l'orbite elliptique de la terre, le Soleil se trouvant au foyer S, et qu'on abaisse, d'un point quelconque F de la droite TF, une ligne FG perpendiculaire au plan de l'écliptique, qui rencontre ce plan au point G. Ayant mené du point T occupé par la terre, TG et la tangente de l'ellipse Tt, le plan FTG sera perpendiculaire au plun de l'écliptique GSTt; et nommant \bigcirc , λ , les longitudes du Soleil et de l'étoile, β la latitude de celle ci, et ψ l'angle STt formé par la tangente et le rayon vecteur de l'ellipse, on aura

FTG $= \beta$, GTS $= \bigcirc -\lambda = \eta$, GT $t = \psi - \eta$.

Il y a donc, autour du centre de la sphère T, un triangle sphérique, forme pur les deux cathètes FTG = 3, $GTt = 0 - \eta$, et l'hypothènuse FTt = 0 (0.2.), dans laquelle se trouve aussi la droite Tf, formant avec TF l'angle $FTf = \omega$ (0.-2.).

solution in the substitution of the substitut

 $\partial \beta = -\xi m \sin \Phi \cos F$, $\partial \lambda = -\xi m \frac{\sin \Phi \sin F}{\cos \beta}$.

§. 6. La trigonomètrie sphérique fournissant les équations $\sin \varphi \sin F = \sin Gt = \sin(\psi - \eta)$, et $tg \varphi \cos F = tg FG = tg \beta$, il viendra $\partial \beta = - \xi m tg \beta \cos \varphi$, et $\partial \lambda = - \xi m \frac{\sin(\psi - \eta)}{\cos \beta}$, ou à cause de $\cos \varphi = \cos FG \cos Gt = \cos \beta \cos (\psi - \eta)$, $\partial \beta = - \xi m \sin \beta \cos (\psi - \eta)$.

Comme l'angle $\psi \equiv STt$ Fig. 2.) diffère très - peu d'un angle droit, dans toute l'étendue de l'orbe terrestre, à cause de son excentricité peu considérable, nous ferons $\psi \equiv 90^{\circ} - \varkappa$, \varkappa étant un tres-petit arc dépendant de l'excentricité e de la terre; d'où il vient

 $\partial_{i}\beta = -\frac{\xi}{m}\sin\beta\sin(\eta+\kappa)$, $\partial\lambda = -\frac{\xi}{m}\frac{(\cos\eta+\kappa)}{\cos\beta}$. Nous verrons qu'il serait tout-à-fait inutile de porter la précision, dans le développement des aberrations, au delà de la seconde puissance de l'excentricité e. Cela posé, on aura $\sin\kappa = \tan\kappa = \kappa$, et $\cos\kappa = 1 - \frac{\kappa^2}{2}$, d'où il vient

(B) $\partial \beta = -\frac{\xi}{m} \sin \beta \left(\sin \eta + \kappa \cos \eta - \frac{\kappa^2}{2} \sin \eta \right)$ (C) $\partial \lambda = -\frac{\xi}{m} \sec \beta \left(\cos \eta - \kappa \sin \eta - \frac{\kappa}{2} \cos \eta \right)$.

6. 7. Pour exprimer & et u en fonction de l'excentricité e. la nature de l'ellipse donne d'abord tang $\psi = \frac{1 - e \cos \alpha}{e \sin \alpha}$, α étant l'anomalie vraie du soleil, comptée de son apogée. Or, k étant $=90^{\circ}-\psi$, on a tang $\kappa=\cot\psi$, on $\kappa=\frac{e\sin\alpha}{1-e\cos\alpha}=e\sin\alpha(1+e\cos\alpha)$. D'ailleurs les lois de Kepler donnent (§. 2.) $\nu = \mu \sqrt{\frac{1-2e\cos\alpha+e^2}{1-e^2}}$, d'où il suit $\xi = (1 - 2c\cos\alpha + e^2)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}$, ou $\xi = 1 - e \cos \alpha + \frac{e^2}{1} (3 - \cos 2 \alpha).$

En substituant cette valeur, celle de κ , et $\kappa^2 \equiv e^2 \sin^2 \alpha \equiv \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2\alpha)$, on aura $\xi_{\mathcal{R}} \equiv e \sin \alpha$, $\xi_{\mathcal{R}}^2 = \frac{e^2}{3} - \frac{e^2}{3} \cos 2\alpha$, et les équations (B) (C) deviendront

 $\begin{array}{l} \partial \beta = -m \sin \beta \left[\left(1 + \frac{e^{s}}{\beta} \right) \sin \eta + e \left(\sin \alpha \cos \eta - \cos \alpha \sin \eta \right) \right], \\ \partial \lambda = -m \sec \beta \left[\left(1 + \frac{e^{s}}{\beta} \right) \cos \eta - e \left(\cos \alpha \cos \eta + \sin \alpha \sin \eta \right) \right], \text{ out} \\ \partial_{\beta} = -m \sin \beta \left[\left(1 + \frac{e^{s}}{\beta} \right) \sin \eta + e \sin \left(\alpha - \eta \right) \right], \end{array}$

 $\partial \lambda = -m \sec \beta \left((1 + \frac{e^2}{5}) \cos \eta - e \cos (\alpha - \eta) \right).$

L'executricité de la terre étant e = 0.0168, et m = 20'', 25 (§. 2.), il viendra $me \equiv 0'', 3402 : \frac{me^2}{5} \equiv 0'', 0029$. En nommant donc π la longitude de l'apogée du soleil, et restituant les valeurs η= Ο-λ, $\alpha = \bigcirc -\varpi$, on aura $\alpha - \eta = \lambda - \varpi$; d'où l'on tirera aberr. lat. $\partial \beta = 20'', 253 \cdot \sin \beta \sin (\Theta - \lambda) = 0'', 34 \cdot \sin \beta \sin (\lambda - \varpi);$ aberr. long. $\partial \lambda = -20'', 253 \cdot \frac{\cos((\bigcirc -\lambda))}{\cos \beta} + 0'', 34 \cdot \frac{\cos((\lambda - \omega))}{\cos \beta}$.

- §. 8. Comme ces corrections sont rensermées dans la période d'une année et dans les limites de 20" à 21", les premières différentielles des formules trigonométriques suffiront, pour en conclure les aberrations en déclinaison et en ascension droite nommant & l'obliquité de l'écliptique, & et ? la déclinaison et l'ascension droite de l'etoile; la trigonométrie fournit les équations suivantes, en faisant pour abréger, sin $\varepsilon \equiv h$, cos $\varepsilon \equiv k$;
- I. $\sin \delta = k \sin \beta + h \cos \beta \sin \lambda$; II. $\tan \beta = \frac{k \sin \lambda b \tan \beta}{\cos \lambda}$;

III. $\frac{\sin \beta}{\cos \delta} = k \tan \beta - h \sin \beta = A$; IV. $\cos \beta \tan \beta + k \sin \beta = B$;

V. cosβ cosλ = cos o cos?;

d'où A suit d'abord, $Ak + Bh = tang^{R}$, Bk - Ah = sin g. La differentiation des équations I. II. donnera

$$\frac{\partial^{2} \cos^{2} - \partial \beta (k \cos \beta - h \sin \beta \sin \lambda) + h \cdot \partial \lambda \cos \beta \cos \lambda,}{\cos^{2} \rho} = -\frac{b \partial \beta}{\cos^{2} \beta \cos \lambda} + \frac{k - b \tan \beta \sin \lambda}{\cos^{2} \lambda} \partial \lambda.$$

En faisant encore pour abréger, $\sin \bigcirc = m$, $\cos \bigcirc = n$, $\sin \varpi = p$, $\cos \varpi = q$, 20'',253 = a; 0'',34 = b; les valeurs précédentes de $\partial \beta$, $\partial \lambda$, deviendront

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = -\sin \beta \left((am - bp) \cos \lambda - (an - bq) \sin \lambda \right),$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} = -\sec \beta \left((an - bq) \cos \lambda + (am - bp) \sin \lambda \right).$$

En introduisant ces valeurs, on trouvera

$$\frac{\partial}{\partial s} \cos \delta = -(am - bp) \cos \lambda (k \sin \beta \cos \beta + h \cos^2 \beta \sin \lambda) + (an - bq) (k \sin \beta \cos \beta \sin \lambda - h + h \cos^2 \beta \sin^2 \lambda),$$

$$\frac{\partial e}{\cos^2 g} = \frac{am - bp}{\cos \beta \cos \lambda} (\frac{b \sin \beta}{\cos \beta \cos \lambda} - k \tan \beta) - \frac{an - bq}{\cos \beta \cos \lambda} k;$$
et en substituant III. IV. V.

$$\frac{\partial^{5}\cos^{5}=-(am-bp)\cos^{2}S\cos g(Ak+Bh)+(an-bq)(ABk\cos^{2}\delta-h+B^{2}h\cos^{2}\delta),}{\frac{\partial g}{\cos^{2}g}=\frac{am-bp}{\cos\delta\cos^{2}g}(Ah-Bk)-\frac{an-bq}{\cos\delta\cos^{2}g}k,}$$
 et en vertu des équations $Ak+Bh=tg\delta$, $Bk-Ah=\sin g\delta$, $Bk-A$

§. 9. Pour les deux siècles prochains, on peut, sans erreur sensible, supposer $\varepsilon = 23^{\circ} 27'$, ce qui donne

 $\partial z = -(am - bp) \sec \delta \sin z - (an - bq) k \sec \delta \cos z$.

ah = 8',0597; ak = 18'',5803; bh = 0'',1353; bk = 0'',3119.

$$\frac{18'',58 \cdot \cos \odot \sin 2 - 20'',253 \cdot \sin \odot \cos}{+0'',34 \cdot \sin \varpi \cos 2 - 0'',312 \cdot \cos \varpi \sin 2} - \cos \delta \left[\frac{8'',06 \cdot \cos \odot - 0'',135 \cdot \cos \varpi}{18'',58 \cdot \cos \odot \cos 2 + 20'',253 \cdot \sin \odot \sin 2} \right]$$

$$\frac{18'',58 \cdot \cos \odot \cos 2 + 20'',253 \cdot \sin \odot \sin 2}{-0'',312 \cdot \cos \varpi \cos 2 - 0'',34 \cdot \sin \varpi \sin 2} \right].$$

On peut donner à ces équations la forme suivante:

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{c}} = \sin^{5} \left[\frac{19'', 417 \cdot \sin(\tilde{c} - \tilde{\omega}) - 0', 836 \cdot \sin(\tilde{c} + \tilde{\omega})}{10'', 03 \cdot \cos(\tilde{c} - \tilde{\omega}) - 4'', 03 \cdot \cos(\tilde{c} + \tilde{\omega})} \right] \\
+ \sin^{5} \left[\frac{0'', 326 \cdot \sin(\tilde{\omega} - \tilde{c}) + 0', 014 \cdot \sin(\tilde{\omega} + \tilde{c})}{10'', 068 \cdot \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}) + 0'', 068 \cdot \cos(\tilde{\omega} + \tilde{\omega})} \right] \\
+ 0'', 068 \cdot \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}) + 0'', 068 \cdot \cos(\tilde{\omega} + \tilde{\omega})} \\
+ \sec^{5} \left[\frac{19', 417 \cdot \cos(\tilde{c} - \tilde{c}) - 0'', 836 \cdot \cos(\tilde{c} + \tilde{\omega})}{10'', 326 \cdot \cos(\tilde{\omega} - \tilde{c}) - 0'', 014 \cdot \cos(\tilde{\omega} + \tilde{c})} \right].$$

La premiere équation peut encore prendre cette forme, en négligeant les termes qui sont au dessous de 0',01;

$$\begin{array}{l} \partial \delta = + 9'', 708 \cdot \cos(\bigcirc + \delta - \varsigma) - 9'', 708 \cdot \cos(\varsigma + \delta - \bigcirc) \\ - 4'', 03 \cdot \cos(\bigcirc - \delta) & - 4'', 03 \cdot \cos(\bigcirc + \delta) \\ + 0'', 418 \cdot \cos(\bigcirc + \varsigma - \delta) - 0', 418 \cdot \cos(\bigcirc + \varsigma + \delta) \\ + 0'', 163 \cdot \cos(\varsigma + \delta - \varpi) & - 0'', 163 \cdot \cos(\varpi + \delta - \varsigma) \\ + 0'', 068 \cdot \cos(\varpi - \delta) & + 0'', 068 \cdot \cos(\varpi + \delta). \end{array}$$

§. 10. Le même procédé donnera aux aberrations en latitude et en longitude (§. 7.), cette forme:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \beta} = + \frac{10'',126 \cdot \cos(\phi + \beta - \lambda) - \frac{10'',126 \cdot \cos(\lambda + \beta - \phi)}{10'',17 \cdot \cos(\lambda + \beta - w) - \frac{0'',17 \cdot \cos(w + \beta - \lambda)}{10'',34 \cdot \cos(\lambda - w)};$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} = \frac{\partial \beta}{\partial \lambda$$

§. 11. Si l'on suppose $\varepsilon = 23^{\circ} 26'$ et $\varepsilon = 23^{\circ} 28'$, au lieu de $23^{\circ} 27'$, les coëfficiens 19'',417; 9'',708; 4',03; 0'',836; 0'',418; deviennent 19'',418 et 19'',415; 9'',709 et 9'',708; 4'',027 et 4'',033; 0'',835 et 0'',837; 0'',418 et 0'',419; et les changemens des autres termes sont tout-à-fait insensibles. On voit donc que les équations précédentes peuvent être employées, sans aucun changement, pendant plus de mille ans avant et après 1800, si l'on donne à 2, 2, les valeurs qui répondent à l'époque donnée. Il faut cependant faire une exception relativement à l'aberration en ascension droite, si les étoiles sont très-peu éloignées du pole.

§. 12. L'arc $\lambda - \varpi$ ne changeant que de 12" par an, on peut regarder comme constans, pendant un long intervalle de tems, les termes ayant pour árgumens β et $\lambda - \varpi$, d'autant que ces termes eux-mêmes sont très-petits. La longitude de l'apogée ϖ tera = 100° l'an 1830: en donnant donc à β , λ , les valeurs qu'elles auront à la même époque, on peut calculer, pour chaque étoile; les quantités, 0",34. sin β sin $(\lambda - 100°) = A$, et 0",34. sec β cos $(\lambda - 100°) = B$.

Alors il viendra

aberr. lat. = 10'', $126 \cdot \cos(\bigcirc + \beta - \lambda) - 10''$, $126 \cdot \cos(\lambda + \beta - \bigcirc) - A$, aberr. long. = -20'', $253 \cdot \frac{\cos(\bigcirc + \lambda)}{\cos\beta} + B$;

équations dont en peut se servir pendant tout le siècle présent.

MÉMO-IRE

SUR L'APPLICATION À LA GÉOMÉTRIE PLANE

DE PLUSIEURS PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLOÏDE DE REVO-LUTION ET DU CÔNE, ET RÉSOLUTION DE QUELQUES PRO-BLÊMES RELATIFS AUX COURBES DU SECOND DÉGRÉ.

PAR

P. D. BAZAINE,

COLONEL DU CORPS DES INGÉNIEURS DES VOIES DE COMMUNICATION.

Présenté à la Conférence le 6 Mai 1818.

L'Analyse appliquée à la géométrie dans l'espace, ne donne pas seulement la solution de tous les problèmes qui dépendent de la considération des surfaces ou des corps dont la génération est connue; elle fournit encore la démonstration d'une foule de propriétés particulières qui appartiennent à des figures planes, et que leur importance et l'usage qu'on en peut faire rendent également propres à étendre le domaine de la géométrie ordinaire.

J'essayerai dans ce mémoire de donner une première preuve de cette assertion, et de faire voir comment on peut déduire de considérations analytiques, qui se rapportent à deux des surfaces les plus connues du second dégré, plusieurs propriétés dont l'application ofire un nouveau moyen de solution pour un assez grand nombre de problemes relatifs à des courbes planes.

Considérons dans l'espace deux droites A et B situées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre; menons par la ligne qui rencontre à la fois ces deux droites et qui mesure

leur plus courte distance, un plan perpendiculaire à l'une d'elles, à A par exemple. Par cette plus courte distance et par la seconde droite B, faisons passer un nouveau plan; supposons enfin que ce dernier plan tourne autour de la droite A, en faisant toujours le même angle avec le plan moné perpendiculairement à cette droite; il est visible que dans ce mouvement, la seconde droite B engendrera autour de la première A, une surface composée de deux nappes égales et symétriques réunies par un cercle qui aura pour rayon la plus courte distance des deux droites.

C'est de cette surface que nous allons nous occuper, et d'abord nous proposerons de déterminer son équation.

Prenons pour plan des x, y, (Fig. 1.) le plan du cercle Fig. 1. décrit par la plus courte distance des deux droites, et supposons que l'axe fixe soit l'axe des z lui-même: cet axe fixe sera projeté en A. Soit M la projection de l'un des points de la surface; la génératrice qui passera par ce point se projetera évidemment suivant la tangente MC au cercle AC, et d'après le mode de génération de la surface, le rapport de z à MC étant égal à la tangente de l'angle que forme la génératrice avec le plan des x, y, sera constant pour tous les points de la surface. En appelant m cette tangente, on aura donc $\frac{z}{MC} = m$. Or $MC = \sqrt{AM^2 - AC^2}$, ou si l'on fait AC = r, $MC = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$: donc il viendra pour l'équation de la surface:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} = m.$$
Ou bien $z^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2 - m^2 r^2$ - - - - (1).

Cette équation donnant pour z deux valeurs égales et de signes contraires, fait voir comme nous l'avons observé déjà, que la surface est formée de deux nappes égales et parfaitement symétriques par rapport au plan des xy.

Si dans l'équation (1) on fait successivement x = 0, y = 0.

•n obtiendra:

$$z^{2} \equiv m^{2} y^{2} - m^{2} r^{2}$$
$$z^{2} \equiv m^{2} x^{2} - m^{2} r^{2},$$

Equations qui toutes deux appartiennent à la même hyperbole située sur des plans différents, et comme la position des axes AX et AY est absolument arbitraire, on en conclut immédiatement qu'un plan quelconque passant par la droite fixe, coupe la surface suivant une hyperbole qui est la même pour tous les plans coupants. La surface proposée peut donc être considérée comme engendrée par la révolution de cette hyperbole constante tournant autour de l'axe fixe. Cette propriété remarquable a fait donner à cette surface le nom d'hyperboloïde de révolution.

En supposant que le point M sût la projection d'un point de la surface, supérieur au plan des xy, nous avons obtenu l'équation de cette surface, en menant par le point M la tangente MC, et en regardant cette tangente comme la projection de la génératrice, c'est-à-dire en considérant la surface comme engendrée par une droite qui se meut de C en C': mais si par le même point M, nous menons la ligne MC' tangente au cercle AC, et si nous regardons cette ligne comme la projection de la génératrice, nous parviendrons évidemment à la même équation. La surface proposée peut donc être considérée comme engendrée, soit par la droite projetée en CM, et qui se meut de C en C', soit par la droite projetée en C'M, et qui se meut de C' en C. L'hyperboloide de révolution jouit ainsi de cette nouvelle propriété, que par chacun de ses points on peut toujours mener deux droites entièrement comprises sur la surface, et qui toutes deux sont des génératrices de cette surface.

Nous allons maintenant faire voir que ce même hyperboloïde de révolution, coupé par un plan disposé d'une maniere convenable, donne ainsi que le cône, toutes les courbes du second dégré.

Pour rendre notre démonstration plus facile, et montrer en même temps la liaison qui existe entre les courbes données par une même section dans le cône et l'hyperboloïde de révolution.

Tab. 3. nous menerons par l'origine A (Fig. 2.), une droite AB qui fasse Fig. 2. avec l'axe des x un angle égal à celui que forme la génératrice de l'hyperboloïde avec le plan des xy. Cette droite en tournant autour de l'axe des z sans changer d'inclinaison, engendrera un cône droit dont le sommet sera l'origine A, et dont la projection sur le plan des xz rabattu sur celui des xy, sera représentée par DAB. L'équation de cette surface conique sera évidemment:

$$z^{2} = m^2 x^2 + m^2 y^2$$

Pour remplir le but que nous nous proposons, nous devrions prendre l'équation générale d'un plan quelconque P.

$$z = Ax + By + C$$

et combinant cette équation avec celles du cône et de l'hyperboloïde, faire voir que les équations résultantes de cette combinaison donnent des courbes du second dégré dépendantes de la relation qui existe entre les coëfficients A, B et C. Mais nous pouvons simplifier de beaucoup les calculs, en prenant pour axe des y par exemple, une parallèle à la trace du plan P sur le plan des xy. Cette transformation dans les coordonnées ne changera rien aux équations du cône et de l'hyperboloïde; elle réduira seulement l'équation du plan sécant à z = Ax + C, et les considérations relatives aux sections dans les deux surfaces, n'en seront pas moins générales.

Tous les cas à examiner nous seront donnés en faisant successivement les hypothèses suivantes: A = 0; A < m; A = m; A > m.

 1^{er} Cas: L'hypothèse A = 0 en réduisant l'équation du plan à z = C, donne pour les sections faites par ce plan dans le cône et l'hyperboloïde, les équations suivantes:

$$C^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2 : C^2 + m^2 r^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2.$$

Ces équations appartiennent toutes deux à des cercles dont des rayons sont pour le 1 er, $\frac{C}{m}$; pour le 2^{eme} , $\sqrt[3]{\frac{C^2}{m^2} + r^2}$.

Non seulement ce résultat apprend, comme on devait s'y attendre, que les sections faites dans les deux surfaces, par des plans parallèles au plan des xy, sont des cercles dont les centres se trouvent sur l'axe fixe, mais il fournit encore un moyen simple et élégant de tracer par points une hyperbole dont on connaît les axes principaux.

Nous avons vu en effet que le plan des xz coupait l'hyperboloïde de révolution suivant une hyperbole dont l'équation est $z^2 \equiv m^2 \, x^2 + m^2 \, r^2$. Une simple discussion de cette équation ferait voir que les points S et S' où le cercle S'KS rencontre l'axe des x, ne sont autre chose que les sommets de la courbe, et que les génératrices extrêmes du cône projeté en DAB, sont les asymptotes de cette même courbe. En considérant donc GG' comme la projection d'une section parallèle au plan des xy, on aura d'apprès ce qui précède:

$$FH = \frac{C}{m}; FG = \sqrt{\frac{C^2}{m^2} + r^2}.$$

Ainsi en prenant AI = FH, l'hypothènuse IK du triangle rectangle IAK sera égale à FG. Si donc on ramène au moyen d'un arc de cercle, IK de I en L, et si l'on mène LG parallèle à l'asymptote AB, l'intersection de cette parallèle avec la ligne FH prolongée, donnera un point G de l'hyperbole.

 2^{eme} Cas: (A < m): L'équation du plan sécant z = A.r + C qu'on peut écrire ainsi : z = A (x + b), devient en élevant ses deux membres au quarré :

$$z^2 = A^2 x^2 + 2 A^2 b x + A^2 b^2$$
,

qui retranchée de l'équation $z^2 = m^2 x^2 + m^2 y^2$ appartenante au cône, donne pour l'équation de la courbe d'intersection projetée sur le plan des xy;

$$(m^2 - A^2)x^2 + m^2y^2 - 2A^2bx - A^2b^2 \equiv 0 \dots (2).$$

En discutant cette équation, on reconnaîtra aisément qu'elle appartient à une ellipse rapportée à deux axes rectangulaires qui passent par un de ses foyers, et dont l'un suit la direction de son grand axe. Les coordonnées de ses sommets se déduiront de l'équation:

$$(m^2 - A^2) x^2 - 2 A^2 b x - A^2 b^2 = 0$$
,

r²

qui peut se mettre sous la forme :

$$((m+A)x+Ab)((m-A)x-Ab)=0,$$

et donne par conséquent : $x = -\frac{Ab}{m-A}$ et $x = \frac{Ab}{m-A}$.

On trouvera d'ailleurs pour l'expression du demi-grand axe a et du demi-petit axe a' de cette ellipse: $a = \frac{m A b}{m^2 - A^2}$; $a' = \frac{A b}{\sqrt{m^2 - A^2}}$, et l'abscisse du centre sera égale à $\frac{A^2 b}{m^2 - A^2}$.

La scule disposition du plan coupant fait voir que la courbe qui résulte de l'intersection de ce plan et du cône, qui se projette suivant l'ellipse dont nous venons de parler, a pour valeurs de ses demi-axes principaux, $\frac{m A b \sqrt{1+A^2}}{m^2-A^2}$ et $\frac{A b}{\sqrt{m^2-A^2}}$. La première de Tab. III. ces quantités représente EF (Fig. 3.), et la séconde, la corde LM Fig. 3. du cercle horisontal qui passe par le point G milieu de EF.

La combinaison des équations de l'hyperboloïde et du plan sécant, donne pour la projection de leur intersection sur le plan des xy;

 $(m^2 - \Lambda^2) x^2 + m^2 y^2 - 2 \Lambda^2 b x - \Lambda^2 b^2 - m^2 r^2 \equiv 0$, équation qui ne diffère de la précédente (2) que par le terme constant $-m^2 r^2$; elle appartient à une ellipse rapportée à deux axes rectangulaires qui passent par un des points de son grand axe et dont l'un se confond avec ce grand axe lui-même.

Pour connaître les coordonnées des sommets de cette nouvelle courbe, on résoudra l'équation:

$$(m^2 - A^2) x^2 - 2 A^2 bx - A^2 b^2 - m^2 r^2 = 0 ,$$
 qui donne : $x = \frac{A^2 b}{m^2 - A^2} + \frac{m \sqrt{A^2 (b^2 - r^2) + m^2 r^2}}{m^2 - A^2} .$

Cette valeur de x apprend que l'abscisse du centre $\frac{A^2b}{m^2-A^2}$, est la même que pour l'ellipse résultante de l'intersection du plan sécant et du cône. Elle fait voir aussi que le demi-grand axe α de la courbe nouvelle a pour expression $\frac{m\sqrt{A^2(b^2-r^2)+m^2r^2}}{m^2-A^2}$, ou bien $\sqrt{\frac{m\cdot A^2b^2}{(m^2-A^2)^2}+\frac{m^2r^2}{m^2-A^2}}$: d'où $\alpha=\sqrt{\alpha^2+\frac{m^2r^2}{m^2-A^2}}$, α étant, comme on l'a vu, le demi-grand axe de l'ellipse obtenue précédemment.

On trouverait par un calcul fort simple, pour le demi-petit axe α' de la nouvelle ellipse:

$$a' = \frac{\sqrt{A^2(b-r^2) + m^2r^2}}{\sqrt{m^2 - A^2}} = \sqrt{a'^2 + r^2}$$

Si l'on remarque que le point g (fig. 4.) étant la projection τ_{ab} . III. du centre de l'ellipse, on a $ge = g/\equiv a$, et $gp = gn \equiv \alpha$; on en Fig. 4. conclura immédiatement que pe = fn, et que par consequent PE = FN, c'est-a-dire que les parties d'une droite quelconque interceptees entre les asymptotes et l'hyperbole, sont égales entr'elles. Cette propriété a déja été démontrée d'une autre manière dans plusieurs traités des sections coniques.

La construction des quantités qui déterminent la courbe résultante de l'intersection de l'hyperboloide par un plan, ne présente aucune espèce de difficultés. Nous observerons sculement que dans l'expression de $\alpha = 1$ $a^2 + \frac{m}{m^2 - A^2}$, le terme $\frac{m^2 r^2}{m - A^2}$ est le quarré du demi-grand axe de la section faite dans l'hyperboloïde par un plan mené par l'origine des coordonnees parallèlement au plan sécant. Et en eflet ce plan ayant pour équation z = Ax,

coupe l'hyperboloïde suivant une courbe dont la projection sur le plan des xy a pour équation:

 $(m^2 - A^2) x^2 + m^2 y^2 = m^2 r^2$.

Or cette équation est évidemment celle d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et si l'on y fait successivement $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, on trouvera pour expressions de ses demi-axes principaux r et $\frac{m r}{\sqrt{m^2 - \Lambda^2}}$

Pour construire cette dernière quantité dont nous ferons Tab. III. usage par la suite, on menera par le point A (Fig. 5.) une paralFig. 5. lèle au plan sécant. Par l'extrémité du rayon AS = r, on élevera la perpendiculaire BD. Du point S comme centre avec un rayon SB, on décrira le demi-cercle BED: par le point C où la parallèle au plan sécant rencontrera SB, on élevera CE perpendiculaire sur BD; on joindra le point E et le point S; on menera CF parallèle à ES, et l'on joindra les points F et D. AG menée parallèlement à FD, donnera SG pour la ligne cherchée.

Pour se rendre raison de cette construction, on observera que l'on a SC \equiv Ar, et SB \equiv SD \equiv mr, donc aussi: CD \equiv mr + Ar, CB \equiv mr - Ar, et CE \equiv SF \equiv $\sqrt{m^2r^2 - A^2r^2}$.

De plus les triangles semblables FSD, ASG donnent la proportion:

$$\begin{array}{c} {\rm S \; F \; : \; S \; A \; : : \; S \; D \; : \; S \; G \; ,} \\ {\rm ou \; \; bien \; } \sqrt{m^2 \, r^2 - A^2 \, r^2 : r \; : : \; m \; r \; : \; S \; G \; ;} \\ {\rm donc \; S \; G \; = \; \frac{m \; r^2}{\sqrt{m^2 \, r^2 - A^2 \, r^2}} \; = \; \frac{m \, r}{\sqrt{m^2 - A^2}} \; .} \end{array}$$

 3^{eme} Cas. (A $\equiv m$): l'équation du plan sécant devient pour ce cas particulier: $z \equiv m \ (x + b)$.

La courbe d'intersection de ce plan et du cône, projetée sur le plan des xy, a pour équation:

$$m^{2} (x + b)^{2} = m^{2} x^{2} + m^{2} y^{2}$$
ou bien: $y^{2} = 2 b x + b^{2}$ (3).

Cette équation appartient évidemment à une parabole rapportée à deux axes rectangulaires qui passent par son foyer, et dont l'un se confond avec son axe principal. Son paramètre est égal à 2b (1 $+\sqrt{2}$).

L'hyperboloïde de révolution est coupé par le même plan suivant une courbe dont la projection sur le plan des xy, a pour équation:

Cette courbe se projette donc comme la précédente suivant une parabole sur le plan des xy, et par conséquent est elle même une parabole située dans le plan sécant.

Si l'on compare les équations (3) et (4), on obtiendra en appelant Y, les ordonnées de la 2^e parabole: $Y^2 = y^2 + r^2,$

résultat très facile à construire; et qui montre la liaison qui existe

entre les paraboles résultantes d'une même section faite dans le cône et l'hyperboloïde.

En faisant $b \equiv 0$ dans l'équation du plan sécant, c'est - à dire en supposant qu'il passe par le centre du cône, on verra que ce plan rencontre le còne suivant l'arête située sur le plan xz, et coupe l'hyperboloïde suivant deux droites dont les équations sont : $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = r \\ mx$ et $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = r \\ mx$. On conclura de là que tout plan tangent au cône, coupe l'hyperboloïde de révolution suivant deux génératrices parallèles à l'arête suivant laquelle le cône est touché par le plan.

 4^{eme} Cas. (A > m): Considérons d'abord le cas particulier où le plan sécant passe par le centre du cône. Son équation étant alors z = Ax, on obtient pour la projection de son intersection avec le cône, sur le plan des xy:

Ces deux équations appartiennent aux génératrices suivant lesquelles le cône est coupé par le plan.

Ce même plan coupe l'hyperboloïde suivant une courbe qui projetée sur le plan des xy, a pour équation : $(A^2 - m^2) x^2 - m^2 y^2 = m^2 r^2 (6).$

$$(A^2 - m^2) x^2 - m^2 y^2 \equiv m^2 r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Cette projection est évidemment une hyperbole rapportée à ses axes et à son centre, et ses asymptotes sont précisement les projections des arêtes suivant lesquelles le cône a été coupé par le plan sécant.

Le demi axe réel de cette hyperbole est égal à r, et son demi-axe imaginaire à $\frac{m r}{\sqrt{\Lambda^2 - m^2}}$. Nous donnerons ici la construction de cette dernière quantité, comme devant servir à la résolution de plusieurs problèmes que nous nous proposerons par la suite. Cette construction est analogue à celle que nous avons indiquée page 262.

Après avoir mené par l'origine A (Fig. 6.) une parallèle Tab. III. Fig. 6. AC au plan sécant, on élève à l'extrémité S du rayon AS $\equiv r$, la perpendiculaire GH: on prend CH = CB, et sur IID comme diamètre on décrit le demi-cercle HED. Par le point C on élève CE perpendiculaire à HD, et l'on achève la construction comme à la page 262. La ligne SG qu'on obtient ainsi est la grandeur cherchée. En effet on a: SC = Ar et SB = SD = mr; donc CD = Ar + mr et CH = CB = Ar - mr: de là on déduit CE \equiv SF $\equiv \sqrt{A^2r^2 - m^2r^2}$: de plus les triangles semblables ASG, FSD, donnent la proportion:

on bien
$$\sqrt{A^2 r^2 - m^2 r^2} : r :: m r : S G$$

done $S G = \frac{m r^2}{\sqrt{A^2 r^2 - m^2 r^2}} = \frac{m r}{\sqrt{A^2 - m^2}}$

Passons maintenant au cas général où le plan sécant a pour équation: z = A(x + b). En combinant cette équation avec celle du cône, on trouvera pour la courbe d'intersection projetée sur le plan des xy;

$$(\Lambda^2 - m^2)x^2 - m^2y^2 + 2\Lambda^2bx + \Lambda^2b^2 = 0 \dots (7).$$

La discussion de cette équation fera voir qu'elle appartient à une hyperbole dont l'un des foyers est l'origine même des coordonnées.

Les abscisses des sommets de cette courbe se déduiront de l'équation:

$$A^{2} (x + b)^{2} - m^{2} x^{2} \equiv 0 \text{ qui donne} \begin{cases} x \equiv -\frac{Ab}{A - m} \\ x \equiv -\frac{Ab}{A + m} \end{cases}$$

et l'abscisse du centre sera par conséquent égale à

$$-\left(\frac{Ab}{A+m}+\frac{1}{2}\left(\frac{Ab}{A-m}-\frac{Ab}{A+m}\right)=-\frac{A^2b}{A^2-m^2}$$

On obtiendra pour les asymptotes de cette courbe:

$$y = \pm \frac{\sqrt{A^2 - m^2}}{m} \left(x + \frac{A^2 b}{A^2 - m^2} \right).$$

On en conclura par conséquent (voyez les équations (5) de la page 264.), que ces asymptotes sont paralleles aux arêtes suivant lesquelles le cône est coupé par un plan mené par son sommet parallelement au plan sécant.

Enfin si l'on appelle a, a' le demi-grand axe et le demipetit axe de cette hyperbole, on trouvera:

$$a = \frac{m \wedge b}{\Lambda^2 - m^2}; \quad a' = \frac{\wedge b}{\sqrt{\Lambda^2 - m^2}}.$$

Le même plan sécant coupera l'hyperboloïde de révolution suivant une courbe qui projetée sur le plan des xy, aura pour équation:

 $(A^2 - m^2)x^2 - m^2y^2 + 2A^2bx + A^2b^2 + m^2r^2 = 0$ qui ne diffère de l'équation (7) que par le terme constant m^2r^2 .

Cette équation appartient à une hyperbole dont l'axe réel se confond avec l'axe des x.

Les coordonnées des sommets réels de cette courbe seront données par l'équation :

$$(A^2 - m^2) x^2 + 2 A^2 b x + A^2 b^2 + m^2 r^2 = 0$$
 d'où l'on tire $x = -\frac{A^2 b}{A^2 - m^2} + \frac{m \sqrt{A^2 (b^2 - r^2) + m^2 r^2}}{A^2 - m^2}$.

Ce résultat fait voir que le centre de la nouvelle hyperbole est le même que celui de l'hyperbole du cône, et que son demiaxe réel a pour expression $\frac{m\sqrt{A^2(b^2-r^2)+m^2r^2}}{A^2-m^2}$.

En nommant donc
$$\beta$$
 ce demi-axe, on aura:
$$\beta = \frac{m\sqrt{\lambda - (b^2 - r^2 + m^2 r^2)}}{\Delta^2 - m^2} = \sqrt{\frac{m^2 \ln b^2}{(\Delta^2 - m^2)^2} - \frac{m^2 r^2}{\Delta^2 - m^2}}.$$
Ou bien $\beta = \sqrt{a^2 - \frac{m^2 r^2}{\Delta^2 - m^2}}.$

En appelant β' le demi-axe imaginaire, on trouvera: $\beta' = \sqrt{\alpha'^2 - r^2}.$

Les asymptotes de la courbe nouvelle ayant pour équation ? $y = + \frac{\sqrt{A^2 - m^2}}{m} \left(x + \frac{A^2 b}{A^2 - m^2} \right),$

se confondent par conséquent avec celles de l'hyperbole du cône.

Soit EF (Fig. 7.) la trace du plan sécant; soient LM et Tab. III. Fig. 7. KI les projections des arêtes suivant lesquelles un plan mené par le point A parallèlement au plan sécant, coupe le cône projeté en Si le point C est le centre de la courbe d'intersection de l'hyperboloïde et du plan, projetée sur le plan des xy, les droites SR et PQ mences par ce point parallèlement à LM et KI, seront

d'après ce qui précède, les projections des asymptotes de la sourbe, et leurs équations seront:

$$y = -\frac{\sqrt{\lambda^{2} - m^{2}}}{m} \left(x + \frac{A^{2}b}{A^{2} - m^{2}} \right)$$

$$y = +\frac{\sqrt{A^{2} - m^{2}}}{m} \left(x + \frac{A^{2}b}{A^{2} - m^{2}} \right)$$
(8).

Cela posé, menons par le centre A, les lignes AH, Ah perpendiculaires aux droites KI et LM: ces perpendiculaires auront pour équations:

$$y = + \frac{m}{\sqrt{\Lambda^2 - m^2}} x.$$

$$y = -\frac{m}{\sqrt{\Lambda^2 - m^2}} x.$$

Combinant ces dernières équations avec les équations (5), on trouvera pour les abscisses des points d'intersection H et h, une valeur commune $x \equiv b$, et l'on en conclura que ces points d'intersection sont situés sur la trace horisontale du plan secant : Mais la perpendiculaire AH est évidemment la trace horisontale du plan tangent au cône qui renferme à la fois les génératrices paralleles du cône et de l'hyperboloide projetees en AI et en GO; de plus AI est la projection de l'intersection de ce plan tangent par le plan mené par le point A, parallelement au plan secant; donc HR est aussi la projection de l'intersection de ce meme plan tangent par le plan qui coupe l'hyperboloide.

De la on deduit comme conséquence immédiate le principe suivant, dont on fait usage dans la géométrie descriptive; lorsqu'un plan coupe un hyperboloide de revolution suivant une courbe à deux branches, on doit pour obtenir les asymptotes de cette courbe, mener par le sommet du cône droit dont toutes les genératrices sont paralleles a celles de l'hyperboloide, un plan parallele au plan sécant; on determine ensuite les arètes suivant lesquelles le cône est coupé par ce plan parallele, et par chacune de ces arètes on mene un plan tangent au cône; les intersections de ces plans tangents et du plan secant sont les asymptotes demandees.

APPLICATIONS DES FORMULES

QUI PRÉCÉDENT À PLUSIEURS PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

Quelle que soit une courbe du second degré, on peut toujours la considérer comme la projection horisontale de la section faite par un plan dans un cône droit vertical dont le sommet est l'un des foyers de la courbe proposée. Ce principe qui n'est qu'une conséquence de ce qui précède, fournit un moyen de description qui s'applique à toutes les courbes du second ordre.

Tab. III. 1°. Soit S'S (Fig. 8.) le grand axe d'une ellipse: F' et F Fig. 8.. étant ses deux foyers, si l'on fait S'F' __ C, SF __ C' on aura d'après les résultats obtenus page 260,

Substituant à la place de B cette valeur dans m - A, il vient : $m - A = \frac{2 A C}{C - C}$:

mais l'une des quantités A, b ou m étant indéterminée, nous ferons A = 1; nous obtiendrons de cette manière:

$$m = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}'}{\mathbf{c}' - \mathbf{c}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2).$$

Si donc on élève au point F, la perpendiculaire

$$FA = FA' = S'S = C + C'$$

et si l'on joint les points A et A' avec le point F', on pourra considérer les lignes F'B, F'B' comme les projections des arètes extrêmes du cône vertical qui, coupé par le plan CB, donne une courbe qui se projette suivant l'ellipse dont il s'agit.

Pour décrire la courbe par points, menons une ligne quelconque GH perpendiculaire à l'axe F'G. Par le point E où cette Igne rencontre CB, abaissons EN parallèle à GF, et décrivons du point F comme centre, un cercle dont le rayon soit égal à GH. Ce cercle coupera la perpendiculaire EN en deux points M et N qui appartiendront à la courbe. Cette construction répétée pour une suite de perpendiculaires à l'axe du cône, fournira autant de points de la courbe qu'on voudra en obtenir.

 2° . Pour trouver les valeurs de b et de m qui conviennent à l'hyperbole, il suffira de faire C' négatif dans les expressions (1) et (2); il viendra ainsi :

$$b = \frac{z \cdot C \cdot C'}{C + C'} \cdot . \cdot . \cdot . \cdot (3);$$

$$m = \frac{C' - C}{C + C'} \cdot . \cdot . \cdot (4).$$

Si donc S et S' (Fig. 9.) représentent les sommets d'une Tab. IV-hyperbole dont F et F sont les foyers, on élevera au point F' la Fig. 9. perpendiculaire F'A; on prendra F A' = F'A, et l'on menera par le 2ème foyer F, les deux droites A'D et AD' qu'on devra considérer comme les projections des arêtes extrêmes du cône qui est coupé par le plan CB suivant une courbe à deux branches dont la projection est l'hyperbole proposée.

Pour obtenir une suite de points de cette hyperbole, on menera une perpendiculaire quelconque GH à l'axe du cône. Du point E où cette perpendiculaire rencontrera CB, on abaissera EM, perpendiculaire sur l'axe de la courbe, et du point F comme centre avec un rayon égal à GH, on décrira un cercle qui coupera EM en deux points M et N qui appartiendront à l'hyperbole.

 3° . L'équation obtenue pour la parabole page 262, étant indépendante de m et donnant $b = \frac{1}{5}p$ (p representant le paramètre de la combe) fait voir que si F et S (Fig. 10) sont le foyer rig. 16, et le sommet d'une parabole quelconque, cette parabole peut être considérée comme la projection de l'intersection d'un cone verti-

eal arbitraire projeté en AFB, par un plan dont la trace est parallele à FB et qui passe par un point D de l'axe, tel que SD = SF.

La construction employée déjà précédemment pour l'ellipse et l'hyperbole, sournit autant de points de la courbe qu'on veut.

Les mêmes considérations donnent aussi un moyen général de mener une tangente à une courbe quelconque du 2^e dégré. Supposons d'abord le point situé sur la courbe et proposons nous de mener, par exemple, une tangente à la parabole précédente par le point N. En joignant ce point et le foyer, la ligne FN sera évidemment la projection de l'arête du cône qui passe par le point E de la section du plan coupant; IF perpendiculaire à FN sera donc la trace du plan qui touchera le cône suivant cette arête, et le point I, intersection de IF avec la trace DK du plan coupant, appartiendra à la tangente cherchée. Ainsi pour obtenir cette tangente; il suffira de joindre le point I et le point N.

Cette construction n'est point particulière à la parabole: elle s'applique également à toutes les courbes du second ordre. Les Tab. IV. deux figures 11. et 12. montrent son application à l'ellipse et à Fig.11.et 12. l'hyperbole.

Supposons actuellement (Fig. 13.) le point N extérieur à la courbe. On pourra le considérer comme la projection d'un point de l'horisontale comprise dans le plan sécant, et abaissée de la quantité PQ au dessous du plan de projection. Menons par cette horisontale, un plan perpendiculaire à l'axe du cône. Ce plan coupera le cône suivant un cercle de rayon GH. Si du point F comme centre on décrit un cercle avec ce rayon, et si par le point donné N, on mêne une tangente à ce cercle, cette tangente NO sera parallele à la trace horisontale du plan tangert au cône qui passe par le point N. El parallèle à NO, sera donc la trace

de ce plan tangent sur le plan de projection, et la ligne NI sera par conséquent la tangente cherchée; le point de contact s'obtiendra immédiatement en élevant du foyer F la perpendiculaire FT sur la ligne FI.

Il est évident que le problème proposé aura deux solutions, puisqu'on pourra mener du point A deux tangentes au cerele de rayon GH.

Les deux figures 14, et 15, font connaître l'application de Tab. IV. la même construction à l'hyperbole et à la parabole.

Si le point donné N (Fig. 16.) était situé sur la trace DK Tab. V. du plan sécant, la construction précédente ne pourrait plus être Fig. 16. employée.

Mais alors on remarquerait que la ligne NF est la trace du plan tangent au cône, qui passe par le point donné, et que par conséquent FA perpendiculaire à NF est la projection de l'arête suivant laquelle le cône est touché. On déterminerait ensuite la projection verticale FK de cette arête, et du point II où cette projection verticale rencontre le plan sécant DC, on abaisserait la perpendiculaire HT qui par son intersection avec FA, donnerait le point de tangence cherché: Joignant T et N, on obtiendrait la tangente demandée.

En représentant par $A.v^2 + By^2 = 1$ l'équation des courbes du second dégré qui ont un centre, on verra que les quantités C et C' qui entrent dans la valeur de b sont égales, la 1^{eve} à $\frac{x}{\sqrt{A}} - \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{b}}$, la seconde à $\frac{1}{\sqrt{A}} + \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{b}}$, et que parconséquent $b = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Si l'on joint à cette expression la distance $\sqrt{\frac{1}{A} - \frac{1}{b}}$ du foyer au centre de la courbe, il viendra, en appelant X. l'abscisse du point D par rapport au centre:

$$X = \frac{1}{\Lambda + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{0}}.$$

Le demi grand axe $\frac{\tau}{\sqrt{A}}$ est donc moyenne proportionnelle entre cette abscisse et la distance du centre au foyer. De là on doit conclure que la trace DK n'est autre chose que le lieu de toutes les intersections des tangentes menées à la courbe par les points où cette courbe est rencontrée par des droites assujetties à passer par son foyer F. (Voyez la note jointe à ce mémoire page 278.)

Nous terminerons ces applications qu'on pourrait étendre beaucoup plus loin par la résolution du problème suivant:

Etant donnée une droite quelconque située dans le plan d'une courbe du second dégré, déterminer les intersections de cette droite et de la courbe, sans avoir besoin de construire cette courbe.

1°. Supposons d'abord qu'il s'agisse de déterminer les points d'intersection d'une hyperbole dont les axes principaux sont connus, et d'une droite quelconque XX.

Tab. V. Fig. 17.

Par le centre A de la courbe, on menera les asymptotes, et des points B et C où la droite XX eoupera ces asymptotes, on abaissera les perpendiculaires BG et CH. On prendra sur BG prolongée, une longueur GI ègale à la ligne SG dont nous avons indiqué la construction page 264. Du point E milieu de GH, on portera de côté et d'autre, des longueurs EL et EK égales à EI, et par les points L et K, on élevera des perpendiculaires qui couperont la ligne donnée XX en ses points d'intersection avec la eourbe.

Fig. 18. La ligne GI restant constante pour une même inclinaison de droite, on déterminera aisément les intersections de la courbe par une série de parallèles à la droite donnée BC, et l'on obtiendra ainsi autant de points de l'hyperbole qu'on voudra.

Fig. 19. Si la ligne XX était située dans l'angle des asymptotes, on abaisserait des points B et C les lignes BG, CH perpendiculaires

sur l'axe, et par le milieu E de GH, ou menerait une troisième perpendiculaire sur laquelle on prendrait une longueur EI égale à la ligne SG dont la construction est indiquée page 264. point I comme centre avec un rayon égal à EH, on décrirait un cercle qui couperait l'axe en deux points L et K, et par ces deux points élevant les perpendiculaires LM et KN, on aurait en M et N les intersections de la droite donnée et de l'hyperbole.

Les constructions précédentes supposent que la droite don- Tab. V. née XX rencontre à la fois les deux asymptotes de la courbe; si cette droite était parallèle à l'une de ces asymptotes, on observerait, en vertu des Equations obtenues pages 262 et 263 pour le cas ou A = m, que si AG est égale à b, on a: $AL = \frac{b^2 + r^2}{2b}$, en appelant r le demi - grand axe AS'.

On prendrait donc sur la ligne AD perpendiculaire à l'axe, une Fig. 24. longueur AC = AS; on menerait GC qu'on porterait de A en D; on prendrait AE = 2AG; on joindrait D et E, et l'on menerait DL perpendiculaire à DE; élevant enfin par le point L une perpendiculaire à l'axe, cette perpendiculaire couperait la ligne donnée en un point M qui serait le point d'intersection cherché de l'hyperbole et de la droite XX.

On aurait en esset de cette manière:

$$AL = \frac{AD^2}{AE} = \frac{\overline{CG}^2}{2AG} = \frac{b^2 + r^2}{2b}.$$

2°. Proposons nous actuellement de résoudre le problème proposé pour l'ellipse et la parabole.

SS' Etant le grand axe d'une ellipse, A et F ses deux foyers, Tab. VI. on demande de trouver, les intersections de cette courbe par une Fig. 22. droite XX.

Déterminons comme nous l'avons fait jusques ici, les arêtes extrêmes du cône qui coupé par le plan BC, donne pour projection de sa section, l'Ellipse proposee.

Il est évident que la droite XX pourra être considérée comme la projection horisontale d'une ligne qui serait située dans le plan sécant CB, et dont BC serait par conséquent la projection verticale. Or le plan vertical élevé suivant XX coupera le cône CAC' suivant une hyperbole qui projetée sur le plan vertical de projection rencontrera BC en deux points R et R', et ces deux points ramenés par des perpendiculaires sur la droite XX, donneront les intersections cherchées de cette droite et de l'ellipse; le problème est donc ramené à déterminer la position de ces points R et R' sur la droite BC.

La ligne donnée XX ayant pour équation $y \equiv ax + b$, le plan vertical mené par cette ligne coupe le cône suivant une hyperbole qui projeté sur le plan des XZ a pour équation:

$$Z^2 - m^2 (1 + a^2) x^2 - 2 m^2 a b x - m^2 b^2 \equiv 0.$$

Le demi axe récl de cette hyperbole est conséquemment égal à mb, et si l'on abaisse AE perpendiculaire sur XX, et EG perpendiculaire sur SS', les asymptotes auront pour équations:

$$Z \equiv m \sqrt{1 + a^2} (x - A G)$$

 $Z \equiv -m \sqrt{1 + a^2} (x - A G)$.

Pour les construire, on observera qu'elles sont parallèles aux arêtes dû cônc déterminées par la section du plan vertical élevé sur AD parallèle à XX.

Connaissant ces asymptotes, on construira mb, en abaissant du point H pour lequel AH $\equiv b$, une perpendiculaire sur AC. Cette perpendiculaire coupera l'axe. SS' en un point K tel que AK $\equiv mb$.

Cela posé, il ne restera plus pour achever la solution du problème qu'à déterminer comme on l'a fait page 273, les points d'intersection de la droite BC et d'une hyperbole dont GL et GI sont les asymptotes, et dont le demi axe réel est égal à AK.

La même solution s'appliquerait à la parabole.

En présentant ici la construction précédente pour l'Ellipse et la parabole, j'ai prétendu seulement faire connaître une méthode générale de résoudre le problème proposé. Du reste cette méthode est beaucoup trop compliquée pour qu'on puisse l'employer avec succès dans la pratique; on peut lui substituer avec avantage les solutions suivantes, qui sont infiniment plus simples.

ellipse et son grand cercie en des points L, D, M, E, situés sur Fig. 23. des lignes MN, EK, perpendiculaires à l'axe AB (p. 284), et si l'on mène à l'ellipse parallèlement à CD une tangente GF, qui coupe l'axe AB en un point F, je dis que la ligne FH menée par ce point tangentiellement au cercle, sera parallèle à la sécante CE.

En effet les points de contact H et G se trouvant sur une même perpendiculaire a l'axe AB (p. 284), les deux triangles DKC et GIF sont semblables et donnent la proportion:

DK: GI:: KC: IF,
mais on a aussi DK: GI:: EK: HI;
donc
EK: HI:: KC: IF;

donc à cause de l'égalité des angles EKC, HIF, les deux triangles EKC, HIF sont semblables, et les lignes FH et CE sont parallèles.

De ce théorème on déduit la construction suivante pour dé-Fig. 24. terminer les points d'inte section d'une droite XX et d'une ellipse dont le grand axe AB et les soyers F et F sont connus.

On décrit d'abord le cercle AIBK sur le grand axe AB. On abaisse du point F la perpendiculaire FC sur la droit XX, et du point F' comme centre avec un rayon égal au grand axe, on décrit un arc de cercle qui coupe cette perpendiculaire en un point C. Sur le milieu D de FC, on élève la perpendiculaire DE. Cette perpendiculaire est évidemment la tangente à l'ellipse, parallèle à la ligne donné XX. Du point E, on mene au cercle la tangente

EG, et par le point H où le grand axe est coupé par la droite donnée, on mêne IK parallèle à EG; enfin des points I et K où cette parallèle rencontre le cercle, on abaisse les ordonnées IL et KO qui par leurs intersections avec XX, donnent les points d'intersection cherchés de cette droite avec la courbe.

2°. L'équation de la parabole étant $y^2 \equiv px$, ses intersec-Tab. VI. Fig. 25. tions par la droite XX dont l'équation est y = a(x - b), seront données par l'équation:

Pour construire ces deux valeurs, on abaissera du foyer F sur la droite donnée XX, une perpendiculaire qui reneontrera l'axe des y, SB en un point D. On mènera DE parallèle à l'axe. Du point E, on élevera une perpendiculaire indéfinie sur l'axe, et l'on déterminera les points où cette perpendiculaire rencontre la courbe. Pour cela il suffira de prendre SF = SF et de décrire du foyer comme centre avec un rayon égal à F'G, un are de cercle; cet arc coupera la perpendiculaire qui passe par le point E, en deux points H et I. Portant de H en L et de I en K une longueur égale au double de SD et menant par les points L et K des parallèles à l'axe, on obtiendra par leurs intersections avec la droite XX, les points où eette droite coupe la parabole.

On a en effet d'après la position de la droite XX,

On a en effet d'après la position de la droite XX,
$$\begin{array}{c}
SD = \frac{p}{4a} \\
CG = \frac{p}{4a^2} \\
SG = b + \frac{p}{4a^2}
\end{array}$$
et GH = GI = $\sqrt{p(b + \frac{p}{4a^2})}$.

Enfin Ik ciant égal à HL et à 25D ou parconséquent:

$$BO = BS + GI + IK = ab + \frac{p}{2a} + \frac{p(b + \frac{p}{4a^2})}{p(b + \frac{p}{4a^2})} = a\alpha.$$
et $BP = BS - (GH - HI) = ab + \frac{p}{2a} - V p(b + \frac{p}{4a^2})$

Si la ligne XX au lieu de s'étendre au dessous de l'axe des abscisses, s'etendait au dessus, il suffirait de faire b négatif dans la formule précédente, et l'ou aurait :

$$ax = \frac{p}{2a} - ab + \sqrt{p(\frac{p}{4a^2} - b)}$$
.

Pour construire cette quantité, on abaisserait du fover F une Tab. VI. perpendiculaire sur la ligne XX. Par le point D où cette perpendiculaire rencontrerait l'axe des y, on menerait DH parallèle à l'axe de la parabole. Abaissant du point H l'ordonnée HK, on chercherait le point I où cette ordonnée rencontre la courbe. On prendrait ensuite SE = 25D, et l'on porterait de côté et d'autre du point E en G et en L une longueur égale à l'ordonnée KI. Les lignes GN, LM menées parallèlement à l'axe, détermineraient sur la droite donnée XX. les points d'intersections de cette droite et de la courbe.

$$\begin{array}{c} S B \equiv ab \\ S C \equiv b \\ S F \equiv \frac{p}{4} \end{array} \end{array} \text{ conséquemment } \begin{cases} S D \equiv \frac{p}{4a} \\ DH \equiv \frac{p}{4a^2} - b \\ K I \equiv \sqrt{p} \left(\frac{p}{4a^2} - b\right). \end{cases}$$

$$\text{Et comme } SE \equiv 2SD \equiv \frac{p}{2a} \text{ ct } EL \equiv EG \equiv KI,$$

$$\text{if vient: } BG \equiv SE - SB + EG \equiv \frac{p}{2a} - ab + \sqrt{p} \left(\frac{p}{4a^2} - b\right) \\ - BL \equiv SE - SB - EL \equiv \frac{p}{2a} - ab - \sqrt{p} \left(\frac{p}{4a^2} - b\right) \end{cases} \equiv ax.$$

NOTES ADDITIONNELLES,

et résolution de plusieurs problèmes relatifs aux courbes du second ordre.

Note 1ere. La conclusión que nous avons déduite page 272 de ce Mémoire est fondée sur une propriété fort remarquable qui n'est qu'un corollaire du probleme suivant.

Tab. VI. On considère le système de toutes les droites qui coupent Pig. 27. en un même point A, l'un des diamètres d'une section conique. Par les points B et D où chacune de ces droites rencontre la courbe, on même des tangentes à cette courbe. On demande quel sera le lieu de tous les points E d'intersection de ces tangentes.

Nous supposerons le point A situé sur le grand axe de la courbe. Les résultats auxquels nous parviendrons n'en seront pas moins généraux, et s'appliqueront à tous les diamètres des sections coniques.

Soit: $Ax^2 + By^2 \equiv 1$, l'équation de la courbe, et $mx + ny \equiv 1$, celle d'une droite quelconque BD passant par le point A. Faisons $CA \equiv X$, et appelons x', y'; x'', y'' les coordonnées des points B et D. Ces coordonnées seront d'abord liées entr'elles par les relations suivantes:

On aura de plus pour les tangentes BE et DE, les deux équations:

$$\left.\begin{array}{cccc}
\Lambda x' & x + B y' & y \equiv 1 \\
\Lambda x'' & x + B y'' & y \equiv 1
\end{array}\right\} - - - (2).$$

Les points B, A et D étant d'ailleurs situés sur une même droite BD, on a aussi:

Au moyen de ces sept équations, on éliminera aisément les coordonnées des points de contact, et l'on parviendra à un résultat qui étant indépendant de x' y', x'', y'', m et n, appartiendra à la ligne, lieu de toutes les intersections E.

Mais la forme des équations (1). (2), (3), est telle que les cinq dernières suffisent pour éliminer toutes les quantités qui dépendent de la considération particulière de la ligné BE. En effet on déduit des équations (3):

$$m (x'' - X) + n y'' = 0,$$

$$m (x'' - x') + n (y'' - y') = 0,$$
et
$$\frac{m}{n} = -\frac{y''}{x'' - X} = -\frac{y'' - y'}{x'' - x'}:$$

er les équations (2) donnent:

Ax
$$(x'' - x') + By (y' - y') \equiv 0$$
; donc

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{Ax}{By}$$
et par conséquent; $\frac{Ax}{By} = -\frac{y''}{x'' - x}$.

De là on tire: AXx = Axx'' + Byy'', qui en vertu des équations (2) se reduit à AXx = 1 (4). Cette dernière équation nous apprend que le lieu de toutes les intersections E des tangentes que Fon considere, est une droite perpendiculaire au grand axe, et située à une distance 1 du centre de la courbe.

. Cette meme équation (4) fait voir encore 1°, que le demigrand axe est toujours moyenne proportionnelle entre l'abscisse CA du point donné et l'abseisse CH du pied de la perpendiculaire, lieu de toutes les intersections E: 2°, que cette dernière abscisse CH est celle du point où la tangente menée par l'extrémité de AI perpendiculaire à CG, rencontre la direction du grand axe. En effet X et Y étant les coordonnées du point I, on a pour l'équation de cette tangente :

AXx + BYy = 1, qui se réduit à AXx = 1, lorsqu'on y fait y = 0.

Si l'on combine les équations AXx = 1 et Ax'x + By'y = 1, et qu'on élimine entre elles l'abscisse x, on aura en appelant y''' Fordonnée du point E, $y''' = \frac{X - x'}{B X Y'}$.

Les équations des droites BD et AE étant:

$$\begin{array}{ccc} m & x + n & y = 1, \\ m' & x + n' & y = 1, \end{array}$$

on aura évidemment entre les quantités x', y', X, m, m', n, n', les équations suivantes:

$$m x' + n y' = 1,$$

$$m X = 1,$$

$$m' X = 1,$$

$$\frac{m' X}{A X} + \frac{n' (X - x')}{B X Y} = 1.$$

Eliminant entre ces quatre équations x', y', X, nous obtiendrons la relation qui doit exister généralement entre les quantités m, m', n et n'.

Les trois premières équations donnent:

$$X - x' \equiv \frac{n y'}{m}$$
 et $m \equiv m'$.

Substituant dans la dernière, elle se réduit à:

$$\frac{m^2}{A} + \frac{nn'}{B} = 1, \text{ on } Ann' + Bm^2 = AB.$$

Pour connaître le cas dans lequel les deux lignes AE et BD sont perpendiculaires, il faut poser:

$$m^2 + n n' = 0.$$

De là on déduit: $m^2 = -nn'$,

et par conséquent: m^2 (B — A) = AB, d'où $m = \sqrt{\frac{AB}{B-A}}$.

d'où
$$m = \sqrt{\frac{AB}{B-A}}$$

 $CA = \frac{I}{m}$ devient donc dans cc cas particulier égal à $\sqrt{\frac{B-A}{AB}}$; c'est-à-dire que le point A n'est autre que le foyer de la courbe.

Les mêmes résultats s'appliquent immédiatement à tous les diamêtres conjugués des courbes du second degré, et donnent une solution fort simple du problème suivant :

Connaissant le contour d'une courbe et son centre, mener une tangente à cette courbe par un point extérieur.

On joint le point donné M et le centre C de la courbe Tab. VII. donnée, on détermine ensuite le diamètre conjugué de GH, en menant une droite quelconque mn parallèle à ce diamètre et en joignant le milieu de cette droite avec le centre. On élève au point C une perpendiculaire à GH, et l'on prend CB = CD: après avoir uni les points M et B, on mène BA perpendiculaire à MB, et l'on obtient ainsi une partie AC telle que le demi-diamètre CD est moyenne proportionnelle entre cette partie AC et l'abscisse CM du point donné. On porte donc CA de C en E, et l'on mène par le point E une parallèle à CD qui par ses intersections avec la courbe donne les points de contact cherchés.

S'il s'agissait de résondre le même problème en prenant le Fig. 29. point M sur la courbe donnée, il est évident qu'il suffirait de mener le diamètre CM, iet de joindre le centre C avec le point O, milieu d'une droite quelconque mn parallèle à CM: MX parallèle à CO serait la tangente demandee.

Les considérations précédentes fournissent encore le moyen de résoudre une classe de problèmes fort intéressants dont nous présenterons guelques exemples.

1°. Etant donnés le centre C d'une section conique, une tan- Fig. 20. gente AT et son point de contact T, et la direction d'une seconde tangente AX, construire la courbe.

Solution: Je joins le point A et le centre C, et je mène par le point T une ligne Tt telle qu'on ait $TB \equiv Bt$. Pour satisfaire à cette condition on trace par le point A une ligne quel-

conque pn; on mêne par le point T une parallèle à AC: on prend $An \equiv Ap$ et l'on mêne nt parallèle à la même ligne AC: l'intersection de cette dernière parallèle avec la direction indéfinie AX, donne t pour le point de contact de la droite AX avec la courbe. Menant par le centre C une parallèle à Tt on a dans AC et CE les directions de deux diamètres conjugués de la courbe cherchée. Il ne reste plus qu'à trouver les grandeurs de ces diamètres; or pour cela il suffit, d'après ce qui précède, de prendre deux moyennes proportionnelles, la première entre AC et CB, et la seconde entre CE et CD.

Tab. VII. 2°. Etant donnés le centre C d'une section conique, un Fig. 31. point M de cette section, et une tangente AT avec son point de contact T, construire la courbe.

Solution: Menant Mm par le centre donné C, et prenant $Cm \equiv CM$, on obtient un diamètre de la courbe cherchée. On joint le point T avec les points M et m; par le milieu O de MT on mène On parallèle à mT, et d'après une propriété que nous démontrerons (page 285), Mn devient la tangente menée à la courbe par l'extremité du diamètre Mm; CE parallèle à Mn est donc la direction du diamètre conjugué à Mm: pour avoir sa grandeur, il faut mener TD parallèle à Mm, et prendre une moyenne proportionnelle entre CE et CD.

Fig. 32. 30. Etant donnés le centre C d'une section conique et les directions de trois de ses tangentes, construire la courbe.

Solution: Je joins les points A et C, et je détermine la ligne EF de manière à ce qu'on ait CE = CF. Pour cela je mène par le sommet de l'angle A une droite quelconque mn, et je prends Am = An. Par les points m et n, je mène des parallèles à AC, qui coupent les côtés de l'angle aux points p et q: EF parallele à pq remplit la condition imposée. Je trace par le même

moyen les deux droites GH et IK, telles que CG CH et CI CK. Par les extrémités I et K, je mène IL et KL réciproquement parallèles à EF et GH; je joins les points L et D. Par le point d'intersection M, je mène MN et MP parallèles à EF et à GH, et les trois points M, N, P, obtenus de cette manière sont les points de contact cherchés des trois tangentes. Cela posé, on détermine un système de diamètres conjugués comme dans la solution du problème premier.

4°. Etant donnés deux tangentes AB, BD avec leurs points Tab. VII. de contact M, N, et un point O de la courbe, construire cette Fig. 33. courbe.

Solution: Je joins les points O, M et N. Par un point quelconque m de la ligne BC qui partage MN en deux parties égales, je mêne mn et mp parallèles a OM et ON; je joins n et p et la ligne AD menée par le point O parallelement à np, est une troisieme tangente à la courbe au point O. Le centre C de la courbe sera donné par l'intersection des deux lignes BC et AC qui divisent chacun des côtés MN et MO en deux parties égales.

Cette construction fort simple est fondée sur ce que dans la figure relative au probleme précédent, FH est évidemment parallèle à AB.

5°. Etant donnés un diamètre AB d'une section conique, et Fig. 34. les directions AX et EF de la taugente a son extrémité et d'une autre taugente quelconque à la courbe, construire cette courbe.

Solution: Le point C, milieu de AB étant nécessairement le centre de la courbe, j'élève à ce point une perpendiculaire CD=AC; je joins les points E et D: DG perpendiculaire à ED, donne CG pour l'abscisse du point de contact de la ligne EF avec

la courbe; en effet la construction indiquée donne $\overline{AC} = EC \times CG$: en prenant donc CH = CG et en menant HM parallèle à AX,

on obtient le point de contact M. Menant MI parallèle à AB et CK parallèle à AX, la moyenne proportionnelle entre CK et CI donnera la grandeur du diamètre conjugué de AB.

Tab. VII. Si au lieu de la tangente EF, on donnait un point quelFig. 35. conque M, on prendrait CG = CH et l'on joindrait le point G
avec l'extrémité de CD perpendiculaire à AB et égale à AC: DE
perpendiculaire à GD donnerait le point E qui joint avec le point
donné M, ferait connaître la tangente au point M.

Fig. 36. 6°. Etant donnés un diamètre quelconque AB d'une section conique, et une tangente EX avec son point de contact M, construire la courbe.

Solution: Connaissant AC moitié de AB, et l'abscisse EC du point E, on détermine la grandeur CG de l'abscisse du point M. Portant CG de C en H, et joignant M et H, on a la direction du diamètre conjugué de AB; sa grandeur s'obtient aisément au moyen des constructions précédentes.

Ces exemples suffisent pour faire voir combien sont variées les applications des principes dont il s'agit.

Note 2. La proposition démontrée page 275 n'est qu'un corollaire du théorème suivant.

Deux sécantes menées dans une ellipse et dans son cercle extérieur, par des points dont les abscisses sont égales, concourent en un même point du grand axe.

Fig. 37. En effet soit MN une sécante quelconque de l'ellipse; mn sera sa correspondante dans le cercle extérieur; or on a

 $\frac{MP}{mP} = \frac{NQ}{nQ}$ ou $\frac{MP}{NQ} = \frac{PO}{QO}$,

O étant le point d'intersection de la sécante MN avec le grand axe; donc ce point O appartient à la fois aux deux droites MN et $m n_*$

Il suit évidemment de ce même théorême que si d'un point Tab. VIII. O situé sur le grand axe, on mêne une taugente OT au cercle Fig. 38. extérieur à l'ellipse, et si l'on abaisse l'ordonnée T'Q, cette ordonnée coupera l'ellipse en un point T tel que la ligne OT sera tangente à la courbe.

Note 3. Si par l'extrémité A' d'un diamètre de l'ellipse, on Fig. 39. mène la tangente A' D'; une ligne quelconque B' E' coupera la courbe en un point M' tel que la tangente en ce point divisera en deux parties égales la ligne A'E'.

Je vais démontrer cette propriété pour les axes principaux de l'ellipse. Un calcul analogue au suivant ferait voir qu'elle est aussi générale que le suppose l'énoncé du théorème.

L'équation de l'ellipse rapportée à l'extrèmité de son grand Fig 40. axe est $a^2y^2 + b^2x^2 - 2ab^2x \equiv 0$. x' et y' étant les coordonnées d'un point quelconque M, on a pour l'équation de la tangente MG qui passe par ce point: $y - y' \equiv \frac{b^2(a - x')}{a^2y'}(x - a')$. Faisant dans cette équation $x \equiv 0$, on obtient:

$$AF = y' - \frac{b^2(a - x')x'}{a^2y'} = y' \left(1 - \frac{b^2(a - x')x'}{a^2y'^2}\right)$$

$$a^2y^2 = 2ab^2x' - b^2x'^2 : \text{ done}$$

$$AF = y' \left(1 - \frac{b^2(a - x')x'}{2ab^2x' - b^2x'^2}\right) = \frac{ay'}{2a - x'}.$$

La ligne BE passant par les deux points M et B, a pour équation:

$$y - y' = \frac{y'}{x' - 2a} (x - x')$$

faisant $x \equiv 0$, on a:

or

$$AE = y'(1 - \frac{x'}{x' - 2a}) = \frac{2ay'}{2a - x'} = 2AF; C. Q. F. D.$$

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

FAITES À L'OBSERVATOIRE DE L'UNIVERSITÉ IMPÉRIALE DE WILNA EN 1817 ET 1818 NOUVEAU STYLE.

PAR J. SNIADECKI.

Présenté à la Conférence le 12 Août 1818.

Uranus en 1817.

Jours dumois.			Ascension droite apparente.			austrate			géocentrique				Longitude de la terre lors du passage.		
										-					s .
Mai 24	12h4	2 / 50 //9													
- 25	- 38	3 44, 5		50	53, 7		Зτ	58, 8	14	1 i	36,4		19, 7	417	41,0
26	- 3	≨ 38, o		48	14, 8		31	39	14	9	8.5		17, 3	5 15	2,9
 27	- 3	o 3 2 , 1													24, 0
28	- 20	6 26, 5													43, 8
— 31	- 1	4 6, 1		35	14, 0		೦೦	8, 5	13	57	1,4		13, 0	10 1	36, 8
Juin 1	- 1	0 0		3°	30, 3	•	39	58,	13	54	3о		20, 8	10 58	52, 8
3	•	1 48, 7		27	15,8		29	26 , 8	13	49	40,3		24,4	12 53	20,4

On a employé l'obliquité de l'écliptique 23° 27′ 53″. Les étoiles de comparaison fürent: δ du Scorpion et 190 Ophiuchi.

Lieux héliocentriques d'Uranus.

- 1		Longitude hél.	Latitudes	australes.	Differ	ences.
	Longitudes observées.	tables de <i>Delambre</i> .	observées.	Tables de Detambre	n longitude.	en latitude.
	8s.	8				
Mai 24 13	3°39 ′ 25″7	13°38′ 57″8	o°o′ 8″6	υ° ο ′ 34′′6	+ 27 9	— 26 °o
		. 39 40, 3				
26.	40 53, 2	. 40 22,8	 1 6, o	36, 0	+ 30 4	— 20,0
- 27	. 41–38,8	. 41 5, 3	17,2	36, 7	+ 33,5	-19,5
- 28 .	42 21, 1	41 47,5	25, 5	[37,3]	+ 33,6	-11,8
31 .	44 31, 1	43 55				
Juin 1 .	45 9, 9	44 37,6	19,7	39, 6	+32,3	- 19,9
 3 .	. 46 40,3	. 46 2, 6	23, 1	40, 7	+37,7	-176
				moyen	├ 33 , 1	19, 8

L'opposition & tirée des tables de Delambre, après les avoir corrigees des erreurs, eut lieu à Wilna 1817 le 4 Juin n. st.

Saturne en 1817.

Jours du mois.	Tems du pa à W	•	1	sion droite parente.	aus	najson tra le rente.	gé	ocen	tude rique ente.	géoce aus	itude ntrique trale rente.	helic tabl	gitude ocentr. es de <i>mbre</i> .
— 27 — 28	11 57 . 53	39, 7 27, 1 14, 6	. 1	60' 10' 8 2 59, 4 8 42, 0 4 25, 3 1 36, 0	. 14 . 16 . 18	53, 9 43, 1 25, 8		34 30 25	55, 9 22, 0 50, 7	. 48 . 48 . 48	16, 1 27, 0 31, 8	2 32' · 40 · 42 · 43	9, 5 4, 0

Jours	Longitu-		Latitud, hél	. australes.		Tables de	Bouvard.	Différ	ences.
du	des helio- centriques observées.	Diffé- rence-	'1 ables de <i>Delambre</i> .	Obser- vees.	Diffé- rences.	héliocen	Latitudes heliocentr. australes.	en longi- tude.	en latitude.
	118.					118.			
22	23125,8	í ő,9					$\overset{\circ}{1}\overset{\circ}{37}\overset{\circ}{3},9$		
26	$39\ 3,6$, .	0 ,		18,8	, ,	
27	. 40 56,0						22,5		
28	.4251,0	, , ,		6.0	-		26,3	,	/ •
31	. 48 37,5						37,6		
	Moyen	-16,7		Moyen	-14,3		Moyen	- 11,9	-8,82

L'opposition $\mathfrak{H} \odot$ tirée des tables de *Delambre*, corrigées des erreurs, cut lieu à Wilna 1817 le 25. Août n. st. à $20^{h}45'15'',2$ t. m. astronom. Alors la longitude de Saturne et de la Terre $11^{s}2^{\circ}37'49'',6$. Latitude héliocentrique $\mathfrak{H} \equiv 1^{\circ}37'7'',5$ austr.

Les étoiles de comparaison furent : λ du Capricorne, e et λ du Verseau. On a employé l'obliquité de l'écliptique 23° 27' 53',5.

L'opposition O h tirée des tables de Bouvard, corrigées des erreurs, ent lieu à Wilna 1817 le 25. Août n. st. à 20h45/19",6 t. m. astronom. Alors longitude h 11°2° 37'49",8

celle de la terre 11 2 37 49,8 Latitude héliocentrique 5 1 37 7,6 australe.

Junon en 1847.

			1 757 11 1		
Jours du	Tems moyen	Ascension droite	Déclinaison		Latit. géocentr
mois.	du pessage.	apparente.	australe	géocentrique	1 1 1
			apparente.	apparente.	boréale.
		343 51/39/5	3'17' 9"	343'52' 4'6	19' 14 7
 9	11 37 26,3	342 56 51	4 17 47	342 38 17, 6	244 6,6
12	. 23 27, 2	. 24 1	. 5 32	341 53 58, 4	
- 13		. 13 11	5 6 45	. 39 20, 2	
- 14		. 231	. 19 14, 5		
		341 51 53	. 31 21	1	
		1 '	1	10 22, 2	1 0 1
- 17	0 17,3	. 31 10,5	. 55 50	340 42 0, 9	
	10 55 40, 2	1	6 7 53		. 38 23, 3
	51 5,6	. 11 18	. 19 57	. 14 27	. 30 58
20	46 30,7	. 1 27	. 31 46	1 4,8	23 38,8
21	. 41 57, 2	34051 58,5	. 43 42	339 47 52	. 16 8
22	37 24,6	42 53	. 55 34	35 2	. 8 32
	. 32 52,8	33 59	7 7 18, 5	1	. 0 58, 3
	. 28 21,7	25 6	18 48		0 53 33
	23 51,3	0.03	1 '		
			. 30 7	333 57 53 8	
20	. 19 23,8	. 8 28	· 41 30 5	46 8 8	
0	1 - 2 - 40 4	220	22 -2	22- 2- 2	australe
	93140,4	339 1 7	9 33 23	337 2 37, 3	
8		338 57 4.	. 42 22	336 55 34, 2	1 1 1
	$\frac{1}{2}$ 23 20, $\frac{1}{2}$	53 45,5			53 50
10	0.1912,5	50 49,5	59 33	. 43 28,	1 0 42, 7
14		. 43 30	10 30 39	. 25 14	1. 26 54, 8
- 1	• 1	. 42 39	. 51 44	. 16 38	. 46 10, 8
18		43 19,4	1	14 51,4	
10	1	. 44 27	11 4 17	13 36, 0	
20	- 00		10 11	13 55, 7	
		, , , , ,	1		
	35 46, 4			12 42	
29				12 55, 2	
<u> 53</u>		1			22 15
2/	4 . 24 31,4	. 56 44	. 31 17	14 45, 6	1
Nov.	7 55 59	339 40 11	12 0 50, 3	3 . 43 14, 4	3 11 19
	. '				

En interpolant ces observations par la méthode différentielle de Newton, on obtient ce qui suit :

Jours du mois.		Ascension droite apparente.	Déclinaison boréale apparente.	Longitude géocentrique apparente.	Latitude géocentr. boréale apparente.	Longit. de la terre lors du passage.
	- 51 21.4		3 25' 17" . 41 26	343'37 17'6 • 22 31	3 11 55 7 . 4 55	118.12 55/30/25 . 13 53 45,75

L'opposition de Junon est arrivée à Wilna 1817 le 6 Sept. nouv. st. à 1^h 36'2',6 t. m. astron. Alors la longitude de Junon et celle de la terre \equiv 11^s 13°28'51",1. Latitude géocentrique de Junon \equiv 3° 7' 55",3 boréale. Les étoiles de comparaison fûrent : 68, γ , \uparrow , λ , et σ du *Verseau*. On a employé l'obliquité de l'écliptique 23° 27' 54",3.

Immersions des satellites de Jupiter.

- 1817. Avril 1. Immers. du I Satell. à 14h 11' 33'',3 tems vrai, gr. Lunette, observation bonne.
 - 8. Immers. du I Satell. à 16^h 6' 54",2 tems vrai, gr. Lunette, observation bonné.
 - Mai 10. Immers. du I Satell. à 12^h 44' 59",4 tems vrai, petite Lunette, observation bonne.
- 1818. 19. Immers, du Il Satell. à 14^h 55' 41' tems vrai, gr. Lunette, observation passable.
 - Juin 20. Immers. du II Satell. à 14h 22' 1" tems vrai, gr. Lunette, observation assez bonne.

Mars en 1818.

_								D	 Feclir	aison		Tab	les de	Linde	enau.	1 '	de la terre
Jours of mois	- 1			noyen sage.	1				boré	_		Longitude héliocentr.		Latitude hé- lioc, boréale		Table	l passage. des du de longit.
												1	s.				
Mars	13	6^{l_1}	11	24"7	837	33'	19"1	25	37	54	9	1330	29 2	1 346	′ 28 ′′ 1	5822 3	32/35/ 5 ^b
	14	•	9	28, 9	84	3	21,6		37	39,	7	L 57	36,8	- 46	42, 9	. 23	32 14,3
	15		7	31, 9		33	8,6		37	57,	7	2 24	38 , 8	.40	$57, \bar{3}$. 24	31 51,1
-	16	•	5	36, 6	85	3	31,5	! •	38	7.	ö	2 5 1	33	• 47	11,3	. 95 3	312,4
	18	•	1	44, 8	86	3	55, 8		38	58 ,	7	3 45	18	.47	ೆ9	. 27	50 27,0

Jours	Longit, géocentriques vraies					s bor.	Différences				
du mois.	observées		ibles de ndenau.	obser	vées.	Tabl Line	es de <i>lenau</i> ,	en loi	ngitude.	en l	atitude.
	28.		28.								
Mars 13	24°11′40	″5 24°1	1/43/19	2 17	0"	2°16′	5077	_	2"7	+	9″3
- 14	24 38 43	, 4 . 3	8 28,8	. 16	24	. 16	9, 5	+:	14, 6 l	+	14, 5
15	25 5 35	, 1 25	5 23, 4	. 15	38	. 15	28, 4	+ 1	11,7	+	9, 6
	2 5 3 2 59										
18	26 27 2 8,	, 5 26 2	76,5	1.13	39	. 13	26, 2	+- 2	22, 0	+-	12,8
						n	noyen	+	15,9	+	9, 6

Les étoiles de comparaison fûrent: ε des Gemeaux, 132 et 125 du Taureau. On a employé l'obliquité de l'écliptique $23^{\circ} \ 27' \ 54'', 6$.

La quadrature du *Mars* tirée des tables de *Lindenau*, corrigées des erreurs, est arrivée à Wilna le 16. Mars 1818 n. st. à 7^h 1' 12",7 t. m. astron.

291 *Festa* en 1818.

Jours du	Tems moven	Ascension droite	Déclinaison
mois.	du passage.	apparente.	boréale
Mars 25	13h30/21/6	205 25' 41"4	apparente.
			2 56′ 47 0
- 27 - 28	• 21 3,6	$\begin{array}{ c c c c c c } \hline & . & 4 & 6, 3 \\ \hline 204 & 52 & 53, 9 \\ \hline \end{array}$	3 10 4, 0
A -1	· 16 22,4		. 16 44 5
	9	4 56, 4	42 48, 6
- 3 - 5	• 47 56, 0	203 33 37,0	. 55 31, 9
	• 38 19,6	201 10 8,7	4 8 7,3
— :4 — :5	1 C4 T9,0	200 56 24, 5	. 56 18, 8
	• 49 53, 2		5 0 47, 9 5 4, 5
- 16	45 1 6	• 42 26,7 199 48 8	* / 1
- 20	• 25 %0, 3		. 20 12, 6 . 23 37, 6
21	• 20 53, 1	34 44, 8	
 25	1 43, 9	19843 8,1 . 3039	, 0
- 26	10 56 58, 1		. 36 8, 8
— 28 — 30	• 47 30, 1	6 51, 7 197 43 35, 4	. 39 22, 7
Mai 3	• 38 8,6		41 46, 5
	• 24 12,4	· 12 2,3	43 19,6
— 5 — 8	15 2		. 43 8, 6
	0.56.50.8	1 1	. 40 52, 4
- 9	9 56 59,8 • 59 32,1	• 17 17, 4 • 9 35, 7	. 39 47, 5 . 38 15. 4
10 11		• 9 35, 7 • 2 13, 7	36 35, 6
- 11 - 12	• 48 7,4 • 43 43,4	195 55 14, 1	. 34 34, 6
$\frac{-12}{-13}$. 48 50, 5	. 32 15, 5
— 14	• 39 22,9 • 35 2	42 39, 1	. 29 53, 6
<u> </u>	2. //	. 36 57, 6	
	· 30 44 · 13 46, 2	. 18 45, 6	• 27 7
$-\frac{19}{-23}$	8 57 18	: 1	• 14 7 457 24, 4
$\frac{-25}{-24}$. 43 18,5	7 31,9 5 39,0	4 57 24, 4
- 24 - 25	. 49 17, 2	. 4 16, 3	1- 10
<u>- 25</u>	45 13,7	3 29, 2	· 47 40, 2 · 42 57, 0
	- 40 10, / 1	0 29, 2	• 42 5/, 0 1

L'opposition de *Vesta* est arrivée à Wilna 1818 le 9. Avr. nouv. st. à $1^h 24' 57''$ t. m. astron. Lors de l'8 longitude de *Vesta* $\equiv 6^s 19^\circ 1' 43'', 9$. Latitude géocentrique de *Vesta* $\equiv 12^\circ 53' 23''$ boréale.

En interpolant ces observations par la méthode différentielle de Newton, on obtient ce qui suit:

Jours du mois.	Cems moven du passage.	Ascens, droit apparente.	Déclinaison boréale apparence.	Longitude géocentrique apparente.		Lieu de la terre lors du passage,
Avr. 8	12"24 6 9	202°33 10°				9s 18'29' 48''6
<u>— 9</u>	. 19 22,7	. 19 30	.31 to i	108 54 51,4	22	. 19 28 29,1

On a employé l'obliquité de l'écliptique 23° 27′ 54", 8.

Les étoiles de comparaison fürent η de la Hydre r, δ , o, u et σ de la Vierge.

Eclipse de Soleil le 4. Mai 1818 n. st. observée à Wilna.

	Tems vrai.	Demi - diamètres.	Parall. horison- tale à Wilna.	ර dans l'équateur.
Commencement				
de l'éclipse	19h41'39"	14'47"	J 54'13"	21 ^h 27'42"14t.v.
		O 15 52	⊙ 8	
Fin de l'éclipse	22 216) 14 52	5411,83	21 27 42,5.
	·	O 15 52	⊙ 8	

Par un héliomètre appliqué à la lunette acromatique de **Dollond**, le diamètre du Soleil fut mesuré à plusieurs reprises, avant et après l'éclipse, et a donné constamment 3 pouces $\frac{12}{500} + \frac{14}{500}$ $= \frac{1514}{500} = 3,628$ pouces. Le diamètre du Soleil était ce jour = 1905''; donc 1 pouce de l'héliomètre = 525'',08; $\frac{1}{20}$ pouce = 26'',254; $\frac{1}{500}$ p. = 1'',05.

À l'aide de ce héliomètre on a mesuré la distance des cornes, dont on a tiré la distance des centres du \odot et i; et de cette dernière, le moment de la conjonction dans l'équateur, c'est-à-dire où l'ascension droite du \odot et de la \bigcirc était la même.

La table suivante renferme les observations et les résultats du calcul.

Eclipse de Soleil, du 4. Mai 1818 nouveau style.

Tems vrai de				Dist. des centres	
Fobservation.			liomèrra . 500mes :	en minutes.	conjonction.
19149/10/7	pouces.	10	. 300 mes. O	27′,8683	onhog/ 34//34
• 50 56, 7	1	13	_		21h 27' 34"34
4.0	1		10	26 9348	55,70
	1	16	18	2 6, 199 5	• • 42,00
57 4,7	2	0	20	24, 90 8	• • 44,30
. 59 18,7	2	4	0	23,9623	• • 17,27
20 0 17,7	2	4	12	23 , ട 60 7	23, 67
• 1 14,7	2	5	8	23. 3522	26,46
• 3 27, 7	2	7	9	22, 6073	• • 29, 14
. 5 1,7	2	8	18	22, 0360	20,00
• 16 4,7	2	15	7	18,813 3	63, 26
• 19 38,7	2	17	7 5	17,6440	• • 27,49
• 24 47.7	2	19	3	16,3826	. 42,23
. 27 28, 7	3	0	2	15,6833	18,00
. 3 0 43,8	3	1	11	14, 6226	47,65
2 1 3 27,8	3	1	2 3	14, 2950	. 34, 97
. 5 23,8	3	1	19	14,4550	. 68, 12
. 6 59,8	3	1	10	14, 7340	67,32
• 17 36,8	2	18	13	16,8630	82,20
. 25 47,8	2	14	13	19, 3080	37, 12
. 26 58,8	2	14.	1	19,5670	48,00
. 28 27,8	2	13	6	19, 9850	58, 04
. 29 53,8	2	1 2	13	20, 3750	50,62
. 32 6,8	2	11	1	21,0860	41,94
. 33 10,8	2	8	6	22, 2 80	46, 35
. 37 49,8	2	7	2	22, 7890	44 42
. 39 45,8	2	7 5	13	23, 3840	43,96

Le local n'a pas permis de suivre plus loin les distances des cornes.

La moyenne de 26 observations . 21^h 27' 42",86; en joignant le commencement et la fin, on a la moyenne . . . 21 27 42,5.

L'éclipse de Soleil donne à Wilna la con-
jonction équatoréale 21 ^h 27' 42',5 t. v.
on trouve par le calcul la réduction à l'éeliptique 20 48, 0.
Conjonction dans l'écliptique 21h 6'54',5 t. v.
Les tables de Bürg publiées par Zach donnent 21 6 56, 9.
Différence 2",4.

La plus grande distance des cornes sut observée 3 pouces $\frac{3}{50} + \frac{7}{500}$; d'où resulte la plus petite distance des centres 13'4",96, et la grandeur de l'éclipse 6,6605 pouces.



SECTION

DES
SCIENCES PHYSIQUES.



SUR LA PIERRE CHINOISE NOMMÉE YOU.

PAR

B. SEWERGUINE.

Présenté à la Conférence le 22 Janvier 1817.

La pierre chinoïse nommée You, est une des substances minérales dont la nature ne semble pas encore avoir été determinée à fond. Quelques uns la regardent même comme une substance factice. Du moins le paroit-il par les résul ats d'une analyse chymique qu'en a faite le célebre Klaproth, si toute fois la pierre de Riz de ce chymiste est la même substance avec celle dont il s'agit ici.

Comme donc les opinions sur la nature de cette substance, sont tellement partagées, j'ai cru devoir de ma part, en f'ire des recherches ultérieures pour pouvoir parvenir à un résultat plus decisif.

J'ai examiné pour cet effet avec toute l'attention requise une rélation Russe sur cette substance que j'ai trouvée dans un des journaux académiques de l'annee 1791. J'ai redigé en ordre mêthodique les notes characteristiques que j'y ai pu trouver, j'ai fassemblé et verifie (*), tous les faits qui la concernent. Enfin je me

^(*) Sur une bague que j'en possidois, et qui éton de couleur grisaire, demi transparente ayant l'air d'une calcedoine etc.

suis informé la dessus par des translateurs Russes qui ont sejourné longtems dans la Chine, et qui en traduisant le mot You, par le mot jaspe (Яшма) sont d'accord qu'elle est une substance naturelle.

Voici ce qu'on peut déduire de la dite rélation Russe. L'auteur n'en est pas connù; mais on peut se fier à lui d'autant plus qu'il semble avoir vû plusieurs échantillons de cette pierre.

Quoiqu'il s'y trouve beaucoup de choses outrées, sans doute par l'ostentation des Chinois même, cependant on en voit que cette substance est assez commune et fort estimée en Chine.

CARACTÉRES EXTÉRIEURS ET PHYSIQUES DE LA PIERRE NOMMÉE YOU.

- 1°) Couleur. La couleur principale en est celle du petit lait. Cependant il y en a aussi de couleur de citron, qui selon l'auteur sont les plus estimées; puis suivent celles de couleur de lait clair; puis les jaunes melées de rouge de cinnabre et de pourpre. Il y en a aussi de tachetées.
 - 2°) Lueur. Grasse, un peu vitreuse, très agréable à la vue.
 - 3°) Forme extérieure. Celle d'un caillou ordinaire.
- 4°) Volume. Les cailloux les plus volumineux ont quelques fois jusqu'à $4\frac{1}{2}$ pieds de grosseur. Cependant ceux qui sont plus petits passent pour les meilleurs.
- 5°) Dureté. Presque celle du diamant. La pierre ne se laisse en tamer que par le moyen de sa propre poudre. Même, dit la rélation qu'il faut 9 à 10 années pour en tailler une pièce à cause de sa grande dureté; on voit cependant que ce n'est que trop outré.
- se casse sisément par le choc, surtout ses pièces les plus minces.

- d'un cailloux ordinaire. Plus la pierre est dure et pésante, et plus elle est estimée, car c'est alors qu'elle prend le meilleur poli.
- 8°) Son. On remarque que plus la pierre est pure et plus elle est sonore.
- 9°) Usage. On en fait les baques les plus minces quelques fois avec des gravures de caractères Chinois; on en fait encore des tasses, et des instrumens sonores de musique.
- 10°) Prix. Elle est regardée en Chine parmi les pierres précieuses, et son prix surpasse celui de l'or.
- 11°) Gisement. Elle se trouve ou dans les fleuves, ou dans des grottes formées par les courans des eaux. Les premières sont plus lisses et plus pures. On distingue les premières, par le nom de You aquatique (водяной), et la seconde par celui de You terrestre.
- 12°) Lieu natal. Autres fois on la recevoit du Japon et des frontières de la Tartarie, et puis des bords d'un fleuve non loin d'Irca (*).

D'après tant de faits remarqués sur la pierre You, qui seroit tenté de la croire être une substance factice? Ce n'est que la rareté de ses échantillons en Europe qui auroit pû faire douteux sou origine analogue aux autres substances minérales.

Mais que l'on me permet encore une remarque d'un autre genre.

Ou a différemment discuté sur la substance dont les anciens faisoient leur Vasa murrhina (*Plin*. Livre 37 - 8.) (**). Mais quand on considère de plus près les caractères extérieurs de cette der-

^(*) Capitale de la petite Bucharie.

^(**) Selon l'édition de Hardouin.

mière, elle semble approcher beaucoup de la unture de la pierre d'Yon. Car: 1) elle est souvent tachetée de couleur blanche laiteuse et de pourpre; 2) de peu de volume (*); 3) la lucur en est grasse (**); 4) elle est cassante (***); 5) elle étoit d'un haut prix. Ensin elle venoit de l'Orient, selon Pline, de Parthe et principalement de Caramanie, ainsi, à peu près des mêmes endroits d'où les Chinois reçoivent actuellement leur pierre You.

Je sais bien que quelques naturalistes ont régardé même la substance des Vasa murrhina, comme factice. Mais que l'on confronte l'endroit cité de Pline et d'autres du même naturaliste, avec les caractères ci-dessus mentionnés, que l'on rapproche les saits qui les concernent, et leur identité sera presque hors de doute.

An reste il se peut bien que l'on les contresaisoit anciennement comme on contresait les pierres précieuses. Mais cela nesait pas moins qu'il y en ait de naturelles. Il ne seroit que trops à souhaiter et pour l'avancement des connaissances minéralogiques, et pour le prosit des arts, que la substance en question soit plusscommune en Europe.

^(*) Amplitudine nusquam parvos excedens abacos.

^(**) Ibidėm.

^(***) Livre 33 - 2: Selon hardonin. Murrhina et crystallina - effodimus, quibus prestium faceret ipsa fragilitas.

DE PISCIUM AUSTRALIUM NOVO GENERE

ICONE ILLUSTRATO.

AUCTORE

TILESIO.

Conventui exhibuit die 21 Maji 1817.

Insulas australes, in magno Oceano pacifico sitas, animalia et vegetabilia maxime singularia et figuris ac coloribus insolitis splendidioribus variantia proferre, jam ex itineribus nauticis praeteriti seculi ét ex percgrinatorum antecedentium, insulas Latronum Paschales Marchionicas Washingtonii sociales et amicales perserutantium, relationibus notum est. Novam praeprimis Hollandiam novis non solumspeciebus, sed etiam novis animalium singularium generibus abundare, relatio itineris australis Peronii nuperrime itecum docuit. Pari modo et in itinere Russorum circum terram, Krusensternio duce, admirabilis naturae nova documenta in insula australi Nuckahiwah, insulis Washingtonii partem Marchionicarum constituentibus adscripta, collecta sunt, quorum alterum in pisce Balistarum forma et habitu, usque adhue in solis picturis Krusensternianis communicato, nunc mihi latius explicando, repertum est. Incolae vel indigenae hujus insulae ab ipso Krusensternio optime descriptae, anthropophagi, Fauni quasi imperio viventes, ab omni familiaritate aliorum hominum moribus et legibus excultorum exclusi, in rudioris naturae statu barbaro remoti, aequali dexteritate in montibus calvis bellicosis et vallibus sylvaticis ac in undis Oceani versati, instar piscium natantes. et se submergentes, piscem nostrum ex Oceano attulerunt, ipsis Ce auduit Istorum sub numero insulae utcelarum duo nautae ex vocatum.

Europa quondam advecti, alter Francogallus Josephus Cabrit (1), alter Anglus nomine Robert's (olim remex Navarchi Anglici Graffin Bannes) (**), per amorum phurium seriem in hac insula remorati, et linguae indigenorum satis gnari, interpretes quaestionum et responsionum nostrarum fuerc. Ab Anglo, piscem nostrum cum Squalo istis feris incolis insulae, qui ejusdem figuram in corpore ipso quotannis acicularum puncturis pingendo, et in monumentis ipsis, Etuah vocatis, et in grallis imitari solent, memoriae et notae symbolicae dignun haberi, certiores facti sumus. Ab codem de piscis nutrimentis et usu vel applicatione edoctus sum; quippe qui pisces hujus generis propter victum et vitae pabulum ex Aplysiis, Doridibus, Sepiis octopodiis et Milleporae polypis electum, nunquam edules sed interdum venenatos, ob scabritiem corporis scutis rhomboidalibus muricatis, cataphracti vero utiles et limae instar vel corii Squalorum hirsuti et scabri applicandos, et in laevigandis lignis necessarios demonstravit; qua de causa et ipse et incolarum in corporibus pingendis artifex, sibi piscem tamquam artis symbolum in cute aciculis pinxerit.

Balistes Nuckahiwae, vel Coauhui sic dictus, pinnis ventralibus omnino destitutus novum genus format, quod mihi Balistapus apte appellari videtur. Vox Balistapus nil aliud sibi significare vult, quam Balistes apos vel piscis Balistarum natura ac forma, sed pinnis ventralibus earumque qualicunque vestigio destitutus. Haec distinctio non in genere naturali quidem Balistarum locum habet, sed in artificiali systematis ichthyologici, in opere posthumo a celeberrimo Blochio stabiliti (***), et hanc ob causam maxime necessa-

^(*) In diarii itineris Langsdorfii tab. VI. jaculator depictus alter Delius natator, qui nobiscum nave adductus Camtschateam, et paulo post Petropolin petiit; et nune discipulis nauticis artem natandi docet. Conf. Langsdorfii explicatio tabulae 6. p. 83.

^(**) A quo testimonium virtutis et honestatis nauticum conscriptum conservavit, ac nobis ut sese recommendaret obtulit. Uterque eorum nunc ad Europam rediit,

^(44*) M. E. Blochii systema ichthyologiae CX. iconibus illustratum, opus inchoatum

ria videtur, quoniam in illo pisces secundum pinnarum numerum collocati, et Balistes octo, Balistapus vero tantum senis pinnis praeditus est. Pinnae ventrales in Balistis quibusdam vel concretae vel in unam quasi coasitae vel interdum mutilatae videntur; quod ad diminuendum numerum pinnarum, in genere stabilitarum, et ad perturbandum ordinem, semel constitutum, ansam praebuit; qua de causa factum est, quod Balistarum genus et in ipso Blochii systemate in sexta piscium hexapterygiorum classe injuste remotum sit, etsi Blochio et Schneidero teste (*) octopterygii veri sint, quoniam et in mutilatis Balistarum pinnis ventralibus et concretis semper radii gemini utriusque pinnae nimis approximatae discerni possunt, pinna gemina ventralis coalita igitur vel mutilata, prae caeteris respicienda et examinanda, pro duabus pinnis omnino numeranda est. ichthyologi septimam singulam pinnam ventralem non examinare, et hanc geminam ex duabus pinnis nimis approximatis expressis coalitam pinnam, ex solo intuitu pro singula numerare vellent, etiam in quinta classe systematis Blochiani, heptapterygios pisces compleetente, Balistes haberemus, et Balistes in tribus classibus dispergerentur ac dilacerarentur. Videmus ex his, naturam in formando numero et pinnarum structura ichthyologorum systemata non respicere, sed potius ipsorum piscium vitae genus et habitationes aliasque necessarias conditiones, videmus candem nequidem genus naturale ipsum respicere, cum huic octo, illi septem et tertio sex tantum pinnas tribuit. Hoc nos non vexare debet nec incitare, ut leges systematis solum discentium in usum stabiliti, vel indicis conspectum animalium diversorum illustrantis, laederemus, quod tamen auctor ipse fecit, cum coalitis et mutilatis pinnis perturbaretur. Adeoque editor operis posthumi, etsi hunc errorem intellexerit imo ex pinnis ven-

post obitum auctoris absolvit, interpolavit, correxit J. Gottlob Schneider Saxo. Impensis auctoris impressum et bibliopolio Sanderiano Berolini commissum 1801.

^{(*) ,} Balistarum genus, auctor ipse ait. LIII. II. c., proprie ad classem IV. octopterygiorum pertinet, pinnae enim ventrales vel concretae vel soulitae vel aculeis 2 inclignitae adsum.

tralibus, varie coalitis ac mutilatis Balistarum in plurimis speciebus examinatis et disquisitis, demonstraverit, tamen eundem re vera corrigere nondum ausus est. Sed omnino opus est, ut in nova forsan curanda Blockiani systematis editione Balistes ex numero piscium hexapterygiorum et heptapterygiorum deleantur et ex classe sexta ad quartam classem translocentur, Balistapodum species vero in sexta clusse remaneant vel restent. Argumenta necessitatis hujus ipsis Schneideri verbis insunt, dicentis: "Ventrales pinnae, sed simplices et in unam coalitae adsunt in velula et ciliari specie, sterni stylo longo adpositae, in biaculeato duo aculei ventrales geminae pinnae focum tenent, in aliis stylus sterni extremus articulo mobilia pinnae vices gerit, in quibusdam articulum mobilem styli nullum conspicere licet, et ipse stylus sub cute latet nec usquam cute prominens vix agnoseitur. Hunc ipsum stylum (ubi solus adest) pro pinna ventrali vix numerandum esse censeo, eoque magis miror, Schneiderum ipsum hace duo genera artificialia in Blochii syste-, mate nondum separasse. In vetula numeravi radios 30 pinnae ventralis, stylo sterni prominenti et processui alteri interno sterni appositos, propius autem hos radios inspicienti patet esse 10 radios duplicatos, undecimum vero simplicem; quod argumento est, pinnam ventralem geminam adesse sed coalitam, quae radium undecimum gerit communem. Sternum hoc anterius carinatum, inferius bifidum, processu inferiore introrsum inflexo, Linnaeus mox radium mox spinam, rectins? Artedi pinnam ventralem vocat. In biacofeato sternum inferius non bifidum, sed integrum aculeos 2 appositos gerit, ginglymo articulatos, etc. Hace omnia probant, Balistarum genus esse octopterygium non hexapterygium vel heptapterygium. Cum vero Balistarum jam quinae species repertae sint, senis tantim pinnis instructae et pinnarum ventralium desectu omnino distinctae, lex intrat systematis Blochiani in numero pinnarum posita et jubet, has quinas species hexapterygias, pinuis ventralibus destitutas, sub nomine Balistarum apodum remanere solas in classe sexta et genus proprium formare, ne discentes in inquirendis et inveniendis ex numero pinnarum speciebus secundum legems perturbentur, nec in dubio hacreant.

Plures jam Balistes apodes adesse, ringens, Monoceros et lineatus Blochii, in iconum systema illustrantium numero pictus probant. Praeterea et Peronius in itinerario (Voyage aux terres australes p. 139.) quartam speciem nuperrime ad littora novae Hollandiae in Balistapodo, male sic dicto Wittensi suo invenisse refert, et specimine philosophiae naturalis et systematicae Francogallorum sequentibus verbis confirmat: " Ce dernier jour sut marqué par une decouverte importante, celle d'un nouveau genre de poisson Balistapodus Wittensis N. voisin de celui des Balistes, mais qui en diffère par l'absence absolue de toute espèce de nageoire ventrale. Ce dernier caractère en fait le premier type d'un nouvel ordre dans la méthode ichtyologique de mon illustre maitre Mr. de la Cépède. Ce célèbre naturaliste, en esset pas borné dans sa classification générale des poissons, à présenter toutes les espèces connues jusqu'à ce jour; mais s'élevant à des considérations plus générales et plus philosophiques, il a comparé tous les grands rapports de l'organisation de ces animaux, déterminé toutes les combinaisons possibles des principaux organes extérieures entr'eux. Analysant ensuite toutes celles de ces combinaisons connues jusqu'à ce jour, il en a conclu l'existence, ou du moins la possibilité de l'existence de celles, qui, pour nous, restoient encore sans type dans la nature; et des-lors, devançant le temps et l'expérience il esa fixer dans ses tableaux la place, que chacun de ces groupes ignorés viendroit y occuper un jour - Son grand ouvrage sur les poissons n'étoit pas encore fini et déjà sur des lointains rivages ses hardies conceptions étoient réalisées!!! " Sed mallem, Peronium potius picturam ejusdem piscis vel descriptionem formac saltem et partium externarum et varii coloris nobiscum communicasset, per quam certiores facti fuissemus, an novae Hollandiae Badistapus cum Marchionico australi in tabula adjecto depicto conveniret nec ne, quod, cum nondum factum sit et Balistapus Péronii nec ab ipso inventore, nimis praematura morte nobis ac scientiis naturae crepto, neque ab ejusdem socio Lesueurio, qui verosimile piscem ad naturam pinxit, vel ab ullo alio ichthyologo Parisiensi, piscis forsan in Museo Parisiensi asservatus descriptus sit, in posterum expectandum est. Sed haec de novo genere Balistapodum sufiiciant, transeamus nunc ad novam speciem.

ab. IX.

BALISTAPUS capistratus,

indigenis insulae Nuckahiwae Koauhui dietus.

Balistapus noster forma habitu et magnitudine omnium maxime cum Baliste Indico, aculeato Blochii et lineato ejusdem Coromandelico conveniens, ab iisdem iterum corpore atro, squamis minoribus rhomboidalibus muricatis vel hispidis scabro, specillo circum oculos ducto et capistro, ex lineis tribus egregie pictis compositodistinguitur. Lineae capistrum formantes sunt aureae et violaceo cocruleae, alternatim positae, ab ore ad anum usque ductae; praeter dietas posteriores accedant duae anteriores labiales, os instar sphineteris labiorum cingentes. Conspicillum ex singula tantum linea coerulea circum oculos dueta utrinque formatur. Praeterea sex aliae sunt lineae circulares vel semicirculares utrinque, dorsum inter pinnam anteriorem dorsalem et posteriorem occupantes, anteriorem quasi cingentes, parallelae, flavae, et totidem aeque sinuatae ventrales circum anum ductae. Aculeos caudales aduncos antrorsum incurvatos, novem binis ordinibus digestos quibus armatus est, ut omnia occurrentia secum rapiat, et pinnarum formam ipsam cum lineato et aculeato Blochii fere communes habet. Corpus a latere compressum, ut hoc ex diametro corporis (Fig. 5.) transversaliter dissecti conspicitur, et squamis rhomboidalibus muricatis margine pectinatis, quae lente et microscopio auctae (Fig. 3. et 4.) delineatae sunt, tectum est et scabrum. Linearum colores splendidissimi ex fundo aterrimo egregie ascendunt, sed aetate piscium variare

videntur, in junioribus nempe et minoribus color in fundo fuit atrofuscus et linearum capistri interdum duae tantum, ut hoc in Fig. 2.,
quae rostrum junioris naturali magnitudine delineatum sistit, videre
licet, semper vero coloris lucidioris, altera coeruleo virescens, altera
rosea, in adultioribus et majoribus contra, qualem in figura prima
delineavi, dimidio minorem, color in fundo aterrimus est et lineae
capistri exteriores duae nec non singula labialis et singula conspicillum formans, coeruleae, media capistri et altera labialis aureo miniaceo, non rosea.

Praeterea caput rostrum format fronte alta et longe proclivi, oculis magnis verticalibus, naribus geminatis oculo approximatis flavo marginatis, ore minori, labiis crassiusculis, dentibus incisoriis; glirium in modum prominulis, armatum. Oculi prominuli, iride virescente, pupilla nigra annulo aureo cincta. Pinnarum sex forma et positione noster cum lineato Blochii congenerico suo conveniens, pinnas gerit posteriorem dorsalem et analem, basi scutatos, altera alteri oppositas, superiorem viginti sex, inferiorem viginti quatuor radiis radiatam, pinna caudalis ad basin etiam scutata vel potius squamata, radiis undecim vel duodecim extremitate quadripartitis radiata est. Pinnae pectorales breviusculae, rotundatae tredecim, radiatae. In pinna dorsali anteriore tres tantum radii numerantur, sed prior osseus, crassus, longus, muricatus et antrorsum versus serrato-crenatus, in dorso sulcus est pro reponendo hoc radio. Apertura branchialis obliqua, operculo membranaceo nudo non squamato ante pinnam pectoralem. Anus in medio paulo remotus et caudae paulo propior. Os angustum subrotundum fere constrictum, labia crassa, splincteris in modum dentibus prominulis applicata. Dentium structura Tetraodontum Scarorum Labrorum et Sparorum quorundam Indicorum quodam modo similis, anteriores, incisores glirium in modum obliqui prominent, quorum superiores 8 erena incisi. descendentes, inferiorum ascendentium apices suscipiunt et maxillarum productiones esse videntur.

Balistapodis caeterum Balistarum natura est et in naturale genus priores cum posterioribus confluunt, uno eodemque corporis duri squamis vel scutulis rhomboidalibus scabris tecti vel quasi loricati, habitu et forma gaudent, colore obscuriore lineis lucidioribus et interdum elegantissimis variegato, rostri denique et dentium structura plerumque omnes inter se conveniunt. Cum Tetraodontibus in eo quodammodo conveniunt, ut corpus inferiora versus inflare possint et integumenta abdominalia aëre incluso extendere, quod experimento, quo tubuli ope per anum inducti abdomen inflari potest, comprobatur. In tabula 148 operis majoris ichthyologiei Blochii Balistes ejusmodi inflatus repraesentatur. Edules non sunt, imo quibusdam temporibus adeo venenatum esse nostrum, ex relationibus Brittanni Roberts de annis calamitate famis et sterilitate sitodii vel Artoearpus vel Rademachiae incisae damnatis, suspicor; vitam enim degunt in scopulis coralliferis insulae Nuckahiwae et inter Madreporarum et Milleporarum ramos, papillis vel polypis earum victitantes et Aplysiis, Doridibus aliisque Limacinis nec non Sepiis vesci dieuntur. Ex esca jam concluditur, carnem corum sanitati non convenire. Praeterea et Echinum sphaeroidalem et Aphiuram nigrant ad littora insulae frequentem non spernere dicuntur, quod etians dentium structura ad rodendum aptissima suadet...

In definiendis vel adsignandis notis specificis nostri piscis, specillo nemper et capistro, jam duas e numero piscium cognitorum species occurrere conspicilli et capistrati nomine insignitas; video. Cepedius enim Gallus ex Commersonii- tabulis pietis Balistem, nec nomine neque descriptione illustratum, in operis sui Tab. 15. Fig. 3. (Baliste bridé) depinxit et descriptionem et nomen capistrati ex sola pictura, quae vix capistrum refert, adjunxit. Capistrum non clarum est nec per lineas duetum sed nebulosum, ad pinnam pectoralem vix perductum ex fascia làtiuscula, rostrum cingens sons modiluta conflatum et vix nomen meretur. Praeterea piscis ventrali ponna distinctus et caudali lunata, aculeis caudalibus

vero destitutus est. Ex ailatis notis quisque intelliget, Cepedii piscem non solum genere sed etiam specie a nostro diversum esse, cumque nil nisi nomen, si alias Balistapus esset, cum codem commune habere.

Balistes conspicillum vigesimani speciem in Blochii systemate ichthyologico (pag. 474.) sistens, a Cepedio in Tab. 16. Fig. 3. depictus et Balistes Americanus dictus a Sonnerato (Journal de Physique 1774 Tome III. pag. 443. Tab. 3. depictus) sub nomine Guaperva tacheté describitur, macula sub oculo notatus est, quae conspicillum referre dixerunt, sed vereor, ne plurimi spectatores in eadem hac macula specilli formam clarius agnoscant, quam in praecedenti capistrum inveniant:

Praeterea Guaperva abdomine albor nigroque maculato, et pinna caudali nigro marginata distincta et specie saltem a nostro diversa est. An Guaperva ejusdem generis sit ex icone non discernere licet. Si vero aliqui de nomine, binis animalibus admodum diversis synonymo solliciti essent, nostrum propter specillum circumoculos ductum perspicillatum nominare possent. Interca tamen nostrum in systema Ichthyologiae Blochii, sequentibus notis breviter motatum, inserendum esse censeo sub nomine:

Balistapus capistratus. B. corpore compresso, squamis rhombeis muricatis, scabro, atrofusco, specillo lineari coeruleo circum oculos ducto et capistro trilineari ex aureo coeruleoque picto, ab utraque maxilla ad pinnam analem producto, fascialiabiali bilineari instar sphineteris labiorum cincto et circulis exlinearibus parallelis, circum pinnae dorsalis prioris basin et anum circumductis, flavis ornato, capite vel fronte declivi, oculis prominulis ad verticem, naribus geminatis approximatis, pinnis pectoralibus breviusculis rotundatis, operculis membranosis, aperturae branchialis oblique aflixis, pinna dorsali priori truz-

diata, radio primo osseo crasso aculeato et extus serrato cum sulco profundo pro eodem suscipiendo, in dorso pinna dorsali posteriore anali opposita, ano paulo propius versus caudam, pinnae caudalis rotundatae, radiis 11 quadripartitis, aculeis caudalibus 9, duplici ordine dispositis, antrorsum recurvatis robustis.

P. 13. d. a. 3. d. p. 26. A. 24. C. 12 — 11. habitat inter scopulos et Corallia Oceani australis, Insulam Nuckahiwa alluentis.



DE GECKONE AUSTRALI ARGYROPO D EAcceduntico

NEC NON DE GENERUM NATURALIUM IN ZOOLOGIA SYSTE-MATICA DIGNITATE TUENDA, ATQUÉ DE GECKONIBUS IN GENERE. nes Stellionis tereticaudati et lauticaudati

AUCTORE

TILESIO.

Conventui exhibuit die 21 Maji 1817.

Insulas australes interdum pulcherrima, interdum et insolitae et singularis imo stupendae indolis et formae animalia proferre, jam nuper piscis exemplo Balistarum affinis, sed ventralibus pinnis destituti demonstratum est. Ex eadem Marchionica Oceani pacifici insula Nuckahiwa dieta, cujus historiam celeberrimo Krusensternio nostro debemus, lacertum ex itinere ejusdem circum terram allatam jam describendi animus est. Animaleulum e Geckonum familia est et eum satis superque notum est, omnium lacertarum Geckones maxime luridas, aspectu horridas et deformes esse, nostram lacertam australem vix venustam dici posse facile conjicitur; sed nihilo minus ex admirabili pedum structura et imprimis ex lamellarum argento resplendentium pulchritudine in digitorum plantis vel solcis inferioribus conspicua, eandem omnino admiratione nostra satis dignam esse, mox demonstrabitur.

Praeterea animalculum hocce divisionem lacertarum, a Zoologis recentioribus dissectam et multiplicatam perlustrandi occasionem affert. Pallasii nostri monita de non distrahendo naturali lacertarum genere Francogalli audaciae et confidentiae prompti non respexerunt, idemque hoc genus contra naturam in sedecim genera con-

minuerunt vel dilacerarunt (*), quamvis alias in classe subrica et dissiciliore Molluscorum omnes sese ad ejusdem Pallassii nutum (**) converterent, et astute satis, inventorem silentio transeuntes mutato nomine (***), id pro novo invento Francogallico venditarent, quod de ordine Centroniorum Mollusca et Echinodermata actinoda comcomplectente, de Limacinis et reliquis Molluscorum ordinibus naturalibus, modeste pro more consueto ac circiter tantum in Miscellaneis et Spicilegiis zoologicis expertus et side conspicuus senex proposuerat.

De Lacertis Rossicis verba faciens, ingenii acic aeque conspicuus monet: "Lacertarum genus, elegantissimum, agilissimum plerumque mutum, et mire varium, apud nos etiam in australioribus regionibus satis numerosis speciebus pullulat, dum unica tantum in septentrionalibus propagatur. Videtur ratio hujus esse, quod oviparae pro maturanda progenie ardente magis sole et arenoso sicco solo indigeant, quod exemplo lacertae Tauricae praesertim probatur, quae in Chersoneso Taurica olim frequentissima, post insecutos tres annos (1803 — 1805) admodum pluviosos et continua intemperie infames, ita nunc periit, ut vix unam vel alteram per plures annos hine inde offendere daretur. Hodierni plerique Zoologi hoc genus ordine (****) a Serpentinibus alienarunt; sed continuam familiam esse illustri exemplo docent Chalcidae dictae, Lacerta anguina, Anguis

^(*) *V. Dumerils* analytische Zoologie von *Froriep* übersezt. Weimar, Bertuch, in 8^{ve} 1806 pag. 80 et 82 et 73. Ordinis Sauriorum familiae planicaudatae et tereticaudatae, colortes, genera et species.

^(**) Pallassii Miscellan. Zoolog. pag. 72. 73. et 152. 153. etc. ejusdem spicileg. Zoologic. fasc. X. p. 24. 27. 31. 35. et praeprimis in versione ejusdem libri aucta et cum notis ab auctore ipso vernacula lingua ita sub titulo: Naturgeschichte merkwürdiger Thiere, in 4. Berlin 1778. Zehnte Sauml. p. 44, et aliis in locis, ubi de methodo systematica loquitur.

^(***) Limacina in Gasteropoda, Centronia vel Actinoda in Radiata et sic porro.

^(****) Saurii i. e. Lacertae ordinem constituunt in Methodo Francogallica et quidem penultimum, Ophidii i. c. serpentes ultimum et Batrachii (ranae) et Chelonii (testudines) priores reptilium ordines

bipes ad Chalcidas pariter pertinens et praesertim descripta a me Lacerta apoda: nec anatome comparata refragatur. Multo minus eos laudaverim qui facertas in varia genera distraxerunt: generis enim naturales subdivisiones, characteribus ex habitu desumendis, determinandae adeo sunt obviae, ut multiplicatione nominum non indigeamus, numeroso licet in genere. Has subdivisiones uaturales satis bene indicavit Ginelinus in editione Linneani systematis, ut paucas species transponendas esse credam, aliquas tamen familias conjungendas.

Attamen Dumerillus J. c. Cuviero (*), Cepcdio (**) et Dausdino (***) duce, Saurios suos in duas primum cohortes, laticaudatas nempe et tereticaudatas divisos, in sequentia genera distraxita.

1) Crocodilos, 2) Dracaenas, in quibus unica tantum species Lacertus Indicus Wormii nota: 3) Tupinambides, quibus duae familiae insunt, altera cauda simplici e. gr. lac. monitor L. altera cauda cristata, e. gr. lacerta exanthematica; 4) Uroplata sunt Geckones cauda gubernaculi instar applanata, pedibus lobatis et cristatis distinctae. e. g. Gecko fimbriatus Daudini, Stellio fimbriatus Schneideri. Lacerta homolocephaia Creveldi (****) et reliquae Geckones aquaticae; 5) Lophyros (Agama aliorum), e. g. Lacerta superciliosa L. et plures granulosa cute distinctae, 6) Basiliscos, (Tupinambidis et Iguanae habitu sed crista dorsali a prioribus et cauda lata a posterioribus distinctae) e. gr. Lacerta basidiscus L.

Haec sunt genera tantum prioris cohortis, lacertas planicaudatas complectentis, in posteriore cohorte lacertas tereticaudatas con-

^(*) Cours de l'hist, naturelle.

^{(**} Histoire naturelle des quadrupèdes ovipares et des serpens par la Cepède, Paris 1788 H. Vol. in 4. Deutsche Uebersetzung mit Zusu zen von J. M. Bechstein. Weimar 1800. 5 Theile in 8. mit Kpß.

^(***) Histoire naturelle des ramenes, des grenouilles et des crapauds par Mr. F. Daudin, Paris 1802. 4.

^(4***) Magazin der Gesellschaft naturforschender Freunde. Dritten Jahrg, viertes Quartal, Berlin 1809, 12b, VIII. pag. 206,

tinente decem genera numerat, quae sunt 1) Iguanae (majores lacertae dorso cristatae) e. gr. Lacerta Iguana L. 2) Dracones e. gr. Draco volans L. 3) Agamae, e. gi. Lacerta againa L. 4) Chamaeleontes (altipedes corpore compresso digitis coadunatis canda incurvata), e. g. Lacerta Chamaeleou L. 5) Geckones (seil. terrestres, tereticaudatae, sunt ergo separatae et in duobus generibus divisae ac generalem in planicaudatas et tereticandatas divisionem non probant) e. g. Geckones Ginelini in syst. Linneano. 6) Stelliones, e. gr. Lacerta Cordylus L. 7) Anolides (sunt semigeckones quasi vel sub extremitate digiti tantum lamellatae, iguanacformes), e. gr. Lacerta bimaculata L. 8) Lacertae (in hoc lacertarum genere omnes complecturiur species, quibus in reliquis generibus locus aptus nondum adsignari potuit, nihilominus tamen ad 40 et quot excurrit specierum numerum accrescit, et praeterea subdivisiones duae, Tachidromi nempe vel lacertae cauda longitudine corporis triplici distinctae, e. g. Tachydromus sexlineatus Daudini et Ameivae vel lacertae collari ex squamis grandioribus destitutae, e. gr. Lacerta Ameira L. accedunt). 9) Stinci (lacertae ad modum piscium squamatae), e. gr. Lacerta Stincus L. (et in hoc genere subdivisiones stabilitae sunt, Seps nempe et lacertae bipedes e. gr. Lacerta apoda Pallassii). 10) Chalcides (et in hoc genere distinguintur lacertae quadrupedes e. gr. Tridaciilus Cepedii, et bipedes e. gr. Bipes. Cepedii canaliculatus.

Vidimus ergo Geckones in duobus imo tribus generibus separatas vel dispersas, imo non genere tantum sed jam vohorte separatis iisdem Geckonibus solis universalis lacertarum in cohortes laticaudatas et tereticaudatas divisio nec fide nec consensu celebrari videtur, cetera genera caudem nec melius probant, sed cum de Geckonibus solis sermo nobis sit, reliqua transcundo mittamus. Geckones, quibus, excepto habitu corporis et capitis depressi lurido, unica veva distinctionis nota in plantis quinque lobatis cristatis vel inferioribus pedum superficiebus lamellatis inest, ex tribus dir

versis generibus Dumerillianis, in quibus dispersae sant, colligi debent. Gecko noster in tereticaudatis quintum intrans geans a Dumerillio constitutum, ab omnibus usque adhue notis specielo is colore atrofusco et lamellis solearibus digitorum argenteis satis distincta et nova est, antequam vero ad ejusdem descriptionem specialiorem progrediamur, licitum sit alia exempla dilacerationis generum afferre.

Aequali ratione in dilacerato Medusarum genere a Peronio (*) nuperrime peccatum est, qui, licet ob multa de historia naturali novae Hollandiae merita et in primis ob Medusarum genus denuo revisum, permulis novis speciebus auctum et novis observatis illustratum magni acstimandus sit, in eo saltem reprehendendus est, quod ex Medusarum speciebus, Medusarum genera fecerit. Genera sua, quatenus in posterum confirmantur, familiae nominandae sunt et hae familiae, quodammodo similes inter se in turbas vel cohortes genere unico Medusarum subjunctas colligi debent. In hoc enim statu distracto, quo nunc 29 genera Peroniana Medusarum vides, systemati Linneano non amplius respondent, ergo in unum reducenda sunt, nec reducendis iis merita Peronii diluuntur, ille enim egregius observator, et quod rei vim tribuit, egregia colligendi occasione et loco praeditus, incredibilem diversissimarum Medusarum copiam ad novae Hollandiae littora legit, casdém brevissime tantum, ut ordini systematico ab auctore invento responderent, descripsit. Sciagraphia Peronii monumentum optatissimi incrementi Zoologiae sempiternum manebit, sed plurimas species non ita strenue et ab omni parte perscrutatus est (quod vero perscrutatoribus et peregrinatoribus nauticis, singulari interdum obstaculo impeditis, ut hoc et mihi accidisse contestor, vitio non vertendum est), ut a generalibus ad particularia et specialia corporis interioris pervenisset et oe-

^(°) Histoire générale et particulière de tous les animaux qui composent ila famille des Meduses par MM. Peron et Lesucur, insérée dans le 14me tome des Annales de Museum de l'hist, nat, de Paris, in tomo 17. Deleuzeus Peronii Biographiam exposuit.

conomiam animalem et mechanismum motuum penitus intrasset vel perspexisset.

A maximo numero specierum quasi perterritus et perturbatus generalia tantum percepit, specierum vero anatomen non aggressus est, igitur nec consensum organicum neque partium internarum structuram intellexit, quod Gaedio (*) in Medusa capillata optime successit. — Post reditum ab itinere de Aequorearum vitae genere earumque functionibus physiologicis nobiscum egregias observationes (**) communicavit, observata reliqua collegit, inter se comparavit, et Medusas, per se quasi secundum tentaculorum et brachiorum nec non orificiorum praesentiam vel defectum et numerum, collocatas in ordinem systematicum disposuit (***). In hoc vero negotio perficiendo auctoritatem vel dignitatem generis maxime naturalis, nullo respectu in dignitatem generis proximorum animalium, distracti et in 29 genera dilacerati, laesit et neglexit.

In eo igitur a Peronio, ceterum laude dignissimo, peccatum est, quod limites generis seu legis systematicae egressus sit et officio in describendis et delineandis speciebus novis posito, sed ab eo neglecto, non satisfecerit. Melius fecisset Sciagraphiae Medusarum omnium systematicae auctor, si solas suas novas species exacte et ab omni parte prius perscrutatus esset et earum, quibus nunc caremus, descriptiones completioros et icones nobiscum communicasset, sed proh dolor conspectus totius territorii et ordinis systematici

^(*) Beyträge zur Anatomie und Physiologie der Medusen von H. M. Gaede, mit 2 Kpf. Berlin 1816.

⁽⁴⁸⁾ Sur les Aleduses du Genre Equorée par Péron et Lesneur. Annales du Muséum d'hist, nat. Tome quinzieme, Paris 1810, pag. 41.

^(***) Tableau des Charactères génériques et specifiques de toutes les espèces de Meduses connues jusqu'à ce jour pag. 13, tom. XIV. des Annales de Muséum. Divisionis bases in ventriculi et brachiorum et tentaculorum praesentia vel defectu positae sunt; dividuntur inde Medusae in Agastricas et Gastricas monostoates vel polystomes, tentaculatas vel non tentaculatas, brachiatas vel non brachiatas, seu non pedunculatas.

Medusarum suarum ei lubentius arrisit, ac anatome vel analysis singularum, in qua tamen sola conditio rein illustrandi fuisset. Jam cum auctor scientiis et nobis morte nimis praematura ereptus sit, et socius ejusdem Lesucur. qui artificiosa manu easdem ad vivum pinxit, icones solas, quas grato animo acciperemus, vix juris publici facere videatur; Medusae vero, saltem plurimae, nullo fere artificio conservari possint, damnum irreparabile inde ortum est, quod non nisi paucis speciebus et a me observatis restitui poterit.

Hoc jam laesionis generum alterum fuit exemplum, plura vero sunt et plura afferre possem peccata et exempla, sed odiosa sunt et de iis taceam, cum mihi de sola dignitate generum tuenda loquendi animus sit. Genera sunt leges vel statuta systematica. Leges non sancire modo sed tueri officium est. Genera vero tuentur, si naturae scrutatores animalia ipsa viva, et anatomici mortua curatius perscrutare vellent non autem ordines et genera nec totum systema. Extravagandi libidine quadam vero nostrum tempus, saltem decennium historiae naturalis notari, non solum Francogallorum systematis novandi studium, sed ctiam philosophiae naturalis specimina germanica comprebare videntur. Stabulum si quis construcre vellet vel mandram, pecora primumi illi tam natura quam numero cognita esse debent. Pecora i. e. animalia omnia per totum naturae universum dispersa, per saeculum ne numero quidem neque minus natura cognoscuntur, attamen multi sunt, qui animalibus hisce natura ac numero ignotis stabulum sat amplum et justum, uti credunt, aedificare student.

Reipublicae cives in satisfaciendis officiis omnino leges coram habeant, non ut examinent vel corrigant, sed observent; male enim reipublicae consultum foret, si cives legum rationes perquirere ad ipsorum mentem corrigere et accommodare vel ipsi legis latores esse vellent. Sie et naturae cognoscendae studiosis non convenit leges, secundum quas natura animalia disposuerit, anxie quaerere, nisi

in animalibus ipsis, vel frustra quaesitas ex ingenii acumine et arbitrio vel vanae gleriae causa constituere.

Nullo dubio subjectum est, quiu Zoologi Francogallici recentissimis temporibus vario et expedito rerum naturalium intuitu et . accelerato ingressu, in variis historiae naturalis provinciis permulta praestaverint; in his enim corum merita, in excolendis artibus historiam naturalem adjuvantibus, pictura et sculptura nempe ac anatome prae caeteris inclareseunt, et haud parva iconum egregie pictarum et incisarum (in quibus colorum adumbrationes pracprimis nunquam negligendae et in ipsis laudandae sunt) copia patefacta sunt. Qualia et quanta denique sint merita Cuvieri principis Zoologorum Francogalline, qui anatomes ope Molluscorum classem lubricam et difficilem explicavit et illustravit, neminem sugit, sed nimio eorum novitatis studio, nova genera stabiliendi proclives, animalium classes et ordines naturales, e quibus simplicitatem Linneanam removerunt, perturbassè etiam verum est. Centronia vel Actinoda malacodermata et echinodermata nec non Myxoda, in quibus coordinandis Linnacus quidem erravit, injuste, quod alia occasione demonstrabo, ad Zoophyta retulerunt et acquali ratione ac Linnaeus, quem Theonino dente rodunt, in dijudicandis animalibus inferioribus gelatinosis. simpliciori organismo et confluentibus organis et functionum physiologicarum confluxu, disficilioribus et lubricis crrarunt. In his vero tam arduis et difficilibus, quibus nec sola Anatome nec analogia succurrit, primo aggressu errare humanum est, et errabunt facile omnes nisi animalium viventium observatis adjuti fuerint et conducti; sed magis taxandi sunt illi, qui melius intellexisse putant et in corrigendis antecessorum inventis denuo errant. Anatomen, quam solam Zoologiae praesidio et auxilio esse voluit Cuvierus, et ex structurae partium internarum analogia organis ignotis functiones et nomina. audaci confidentia assignavit, non ubique solam esse adjutricem, suo -damno ex Salpis expertus est, nec in caeteris Myxodis simplicioribus, Medusis nempe et Berois aegrius adhuc quin experturus sit,

dubito. In his enim affinitates et functiones non nisi viventibus cognoscuntur. Ex animalibus viventibus hisce observandis Physiologia colligenda vel ex analysi vel, ubi fieri potest, ex anatome collecta saltem confirmanda est. Cuvierus vero anatomen solam Zoologiae legislatricem designare voluit, nec aliam animalium affinitatem. nisi anatome probatam observasse visus est, quia in perfectioribus molluscis, optimo condecoratus suecessu, anatomes ope affinitates et. differentias detexit. Haec vero in Medusis, Berois, Physaliis et Physsophoris mucosis perscrutandis denegabit illi propter substantiam solubilem et diffluentem, quod in solidioribus concessit, quamvis eum in superioribus Molluscis favore persecuta sit, qua de causa ab iisdem in cadem via aggressis prorsus abstinere censeo. jam Zoologiam vel vitae scientiam ad solam Zootomiam reduxit. Saepe ex altero extremo in alterum contrarium transire solent. Practeritis temporibus animalia inferiora ex defectu anatomes tantum ignota erant, hodie per solam anatomen cognoscenda sunt. Linnacus. in animalibus minus notis plura interdum genera in unico complexus est. Francogalli in contrarium peccant et unum genus in plu-Sed liace de tuendo genere egisse sufficiant, adres distrahunt. nostrum Lacertarum genus redeamus et quidem ad Geckonum famiham, quae iterum in duas turbas vel Geckonum cohortes, nimirums planicaudatas et tereticaudatas, dividitur. Plures enim Geckonum species tereticandaras a laticandatis distinguendas esse, jam Gmelinus in Linacani systematis editione decima tertia ex lacerta vittala, Turcica, rapicauda Geckone proprie sic dicto et Geitje, inter se comparatis et Geckonum nomine pronunciandis intellexisse videtur; et ex Sebae specieles, in Museo Petropolitano obviis, et pluribus aliis postea accessis hoc idem facillime colligitur. Omnium optime vero et scrupu'ose satis, celeberrimus J. G. Schneider, Systematis Ichthyologiae Blochiani editor, de historia Amphibiorum, de historiae naturalis antiquitatibus et lingua Graeca meritissimus, de Geckonum semilia antiquorum et recentiorum relationibus illusurata, im Amphibiorum. Physiologiae specimine altero suo disseruit...

In specimine priore Amphibicum Physiologiae (*) auctor idem de Antiquitatibus horum anima'ium egit, quorum Geckones sub Lacertarum genere militantes, a Graecis A calabotae et Galcotae, Latinis vero Stelliones dictae, omnium notissimae, quoniam ubique et omni tempore una cum hominibus in aedibus habitare solebant. Qua de causa et antiquiorum relationes, quibus haud pauca de horum animalium moribus, nutrimentis, veneno et vitae genere continentur, haud spernendae sunt, et liceat ex dicto diligentissimi Schneideri libro ea, quae Geckonum familiam ex antiquorum relationibus illustrare valeant, addere et cum recentionibus comparare.

Antiquitates Geckonum, historiam naturalem illorum illustrantes.

Crocodilorum vocabulo Jonico non solum Crocodilus fluviatilis sed et terrestris (**), nobis hodie Stellio appellatus, auctore Linnaeo, comprehenditur. Quem Stellionem dixit Schneiderus in versione sua Aristotelis, cum graece Aristoteles Ascalaboten vocat, Linnaeus vocabulo arabico Gecko. Antiquissimorum et recentiorum relata in eo conveniunt, quod Geckonem venenatam esse lacertam consentiant. Reliquae lacertae multo minora veterum diligentiae in his animalibus describendis argumenta habent, si ab Ascalabote discesseris, cujus naturam omnes egregie enarrarunt. Esse vero eum ex genere illo lacertarum, quod lacertum Gecko, Mauritanicam Linnaei, multasque alias Linnaeo indictas species comprehendit, certissimis rerum argumentis vincam. Hujus vero Ascalabotae, alio nomine etiam Galeotae dictae, naturam accurrate fuisse perspectam antiquis scriptoribus historiae naturalis, non mirabimur, si meminerimus

^(*) Amphibiorum Physiologiae specimen primum scripsit J. G. Schneider Saxo, Eloquentiae et Philologiae Professor Trajecti ad Viadrum 1790, in 4.

^(**) Celeberr. Blumenbach in novissima vel nona Compendii ejusdem historiae naturalis editione pag. 247. Scincum Crocodilum terrestrem appellat. Schneiderus vero Scincos in historiae Amphibiorum fasciculo secundo, Jenae 1801 edito pag. 171 in peculiari genere complegiens Lacertum Stellionem Linnaei Crocodnium terrestrem putat.

eum eum hominibus ubique fere habitasse, exuvias ejus ad medicinam fuisse conquisitas, et ex stridore et reliquo ingenio ejus auguria captasse genus aliquod vatum, quod eodem nomine galcotas appellari solitum referunt Aclianus V. H. XII. 46. Ad Siciliam genus hoc vatum referre videtur Cicero de divinatione I. 20, ubi ex Philisto historico Galeotas interpretes portentorum in Sicilia nar-Originem nominis multi recentiores auctore Boch urto ex hebraico sermone repetunt, cum deberent potius ferum galectam cogitare, a cujus observata natura et ad omnia translata nomen interpretes ipsos nactos fuisse, clarissime patet, ex Pausania VI. p. 455. ubi commemorat statuam vatis Elei Thrasybuli ex celeberrimo apud Graecos Jamidarum genere orti. Haec galeoten seu Geckonem humero dextro adreptantem habebat; ad pedes autem fictus erat canis dissectus et pulmones monstrans apertos, e quibus vaticinari solebant, quemadmodum ex Geckone. Ex eodem loco simul apparet hoc genus interpretum extra Siciliam etiam fuisse in Graecia, nec nomen Stellionis vel Geckonis peculiare Siculis suisse Galeoten.

In specimine physiologiae Amphybiorum altero Schneideri Zyllichoviae 1797. impresso auctor historiam et species Geckorum enumeravit easque in peculiari genere stellionum pertractavit, nomen nempe latinum conservare et arabicum Geckorum removere placuit, caeterum ille Systematis curandi minus quam species et familiam illustrandi sollicitus fuit et lacertarum genus Linnaei naturale agnoscens sub genere stellionum nil nisi Geckorum familiam intellevit, ait enim ipse: "Stellionis nomen latinum simplex, graccum varium et multiplex, multis, praeter fabulas de origine poeticas, veneni dolositatisque criminibus, contraque quibusdam etiam divinationis viriumque corporis medicatricum argumentis a scriptoribus graecis et latinis fuit celebratum. Hujus igitur historiam dignam censebam, quam collectis atque invicem comparatis scriptorum veterum testimoniis atque auctoritatibus, diligenter enarrem, cui deinde adjungam e recentiorum scriptorum libris collectam generis hujus specierum singula-

rum notitiam accuratam, unde lectori constare possit, cui animalium reptilium generi stellionis nomen assignari, quocum recentiore nomine comparari, quacunque denique fide veterum scriptorum narrationes de hoc genere animalium censeri debeant.

Antiquissimi scriptoris graeci locus de stellione Aristophanis exstat in Nubibus, versu 170 ubi galeotén facit stercus in Socratis coelum intuentis faciem de lacunari tecti dejicientem; unde arguitur galeotem (γαλεώτης) mures et parietes usque ad lacunar perrepere Hanc ejus naturam tradit etiam Dioscorides, in praefatione ad Alexipharmaca p. 397. ed. Sarac. ubi, ut venenorum noxae caveantur, in tectis diligenter observanda laquearia esse praecipit; saepe enim ex alto animalcula venenata veluti phalangia et ascalabotae decidere et cibos vinumque subjectum inficere. Idem testatur Marcellus Empiricus e. 33. p. 277. ed. Cornar. Lacerti, inquit, appellantur, sive stelliones, qui per parietem repunt, curti sunt, quide cursu su- que graece Ascalabotae vocantur. "Antipodas terram habitare," pino Gecko- ait Plutarchus de facie in Luna p. 654. .. ωσπεο θοίπας ή γαλεώτας, id est veluti stelliones, supinos scilicet in terra nobis opposita." Geckonem meum in inferiore fenestrae horizontalis tecto horizontali navis nostrae insertae facie glaberrima vitrea decurrentem et supine commorantem vidi et eundem in aedibus incolarum vel indigenorum ferocium insulae nostrae plures nostrum tam in tecto, quam in truncis arundinis bambos horizontali situ dispositis et in superficie inferiore glaberrima et politissima lubricis supinum decurrere viderunt. Aristoteles (hist. animal. IX. 9.) supinum ait ascalabotem incedere veluti picum sub ramo arboris horizontali descendentem, scilicet per parietes et lacunaria repens muscas atque alia insecta persequitur, quae cibum ei praebere solent.

> Hesychius sub voce μωλώτης saltu ait coloten muscas capere, Kyranidum auctor graecus stellionem Xylobaten i. est lignorum scansorem et parietum seu toechobaten appellat, scilicet Xylobates vulgari

num

sermone graeco vocabatur tunc, qui antiquo Calabates et Calabotes, Scalabotes et Ascalabotes dicebatur a ligno sicco quod, graece naλου est, et ambulando βάτης, βώτης. Dum igitur parietes et laquearia supinus perreptat et muscas araneasque captat (araneis enim vesci testatur Aristoteles hist. animal. IX. r.), saepe in cibum potumque subjectum decidit. Vinum atque aquam, cui decidens stellio fuerit immortuus, innoxia homini esse in potu, Aelianus asserit (IX. 19.) contra oleum stellionis morte infectum male olere atque eum, qui inde gustaverit, pediculis quasi subito ebullire ait. At Plinius de Veneno 29 sect. 22 e stellionibus malum medicamentum fieri tradit. Nam, Geckonis inquit, cum immortuus est vino, faciem corum, qui biberint, lentigine obducit. Ob hoc in unquento necant eum, insidiantes pellicum formae. Remedio est ovi luteum et mel ac nitrum. Cum Plinio facit Avicenna IV. 6.2.5. Caro, inquit stellionis mortificat, et quandoque cadit in vino, cui immoritur et dissolvitur. Hoc qui biberit, vomitu et dolore stomachi vehementer conflictatur. Deinde adversus venenum hoc in cibo aut potu ingestum eadem remedia, quae contra Cantharides commendat. Haec ad illustrandum Aristophanis locum dicta abunde sunt. Quo vero rerum natura artificio pedes Geckonum perreptandis parietibus lacunaribusque incessu supino accommodaverit, nemo scriptorum veterum enarrare operae pretium duxit. Observatione autem recentiore constat artificium omne pendere a soli pedum lamellis vel foliis quibusdam succo tenaci ex glandulis explicationes aliquot scaturiente, imbutis, quibus facile rebus vel laevissimis, ve- incessus suluti ranae arboreae tuberculis glutinosis soli digitorum adhaerent et quasi agglutinantur. Ex ulteriori disquisitione plantarum Geckonis nostri argyropodis australis et ex lamellarum mobilium argentearum ejusdem perserutatione inductus, forsan et vacuum spatium a deprimendis lamellis, quae remitténdo et progrediendo iterum ascendunt, formari in cujusvis digiti solca, ut et in muscis domesticis, et sic idem hoe adhaesionis scilicet artificium ex alio etiam mechamismo explicari posse censeo.

de Esca Geckonis

ckonum

Antiquitate secundi scriptoris auctoritatem nunc investigabi-Is enim est Aristoteles, cujus loca breviter ponam. boten per hiemem conditum latere, exuvias vere ponere, mare foeminam majorem esse fradit eundemque cum reliquis lacertis nominat Hist. animal. VIII. 15. 17. IV. 17. de incessu animal. c. 15. idem Hist. anim. IX. r. asini inimicum nominat Coloten; dormire enim ait in praesepibus asini, ejusque nares subeuntem impedire quominus cibum capere possit. Κωλώτης idem est, qui ασκαλαβώτης, ut Grammatici cum Plinio affirmant. Colotis et Lacertis caudas (amputatas), renasci tradit Plinius IX. sect. 46. velut ex Aristotele; sed is in hist. animal. II. \$7. simpliciter lacertas (500)oac) et serpentes nominat. In Italiae quibusdam locis morsum Ascalabotae letalem esse refert in hist. anim. IX. 1. Auctor narrationum mirabilium c. 160! Siciliam cum Italia, et ipsum stellionem galeoten nominat; praeter ea in Graecia debili esse morsu addit: unde igitur Plinius VIII. S. 49. Theophrastus auctor est, anguis modo et stelliones senectutem exuere, eamque protinus devorare, praeripientes comitiali morbo remedia. Eosdem mortiferi in Graecia morsus, innoxios esse in Sicilia.

Fertium locum Nicandri poëtae auctoritati dabo, cujus haec est brevis stellionis notitia ex Theriacorum vers. 483. et sequentibus a me conversa. Exilis, inquit, Ascalabi sunt etiam infesti morsus, quem fama est a Cerere esse conversum cum Triptolemi pueri Metaneirae membra morsu suo laesisset circa puteum Callichorum in attica terra versantis, ubi Metaneira Cererem domo sua exceperet aberrantem et filiam Proserpinam quaerentem.

Ascalaphum nominat in eadem fabula Ovidius Metamorphos. V. 440 seqq. consentiens cetera cum Nicandro, cujus longiorem ex Metamorphoseon (ipse ετεοοιέμενα dixerat) libro excerptam narrationem posuit Antoninus Liberalis cap. 24. Uterque enim Cererem iratam potionis sibi oblatae reliquias offudisse Ascalapho refert; unde

Ovidius: "combibit- os maculas, et quae modo brachia gessit, crura gerit; cauda est mutatis addita membris; inque brevem for- de corpore mam, ne sit vis magna nocendi, contrahitur, parvaque minor men- Geckonis sura lacerta est; aptumque colori nomen habet, variis stellatus de derivato corpore guttis. " (Ultimorum horum verborum occasione lectores Stellionis Geckonis australis mei picturam inspicientes in maculas colore lucidiores, quibus membra adspersa vel guttata sunt, attentiores faciam; antiquorum pictores Solem et Stellas non radiatas, ut recentiores pingunt, sed rotundas vel circulares, ut hodie adeq Sinenses et Japones faciunt, pinxisse videntur.) Eventum his vervis narrat ex Nicandro Antoninus: εγένετο ποικίλος έκ τε σώματος ασκάλαβος, i. e. et transmutatus est in varium corpore ascalabum vel Geckonem, quem Dii hominesque oderunt; habitat juxta canales in locis eavis (παρ' οχετον) et quicunque eum occiderit, gratum faciet Cereri.

Ovidii locum de forma stellionis ex tota antiquitate unicum posuit etiam Isidorus Orig. XII. 4. Stellio, inquit, de colore nomen habet inditum; est enim tergore pictus lucentibus guttis in modum stellarum. Hinc pendet interpretatio loci Pliniani 29. sect. 28. quem totum ponam, annotationibusque aliquot illustrabo. Scorpionibus, inquit, contrarius maxime in vicem stellio traditur, ut visur quoque pavorem iis afterat et torporem frigidi sudoris. Itaque oleo putrefaciunt eum et ita ea vulnera perungunt. Quidam oleò illo spumam argenteam decoquunt ad emplastri genus, atque ita illi- de spuma arnunt. Hunc Graeci Coloten vocant et Ascalabotem et Galeoten. gentea ex la-mellis Medi-In Italia non nascitur. Est enim hic plenus lentigine stridoris acer- camenta. bi, et vescitur, quae omnia a stellionibus nostris aliena sunt. usque Plinius! ubi vetustae editiones scriptum habent herba vescitur.

At idem Plinius XI. s. 26 Chamaeleonum stelliones quodam modo naturam habent rore tantum viventes praeterque araneis. Odium scorpionis et stellionis mutuum commemorat etiam auctor libri de Theriaca ad Pisconem cap. 9. et Aelianus VI. 22, unde arguas scorpionem a stellione conquiri ad cibum, velut etiam araneas.

speciebus.

Italicum a graeco vel transmarino stellione pluribus in locis distinguit, ubi medicinas ex animalibus petitas narrat; ita stellionem Geckonum capsulis inclusum febricitantium capiti subjici libro 30. s. 30 narrat, ubi sect. 18. et 19. stellionem transmarinum (i. e. graecum vel ex calidioribus terris allatum) quasi ab italico diversum nominat. Idem XI. s. 30. magnam, inquit, adversitatem oleo mersis scorpionibus et stellionibus putant esse, innocuis duntaxat iis, qui et ipsi carent sanguine, lacertarum figura. Atque scorpiones in totum nullis nocere, quibus non sit sanguis. Quo in loco vix genus innocuum stellionum intelligere licebit, sed potius scorpiones innocuos dicit Plinius stellionibus, qui sanguine carent, lacertarum figura.

> Italicum igitur stellionem Plinius a graeco non solum morsu innoxio sed stellarum etiam seu guttarum tergoris et stridoris acerbi absentia distinxit. Unde mihi suspicio nata est, intelligi genus Italicum illud ipsum, quod Galliam australem etiam sub nomine Tarentae notum habitat, quodque voce aeque atque omni veneni criminatione carere testatur Gallus de La Cepède.

Lacertas cuticulam oculorum cum exuviis deponi recentiorum docuerunt Fabricius ab aqua pendente (Oper. anatom. p. 440.) Klein (herpetolog. p. 54.) et alii. Sed eam non esse corneae extimam lamellam, sed a cornea interjecta aqua pauca limpida distinctam epidermidem recte asserit cl. Blumenbach in specim. 1. quam observationem repetit in Lichtenbergii Magazin für das Neueste aus der Physik Vol. V. partis primac pag. 10. De vernatione animalium repentium Aristoteles (hist. anim. VIII. 17.). Nonnulla, inquit, animalium, quae latitant certo aliquo tempore et conduntur, senectutem dictam exuunt. Hoc vero senectutis nomine appellatur extrema cutis et primi ortus velamentum. Exuunt autem senectutem hanc quorumcunque cutis mollis nec testae instar dura est, vede Gecko- luti testudinis, igitur Stellio, Lacertae atque omnium maxime serpentes, vere scilicet cum latebris prodeunt, atque iterum autumno. Ab

num verna tione.

oculis primum abscedere senectutem dicunt, deinde a capite exuitur senectus ita, ut tunc caput pallescat, una vero die et nocte tota exuitur senectus a capite usque ad caudam hoc fere modo, ut interior pars convertatur foras, sicuti fit in foetibus, dum involucris secundinarum seu cherio exsolvuntur. Eadem ratione etiam insecta deponunt senectutem.

Exuviarum naturam accuratius investigavit loci Aristotelici interpretationem persecutus Veslingius (Observation Anatom. p. 223. Obtegitur, inquit, cutis squamea post mensium aliquot decursum cuticula alia, madorem corporis vaporesque ambiente aëre externo densante. Pellucida tota est, squamarumque subditarum ordines eleganti quasi typo repraesentat. Hanc cum perspiratione deinde liberiori officiat, tam verno tempore cum latibulis prorepunt, quam autumnali dum se recondunt, instinctu naturae, inter lapidum vepriumque angustias, a capite eam paullatim invertentes exuunt. Denique pag. 237. in exuviis, inquit, apparet luculenter eam non minus reliquo tempore corpore, quam oculis obduci, non levi tune visionis impedimento. Exutam cutem a Stellione devorari testatur antiquitas quae animal hoc veluti domesticium diligentissime observasse moresque ejus optime novisse et tradidisse videtur. Has enim exuvias sollicite bestiae velut ex invidia deglutionti eripere et in medicinae usum adhibere solebant. De hac re audiamus Plinium libro 30. sect. 27. Exuviae Gede comitiali morbo tradentem: Operae, inquit, pretium scire, quo-ckonum memodo praeripiatur Stellioni transmarino, cum exuitur membrana hiberna, alias devoranti cam. Observant cubile ejus acstatibus. Est de Geckoautem in loricis ostiorum fenestrarumque, aut cameris sepulcrisque; nun cubiliibi vere incipiente fissis arundinibus textas opponunt casas, quarum bus et habiangustiis etiam gaudet, eo facilius exuens circumdatum torporem, sed eo relicto non potest remeare. Vetustiorem nunc audiamus Theophrastum, cujus verba laudavit Aelianus III. 7. Is stellionem ait senectutem postquam exuerit, conversum ex invidia eam devorare statim. Ex narratione Plinii argui posse videtur stellionem eadem

qua serpentes ratione rimas angustiasque locorum quaerere, ut senectutem exuat; nec aliter casam arundinaceam potest ingredi, dum exuit, nisi a capite primum exuit. Mirum est corpus spoliatum tantum intumescere dici, ut remeare non possit stellio sed inclusus capiatur. Accedit Arnobii testimonium, qui sub simulacrorum cavis nidulari ait.

Stellionem favos alvearium ingressum depraedari cecinit Virgilius Georgic. IV. 243. sed non tam ipsos favos, quam apes peti Gecko api- a stellionibus certum esse puto. Columella de re rustica IX. 7. ubi locum Virgilianum repetiit, venenatum nominavit stellionem; Virgilius enim non tam certum aliquod genus lacertarum, sed omne earum genus ab alvearibus removeri voluisse videtur; hinc ejusdem libri versu 13 ;, absint, inquit, et picti squalentia terga lacerti pinguibus a stabulis.

De Geckogicis artibus usn

Praeter medicinas ab exuviis aliisque stellionis partibus petinum in ma- tas, quas enarravit Plinius, usum fuisse ejus frequentem in magicis artibus, testantur versus in Oraculo Hecatae apud Eusebium Praepar. Evang. libr. V. et apud Nicephorum Scholiasten Synesii p. 361. ubi est de Stellionibus: ζωοῖσι λεπτοῖσι κατοικιδίοις σκολαβώταις, i. e. exilibus animalibus domesticis scalabotis seu stellionibus.

de morsu ex saliva vene... nato

Ad morsus noxam a Nicandro memoratam redeo. Dolor vehemens livorque sequitur morsum, ait Aetius c. 12. vel Paulus Aegineta. Geckones et Galeotarum nomine appellatos fuisse monui, in eodem interpretando aberravit etiam Terentius, ubi in Eunucho Act. 4. scen. 4. colorem mustelinum (a γαλη squalus Galeus) ex Menandri γαλεώτης γέρων transtulit. De quo errore ita monuit Donatus: Ait autem Menander stellionem animal, quod lacertae non dissimile est, maculoso corio. Nempe ad id genus coloris facies exprimitur eunuchorum corporis, quia plerique lentiginosi sunt. Ceterum vel ex hac Donati annotatione constare potest lentiginem

stellionis a Plinio dictam intelligi corium ejus maculosum vel guttatum. Medicamentum ex stellione vino vel unguento immortuo paratum faciem bibentis vel illinentis eadem lentigine obducere auctor est Plinius. Debilem morsus noxam praeter auctoritatem scriptoris mirabilium narrationum, Nicandri, Aetii et Pauli, arguit etiam dentium fabrica, postea describenda, nisi forte peculiare salivae vencnum in morsu stellionis graeci accesserit, quale in quibusdam speciebus recentiores observationes agnoverunt, idque a gentibus Indiae orientalis collectum adhiberi ad sagittas imbuendas novimus. lionatus crimen ab hoc animale translatum vocari apud Romanos crimen apud testatur atiam Plinius 30. c. 10. nullum, inquit, animal fraudulentius invidere homini tradunt; inde stellionum nomen aiunt in maledietum translatum. Tuniculam exuit eodem modo, ut anguis, sed eam ipse devorat: scilicet hominem fraudulentum stellionatorem Romani et certum fraudum genus stellionatum vocabant. Apud Apulejum Metam. V. p. 172. Venus de Cupidine suo clandestino Psyches amatore ait: "Quibus modis stellionem istum cohibeam?"

Stel- Stellionatus

Glossae veteres apud Salmasium in Homonym. p. 101. 85calaboten interpretantur ή κολόσαυρα; quod nomen brevein lacer- Geekones tam significare videtur. Aliae Glossae explicant per vulgare nomen Atabici. Samiaminthe. Simile in Graecia audivit, Samia mitos, Bellonius. Hodiernum hoe stellionis in Graecia nomen cum proprio Orientis vocabulo Semamith comparavit Bochart Hierozoic. I. p. 1085, qui duas stellionis species ab Arabibus memorari docuit, alteram majorem Sammabras, alteram minorem Wezga appellatam. Vocabulum prius leprosum vel Leprae maculis infectam significat; Lepram adco et venenum Sammabrae assignat Damir Arabs. Alkazuinus Sam- corum visco mabram ait esse Alwezgo id est Stellionem parvi capitis et longae medicae. caudae; et carnem ejus super puncturam Scorpionis positam remedio esse, cum Damir Arabe refert. Lepram generari addunt Arabes esu salis, in quo volutatus fuerit, aut mucilaginosum saniem emiserit stellio. Ex quibus argumentis Bochartus collegit Arabum

Sammabram eundem esse cum Ascalabote graeco, quamquam Avicenna eodem vocabulo interdum de vulgari lacerta usus sit.

Colosauris vel Geckonibus brevieaudatis et Gecko noster australis adscribendus crit specie minori Guezqus vel Wezqu proximus. Hodiernum denique nomen, aeque vitiosum ad Schneideri mentem, Gecko per Linnaei auctoritatem obtinuit, etsi quidam scriptores recentiores ipsum hoc nomen Gecko similitudinem stridoris acerbi ab animale interdum editi aliquo modo reddere affirmant. Linnaeus in Amoenitat. academ. Vol. I. p. 134 ex Sebae auctoritate annotavit ,, Nomen huic lacertae datum est ob sonum , quem edit instanti pluvia; tum enim prae gaudio quasi, exclamat Gecko." At sonum ranarum haud absimilem singularem edere in ipsa Arabia annotavit Hasselquist (Reise nach Palestina. 8. Rostock 1762. p. Recentiorum scriptorum, qui stellionis nomen (injuste a Linnaeo in Crocodilum terrestrem antiquorum translatum) cum Arabico Linnaei Geckonis comparaverint, praeter Schneiderum, qui in veterum scriptis omnium optime versatus et recentiorum relationibus ac animalibus denique ipsis comparatis, omne tulit punctum, neminem novi, nisi Italum Paoli, cujus librum della religione di Gentili per riguardo ad alcuni animali. Part. III. laudatum legi a cel. Blumenbach Compend. hist. nat. p. 267. editionis tertiae, quam tamen notitiam emissam nunc in editione quarta video, qua de causa Inde forte posuit vir doctissimus Geckonum Linneanum venenato pedem lamellatorum succo infamem hábitare regnum Neapolitanum. Omnem hanc viri egregii annotationem translatam recepit Gmeliniana Systematis editio, Geckonique Linneano adjunxit. Ex nona et novissima compendii Blumenbachiani editione p. 247. adjectis verbis "Geckonem esse verum stellionem vel saurum antiquorum " auctorem Schneideri disquisitiones comprobasse videmus. Idem et omnium primus, Geckones in insulis australis Oceani habitare, loco citato annotavit.

Recentiorum de Geckonibus relationes nec non Character familiae Geckonum.

Quemadmodum in colligenda historia Geckonum ex veterum scriptis, eorumque natura et moribus, in iisdem melius ac latius quam e recentiorum relationibus cognoscenda, Schneiderum omnium accuratissimum et classicum auctorem cognoverimus, eodemque modo et diligentia recentiorum scripta perlustrasse et animalia ipsa perscrutasse, eundem videmus et in stabiliendo charactere familiae Geckonum perspicacissimum auctorem habemus.

Recentiorum relata, si Hasselquistium, Houttuynum, Perraltum, Dodartum, Charrasium et Schneiderum ipsum exceperis, pauca, brevia, fugitivo oculo observata et vix ad confirmandas veterum sententias satisfacientia videntur. Anatomes tantum et iconum, etsi non semper naturae fidelium, veteribus palmam praeripiunt recentiores.

Transeamus nunc ad notitias a scriptoribus disciplinac Linneanae de hac animalium reptilium, quae Lacertas dicimus, familia proditas. Primus autem Linnaeus ipse duos Geckones descripsit, sed reliquis Lacertis immiscuit, nec in propriam sibi cohortem vel separatam familiam redegit, quod satis longo temporis intervallo postea facere ausus est Jos. Nic. Laurenti in Synopsi Reptilium edita Viennae Austriae 1768. conatu quidem magnopere laudando sed eventu non satis prospero. Duabus enim a Linnaeo descriptis speciebus tertiam adjunxit nomine tenus quidem, sed notis certis nullis distinxit. Tandem in decima tertia Systematis Linneani editione a Gmelino curata species Geckonum in unum locum congregatae et notis quibusdam indicatae, at essentiale lamellarum in pedibus charactere nondum illustratae sunt. Caput ingens, digiti utrinque membrana aucti subtus eleganter lunato imbricati, acquales, in-. erassati, apice crassiore subglobosa unque recurvo supra enato, deslexo in tribus Geekonibus jam a Laurentio p. 34. notantur cha-,

racteres. In his autem observat clarissimus Schneider, Laurentio adjiciendum esse solum articuli secundi digitorum foliatum vel lamellatum, foliis transversis, aut simplicibus aut divisis et lunulatis, succo glutinoso scaturientibus; denique ungues aut nudi prominentes desuper, aut vagina squamulata tecti, in superiore articuli digitorum secundi parte exstantes, atque infra exsertiles inter lamellas soli divisas. Hos perfoliatos, illos nudos ungues Schneiderus nominat. Ani rimam transversam recte notavit Laurenti et juste simul habitationem Geckonum in domibus Indiae posuit, at de incessu supino per parietes et lacunaria muscas et arachnidas Scorpiones nempe et araneas consectantis nee non de instrumento, cujus ope superius incedens affigitur solo nempe digitorum lamellato et succoso velut agglutinato nimis tacere eundem Schneidero videtur. Aliqui tamen Geckones arbores ascendunt, ibique praedam insectorum captant; plurimi eandem cum homine habitationem frequentant etiam extra Indiam in Europa australi. Etiam noster Gecko australis cum hominibus una in casis ex arundinis bambos truncis constructis, cohabitare solet et a feris Insulae Nuckahiwae indigenis Kaka dicitur.

Amicissimus Collega Langsdorf in Vocabulario Nuckahiwico, quod itinerarii ejusdem parti priori insertum est, pag. 154., Geckonem nostrum sub nomine Ekaka temquam meram Lacertam attulit. Cum vero et ipsi indigeni ab eodem hocce pusillo animalculo sese abjungerent et ejus viciniam fugerent, ejusdem indolem haud lacertae innocentis aequalem nec ab omni veneni suspicione liberatamenspicor.

Altero conamine characteres familiae Geckonum stabiliendi Houttuynus (in Actis Vliessing. Vol. X. p. 321.) prodiit, qui Laurentio successit et sequentes notas proposuit. Corpus magis humile et latum quam altum, parvis squamulis tectum, caput longum trigonum antice obtusum, collum tenue vel breve, oculos grandes, auriquiarum tympanum manifestum, ani rimam transversam, pedes bre-

ves, quinque digitis divisos subtus globulos (Kwabben) soli instar gerentes. Schneidero admonere placuit, tympanum auricularum in plurimis lacertis manifestum oculis patere; in Sola Chamaeleontum, Scincorum, Tritonum et Salamandrorum familia latere in profunda aurium cavitate, aut cuticula corporis communi obtegi. Pedum digiti antici quaterni adsunt in specie a Gallo de la Cepede descripta. Solum digitorum male globulatum dixit, quod lamellis divisum est. Sed has soli digitorum articuli secundi ne quis satis esse putet ad agnoscendam Geckonum familiam: admonet Schneiderus, easdem ab eo repertas esse in lacerta aliqua quam cum descriptione Linnaei sola comparatam principalem esse existimabat. Hanc scilicet Linnaeus digitorum articulos penultimos latiores subtus gerere ait Amoenitat. Academ. Vol. I. p. 286. n°. 11. Per hanc vero lacertam naturam opificem a reliquarum lacertarum forma sensim et gradatim ad Geckonum familiam transitum facere voluisse, suspicari licebit.

Schneiderus, collectis omnium auctorum tam veterum quam recentiorum Geckonum speciebus et ex priorum auctoritate commotus, Geckonis vocabulo remoto, Stellionis nomen familiae restituit et Geckones tredecim sub Stellionum nomine descripsit, et familiae de- Character nuo stabilitae non solum tereticaudatas sed etiam laticaudatos vel familiae Stellionum seu platyuros subjunxit. Descriptis hisce speciebus ex iis sequentes sa- Geckonum. miliae characteres exposuit: Caput ingens, planum, oculi grandes sphacrici, prominentes, rima pupillae verticali, artus breves utrinque et crassi. Maxillae dentium minutorum, acutorum, introrsum versorum seriem unam utrinque gerunt; lingua lata, crassa, apicem obtusum leviter divisum habet. Corporis tegumentum variae estfabricae; quorundam enim cutis squamulis rotundis scutorum instar contexitur, aliorum squamulis conicis minutis veluti granulata apparet; interdum tota corporis artuumque superficies superior mucronibus in ordinem dispositis horret; modo singuli mucrones vel tubercula in collo vel alibi sparsa conspiciuntur. Anus rima transversa patet. Pori femorales quibusdam desunt. Digiti pedum aucti margini membranacea crenata, quae ipsam digitorum basin aliquatenus

velut in tryngarum vel avium remipedum genere (*) contexit: articuli secundi digitorum subtus aucti foliis seu lamellis membranaceis vel cutaneis transversis asperis, imbricatis succo glutinoso in quibusdam veneni suspecto scaturientibus vel simplicibus vel sulco medio per longitudinem divisis; ungues curvi vel acuti, extremo articulo additi vel liberi undique prominent, vel in vagina squamata vel granulata conditi super articulo secundo ipso eminent atque infra per sulcum medium lamellarum emergunt, pro lubitu animalis retractiles. ut in genere leonum catorumque. Hinc incessus animalium hujus generis per corpora laevissima, parietes et lacunaria tectorum etiam supinus. Vocem aliis addidit, aliis detraxit rerum natura. Hominem non fugiunt, contra habitationem eandem cum eo frequentant, muscas atque alia insecta captantia; alias arbores, tecta et contignationes domorum ascendunt, hieme in rimis cavisque latitantia. cessu digitorumque fabrica referri genus hoc videtur ad ranas arboreas, reliquas affinitates in peculiari capite enarrabo.

In Schneideri Stellionibus laticaudatis et tereticaudatis (tredecim speciebus Geckonum) conjunctis, tam lato et amplo ex artuum brevium, tegumentorum, linguae, dentium etc. notis composito charactere vix indigemus, sed structura pedum lamellatorum et capitis ingentis jam sufficiant, reliquae enim notae ex laticaudatis petitae in teriticaudatis ob varium vitae genus non congruunt. Aquatiles enim et pallustres laticaudati Geckones non una cum homine in tectis-vi-vunt, nec in tractando Geckone australi tereticaudato tantae attentionis dignae sunt. Prima species apud Schneiderum Stellio Gecko dicta est Gecko Linnaei (**) vel Hasselquistii (***), ubi male fe-

^(*) Speciatim Podiceps cristatus vel Colymbus cristatus propter similem digitorum dilatationem huc referri meretur.

^(**) Linn. Amoenit. Acad. Vol. I. pag. 133. pollices utrinque ungue carere recte annotavit, at diversam speciem tractasse videtur, quam altero loco ejusdem voluminis p. 292 callis corporis cauda annulata atque unguium absentia distinxit.

^(***) In Hineratio jum citato pag. 358 et 357.

mora dicuntur in anterioribus artubus, quae ad posteriora pertinent: practerea eo vocabulo omnem artuum anteriorum formam male signari Schneidero videtur, inepte etiam figura cylindrica ovatae adjungitur in describendis artubus, deinde falso lobulus pedum subtns longitudinaliter in lamellas dividi dicitur, sinu etiam longitudinali lobulum distinguente. Lamellae enim seu folia membranacea, soli digitorum sulco per longitudinem diviso, transversae atque imbricatae sibi incumbunt. Ungues in vagina super articulis digitorum secundis latentes vel eminentes in vivis oculos vivi docti fugisse videntur. Sed male et injuste etiam Linnaeum a Schneidero reprehensum fuisse, ex sequentibus verbis videmus: "Longitudo pedum anteriorum non eadem esse potest, quae posteriorum, utpote in hoc cu reliquis lacertarum generibus omnibus longiorum." Lectores inspiciant solam adjectam figuram picturae meae secundam, in qua Geckonem supinum expansis pedibus longitudine parum diversis videbunt. Habitantem Cairi in Aegypto domos intra et extra oberrantem Geekonem vidit Hasselquist de ejusdem veneno memoriae et fide dignissima verba faciens: "Maxime singularis est hujus animalis venenum, quod ex lebulis (scil. intra lamellas) digitorum exhalat; quaerit animalculum loca et quascunque res sale marino imbutas vel tinetas; hoc dum invenit aliquoties supercurrit et currendo venenum post se relinquit maxime noxium. Vidi Cairi mense Junio 1750 puellam et duas foeminas morti propinquas, quae caseum mandueaverant recentem salitum in emporio emtum, in quo animalculum hoc venenum deposuerat. Quam aeres sint exhalationes digitorum vidi aliquando Cairi, dum animalculum supra manum currebat religiosi cujusdam, qui illud capere voluit, mox per integrum spatium ab animale tactum, oriebantur pustulae minimae cum rubore, calore et parvo dolore, omnino ut illis, qui Urticam tetigerunt. num edit singularem ex gula prodeuntem, Ranarum haud absimilem, quem noetu imprimis percipere licet."

Equidem simile testimonium et de nostro Australi Geckonc afferre possum, quorum alter cum fructibus Musae Paradisiacae Sito-

dii vel Arctocarpos, Coccos nuciferae et Citrullis ex Insula Oceani australis Nuckahiwa allatus et per satis longum temporis spatium in latebris navis nostrae et occultis absconditus, sensim in malum ascensus, ibique Loewensternio nostro praesente, a nautis nostris manu captus est, hominis manus, qui animalculum coeperat et manu ad me apportaverat, papulis et pruritu, qualem ab urtica contacta novimus, affecta fuit. Fructus plurimi a feris incolis insulae natando afferebantur ac aqua marina imbuti fuerunt, et cum ab Hasselquistio certiores facti simus, Salem et Salina sepius a bestiola hacce sanie digitorum infici, quae deinde cum cibis ingesta colicas passiones vehementissimas inferre solet, idem hoc nostris fructibus interdum accidisse suspicor, quorum quotidiano rictu hoc tempore in nonnullis diarhoea sequebatur.

Ad synonyma Linneana corrigenda porro Schneiderus adjecit: Sed hunc stellionem ab eo, quem hoc primo loco describere volui, plane diversum esse demonstrant lamellae soli digitorum medio sulco divisae, unguiculique absentes vel potius in vagina reconditi et retractiles; cum is, quem nunc intelligi volo, lamellas has integras, nec divisas, unguesque digitorum liberos et nudos, exceptis utrinque pollicibus gerat. Addidit Linnaeus Bontii locum de Salamandra indica, quem infra sub nomine stellionis maculati rectius positum reperies. Bontio subjunxit Gronovii locum Musei II. pag. 78. no. 53. sed is comparavit cum Salamandra sua (ita enim animalculum vocat) picturam Britanni Edwards in tabula 205. inter aves positam, quam eandem ad Lacertam Turcicam Geckonum titulo insertam retulit Gmeliniana Systematis Linneani editio. Gronovii auctoritatem velut dubiam interim omittam, ejusque in locum succedet descriptio a Polycarpo Erxleben proposita in Physic. Chemischen Abhandlungen Tom. I. pag. 352., qui pollices muticos recte observavit. Denique Linnaeus comparavorat in editione decima Sebanas picturas I. tab. 108. fig. 2. 8. postea indicavit tantum figuras 1. 3. 5. quae omnes animal pingunt cute maculosa,

cum scutis rotundis minutis, cauda terete absque verticillis seu annulis et digitis omnibus unguiculates.

Prima figura in nucha et dorso verrueas eminentes ostendit: quare a Schneidero pro stellione sumitur, ungues vero pollicibus ab ipso pictore non satis cauto additos esse idem suspicatur. Reliqua enim forma plane convenit eum hac prima Stellionum specie. Satis accurate descripsit vulgarem Geckonem et pictura bona praeterquam nimis minuta expressit Gallus de la Cepede p. 413. Tab. 29. enjus notitiam in brevitatem justam contractam nunc ponam. Caput grande fere triangulare oculos pariter grandes gerit dentes acutos et linguam planam, squamulis minutis vestitam (quae cum a linguae natura plane alienae sint, squamas ad ipsum caput referre liceat). Totum animal verrucis plus minusve eminentibus obsitum est; femora inferius occupat series tuberculorum perforatorum poros vel papillas femorales alii appellant. Post anum utrinque tubercula trina occupant latera. Digitorum Solum occupant squamae transversae ovatae, imbricatim sibi invicem incumbentes, mediae paululum sinuatae, (échancrées) crenatas digitorum margines addita ambit membrana corumque basin aliquatenus conjungit. Pollices utrinque unguibus carent, quos ceteri digiti gerunt breves curvos et acutos. Cauda teres annulis divisa seu verticillata. Colorem omisit Gallus et reliquam notitiam contexuit locis Boutii, Valentini et Hasselquistii mire invicem permistis atque animali alieno oratione sua accommodare conatus est. Addidit etiam Lacertam Siamensem sub nomine Tokaje ab Ignatii Lojalae asseelis olim descriptam ad aliam speciem referendam.

Turbas auxit magis quam minuit Houttuyni auctoritas, qui primam Geckonum speciem talem descripsit, quam perlati nomine appellavit, nulla Linnaei facta mentione. Corpus squamatum (?) verrucae obsident, ita, ut majores minoribus cingantur. Caudam conicam, corporis fere longitudine, annulatam, verrucae minutae occu-

pant. Digiti omnes unguiculati sunt, convenire omnes Sebanas picturas I. Tab. 198. cum hac forma asserit, quae sane omnes pollices quoque unguibus augent. Quae quidem diversitas non impedit tamen Gmelinum, quominus notitiam Houttuyini ad Linneanum Geckonem referret, notasque inde exceptas Linneanis admisceret.

Schneideri species prima ex plurimis exemplis ita descripta est. Collum occupant scutula rotunda mucronibus mediis eminentia; ventrem squamae polygonae obsident majores, quam dorsum. Totum corpus supra et ad latera loricatum conspicitur scutulis rotundis crebris, quae perlarum nomine insignare videtur Houttuyn. superiores squamam primorem labialem sursum versus sequuntur tres aliae minores, quibus utrinque ad latus opposita apparent narium Digitorum soli lamellae transversae, imbricatae, integrae nec sulco divisae sunt, pollices unguibus carent in hoc et deinceps dicendo bifurcifero et perfoliato stellione, quorum locum in hoc et bifurcifero occupant squamae longae, latae firmiter adhaerentes, nec ipsius articuli finem excedentes. Papillae femorales in medio abdomine utrinque concurrunt, angulumque satis acutum efficiunt. Maxillarum musculos masseteres crassos atque utrinque protuberantes habet hic et perfoliatus stellio, contra in bifurcifero maxillae in loco isto magis tenues et aequales conspiciuntur. Quam diversitatem miratus statim investigare causam coepi, dissectoque exemplo sicco vulgaris hujus stellionis osseam capitis compagem rimatus sum. Tum vero vidi processum Zygomaticum, in lacertis plerisque partibus duabus compositum, quarum una partem orbitae posteriorem concludit, altera cum hac conjuncta et retrorsum protensa processui temporali Observatio- descendenti et ossi maxillari communi adjungitur, plane ut in cranio nes anato- Tritonum, Salamandrarum, ranarum et bufonum, deesse in hoc stellione et in perfoliato; contra in bifurcifero eundem adosse et musculos masseteres cum temporalibus compescere atque impedire, quominus tam longe lateque protuberent. Obiter nunc addo os commune maxillare latus anticum expansum atque inflatum gerere in

micae.

vesicam semi - ovalem tenuissimam et pellucidam, tympano superiatenso servientem, cujus pars convexa orbitae concava occipiti obversa est. In nullo autem lacertarum genere, quarum plurimas dissecui, cavitatem tympani tam capacem reperi.

Redeo nune ad Geckonem ab Hasselquistio descriptum quem quominus ad hanc primam speciem referam, impediunt nares tuberculis cinctae, digitorum Soli, lamellae divisae, ungues vel absentes vel in vagina conditi, corpus totum laeve. Contra puncta minime elevata splendentia, per totum dorsum sparsa si velis interpretari squamulas breves conicas, quibus dorsum sit loricatum et veluti granulatum, eam animalis notitiam ad perfoliatum stellionem reserre possis. At enim vero foraminula minima per abdomen si poros femorales in abdomine concurrentes interpretari velimus; neque enim ulla alia ratione intelligere possum, quae foramina dicere voluerit, tum vero a Stellione perfoliato plane aliena est haec notitia. Eandem dubitationem attulit Galli de la Cépède species altera Geckotte dicta, quam ab co falso cum mauritanico, Linnaei Geckone comparatam fuisse infra demonstrabo. Poris enim femoralibus carere et digitorum lamellas unguesque simillima Geckoni habere ait, quod utrum in mauritanicum Linn. non convenire reperi. Simillimum Geckoni esse arguas ex Galli oratione, qui difficillime ab eo nullisque aliis notis distingui ait, nisi corpore caudaque erassiore et breviore nec non pororum femoralium absentia. Papillas vel tubercula in corpore nec non caudam mox verticillatam mox non verticiilatam transeo. Ceterum animal Gallo descriptum Gallicam Provinciam frequens habitat inter parietinas et in ipsis domibus, vulgoque audit Tarente. Apricari in sole amat, loca humida et frigida fugit; hiemem in rimis et inter tegulas latens transigit, numquam sopore sepultus, frigore tantum torpescit. Ceterum incessu et moribus Geckoni simillimus, voce pariter et veneni suspicione omni caret.

Stellionem Siamensem nunc videamus sub homine Tokai descriptum a Missionariis Jesuitis, quorum notitia germanico ctiam conversa sermone exstat in Tom. III. p. 81. Perralti. Dodarti et Charrasii Dissert. ad hist. nat. spectantium. Hujus summam primum repetam: Stellio hic Tockai vulgo appellatur à sono, quam interdiu etiam saepius usque ad duodecimum numerum centinuo repetit. Habitat arbores domosque Indorum, quamquam veneni suspicione damnatus. Longitudo pedem, crassities versus ilea duos et dimidium pollicem paulo excedit, longitudinis partem dimidiam cauda occupat. Corpus superne cuticula granulata et colore rubro coeruleoque variegata undatim tegitur, dorsum multis conicorum mucronum pallide coeruleorum ordinibus per longitudinem positis horret; venter squamatus colore cinereo maculis rubeis crebris sparsis pingitur. Caput ingens fere trigonum juxta colli commissuram lineas 18 latum 13 crassum, medium depressius, rostro obtuso. Oculi grandes protuberant, aurium foramina plusquam digiti latitudine ab oculis remota retrorsum, ovata, diametrum orbitae dimidiam aequant, lingua crassa. Pedum digiti unguibus curtis et acutis armati subtus appositas lamellas seu folia membranacea ovata gerunt, quibus bestia laevissimis corporibus quasi agglutinata haeret. Dissecta cor inter artus priores situm ostendit pericardio inclusum, absque ullo aquae vestigio; pericardium ipsum utrinque alligatum lateribus, obliquo situ ascendit viamque subtus liberam transeunti arteriae asperae relinquit. Infra cor pulmo situs in medio corpore in duos dividitur lobos; jecur a cordis parte latiore et superiore sub pulmone descendit, laterique sinistro corporis lobo sinistro adhaerens ventriculum toum desuper obtegit. Cavitatem thoracis sepimentum membranaseum discriminat. Ventriculus pollices 2 et lineas 10 longus, albus linearum sex intervallo supra pylorum naturam cartilagineam assumit; intestinum duodenum rubeum apparet. Longitudo intestinorum a Pyloro usque ad coecum anfractuosorum pollices 7 lineas 10. aequat, crassities sensim decrescit, densitate tamen cadem servata. Coecum vermiculis intestinalibus setaceis albis tres lineas longis sca-

Anatome Geckonis.

tet. Jecinoris figura pyrainidalis lobis duobus longis dividitur, quorum uterque iterum in duas minores lacinias diffinditur. Vesica biliaria colore coeruleo, ovalis convexae jecinoris parti inter medios lobos majores adhaeret. Pulmonis lobi duo pollices 2 lineasque 9 longi membrana tenui, pellucente et vesiculis innumeris aëreis referta con-Trachea brevis recta, lata diametro lineas duas acquat, annulis firmis densisque cartilagineis composita. Glottis rima longa ad perpendiculum fissa patet. Larynx cum parte superiore tracheae cuticula tenui nigra vestitur, quac cadem totum palatum bestiae obducit. Figura apposita satis elegans digitorum lamellas membranaceas ovatas integras ostendit unguiculosque omnibus attribuit. Caput ingens non planum sed potius convexum apparet, pupillae rima verticalis; series mucronum in quincuncem positae a collo usque ad caudam extremam nullo verticillorum vel annulorum vestigio, caedem pertingunt artusque omnes occupant. Quare non dubitaverim hunc stellionem pro mauritanico Linnaei habere, quocum forma ejus plane convenire videtur. Gallus le Gentil in Itincrario (Voyage dans les mers de l'Inde Tom. II. p. 450. monuit hunc stellionem in Insula Manilla ab incolis Chacone, ab Hispanis colonis Toco vocari; atque hoc posterius vocabulum rectius vocem animalis imitari, quam alterum Tokaye vel Tokkai. Ceterum hanc eandem stellionis speciem in Insula Sunatra frequentem Cokay nominat et magnitudine ab altero minore domestica distinguit Britannus Marsden pag. 136. vers germ. Utrumque, ait, ab incolis per vocis imitationem aliquam vocari Tschitschah. Stelliones autem intelligi docet pedum rugosarum mentio adjecta, reptatusque supinus per lacunaria annotatus. Obiter addo stellionis aliquam speciem in ora Indiae Malabarica Pali vocari testante Gerbett Relation. Indicar. p. 114. Difficultates et dubia, quae Schneidero ex dissentientibus relationibus de cute squamata vel tuberculata vel papillato - granulata oriuntur facillime per observationem in vivis animalibus squamulas raro in conspectum venire, semper vero in exsiccatis, mihi expedire posse videor. Alium denique errorem satis gravem Galli de la Cépède, castigare voluit

Schneiderus, quoniam notas Stellionum et Scincorum ab eo confusas. esse vidit, seilicet is novam Scinci speciem descripsit et pinxit pag. 378. Tab. 24. sub nomine barbaro Mabouya, quam arbores scandere et tecta Indorum, in rimis parietinarum habitare, tempore demum aestivo inde prodire, interdum etiam pluvia instante, quam sono quodam vocis quasi provocet, aliena fide Britanni Sloane II. Tab. 273. fig. 7. ct 8. et Gallorum Dutertre hist. nat. des Antilles II. p. 315. et Rochefort p. 147. refert. Primum miror auctoritatem in hac disputatione advocari Galli Rochefort, quippe qui antecessoris Dutertre librum satis diligenter totum exscripserit. Hic vero Dutertre sub eodem nomine Mobouya lacertas duas plane diversas annotavit, quarum una ad scincorum genus pertinet in tabula adjecta picta, quam picturam repetiit cum notitia Rochefort. Alteram ait pedis longitudinem non attingère, digitos gerere latos, planos, fine rotundo, unquiculatos. Pictura utrinque unques quinos ostendit. Hanc arbores domorumque contignationes et tecta scandere, pluviam noctu elamosa voce nunciare, irritatamque assultare hominem narrat. Pictura addita pedum digitorumque stellionum formam satis bene exprimit; corpus maculosum apparet, punctisque in medio dorso obsitum. Cauda corporis longitudinem vix aequat. Prior Scinci notitia paene verbo tenus cum descriptione Britanni Sloane convenit nec dubitare nos patitur, intelligi Scincorum genus aliquod, contra alteram pictura addita docet pertinere ad Stellionem insularum Ameri-Confirmat me Galli Phumier auctoritas, cujus inter picturas nondum editas Zoologiae Antillanae planc gemina pictura stellionis Antillani reperitur cum adscripto nomine Lacertae chalcidicae. Hoc tantum mutat triplex Piumeriana delineatio, quod ungues in vagina conditi latent ut in perfoliato stellione; digitorum soli l'amellae imbricatae sulco divisae sunt, cauda corpore brevior, ab initio annulata est, infimusque venter late protuberat. Corporis tegumentum pictura nondum absoluta omittit. Eadem tabula Plumeriana numero 142 distincta juxta egregie pietum sistit Scincum auratum Linn. His omnibus perlustratis Schneiderus Geckoni proprie sic

dicto sequentem. Characterem addidit.

1) Stellio Gecko dorso scutulis rotundis tecto pedum soli lamellis indivisis, unquiculis nudis pollicibus muticis, poris femoralibus in abdomine concurrentibus,

ad alteram speciem transeo:

2) Stellio bifurcifer. Linea alba ab oculis per medium dorsum ultra regionem ani protensa, utrinque furcata, cauda vix corporis longitudine, primori verticillata, extrema annulis albis cineta, superne etiam lineata in fine; corpus supra scutulis crebris guttatum; lamellis digitorum indivisis unguibus nudis, pollicibus muticis; serie pororum femoralium longa utrinque.

Primam ejus notitiam dedit Index Musei Linkiani Lips. Vol. I. Synonyman p. 68. ubi a linea furcata Lacerta Ypsilon dicitur. Deinde sub nomine Geckonis vittati descripsit et pinxit Houttuyn Act. Vlicssing. Tom. IX. Tab. 9. Fig. 2. Denique sub Lacertae Zeylanicae linea dorsali alba, veluti novam speciem lacertae descripsit et satis bene pinxit Nau (Neue Entdeckungen und Beobacht. zur Naturgeschichte Vol. I. p. 254. Tab. 17.) et Valentinus in hist. natur. Amboin. p. 284. cujus egregiam notitiam Houttuynus omisit, qualem conversam et excerptam ponam. Lacertam is nominat Pandargs Hagadies, longam ait esse pollices 10, dimidiam longitudinis partem cauda occupante: dorsi deinde vittam albam furcatam, caudae tenuis et rotundae fascias albas quinque, unguiculos acutos digitisque additam membranam velut in avibus remipedibus, denticulos acutos, linguam acutam, rostrum a naribus usque rubrum annotat et ipsum animal bene cum Geckone vulgari comparat. Degere dicitur plerumque in frondibus arboris littoralis, quam Belgae Strand Pantang vocant. In Museo Geversiano p. 11. nº. 39. nominatur: le Lezard Pandang de Valentin, brun a raye bifurce'e blanche, d'Amboine: male igitur Boddaert in Novis Actis Naturae Curiosorum

Vol. VII. pag. 45. hoe animal ad Salamandrarum genus revocare conatus est.

Synon.

- 3) Stellio mauritanicus Linn. Totus supra mucronibus horrens, cauda fere tota plana, infra squamis latis media tecta, digitorum omnium unguibus nudis, soli lamellis divisis lunatis imbricatis. Seba Tom. I. t. 198. fig. 2. 6. 7. Houttuyn Acta Vliefs. 1X. p. 324. n°. 3. Schneiderus affirmat, Gallum de la Cèpède hane speciem non vidisse et male alienam cum eadem comparasse affinem vulgari Geckoni, Geckotte dictam ad sequentem speciem referendam.
- 4) Stellio perfoliatus Schneider. Simillimus Geckoni, diversus absentia scutorum dorsi, pororum femoralium, artubus brevioribus, colore obscuriore, soli digitorum lamellis sulco divisis, unguibus retractilibus, vaguna conditis super extremo articulo eminentibus, infraque per lamellarum sulcum emergentibus, pollicibus muticis.

Geckonem hunc sub nomine Rapicaudae (Knollstaert) descripsit primus Houttuyn (Act. Vliefsing. Tom. IX. t. 9.) et similem Geckoni ab Hasselquist descripto esse ait. Cutem aequaliter baccis seu pernulis (perlas ipse vocat) obsitam et brunneo colore maculatam; soli digitorum folia pectiniformia sulco divisa esse absque unguibus manifestis (naawlyks genageld); caudam ab initio tuberosam, magis deinde rugis obseri quam annulis seu verticillis dividi. Exempla aliquot vidit cauda multa tenuiere et longiere; suum pinxit in Tabula IX. Fig. 1. ubi cauda vix dimidiam corporis totius longitudinem tenet; ibique agnosco in parte superiore digitorum exstantes sed membrana velatos ungues. Color dicitur esse pallidior, quam in vulgari Geckoni, patria assignatur in insulis Americanis. Eundem generi Geckonum servato rapicaudae nomine inseruit Gmelin eumque ita notavit: cauda turbinata, auribus concavis. Sed caudae ab initio tuberosae nota vel falsa est plane et a mutilatione aliqua orta, vel certe variat. Schneiderus tria exemplaria hujus

speciei, cujus nomen permutavit, examinandi occasionem habuit, pris mum exemplum, quod apud Blochium inspexit, caudam vulgari Geekoni similem gerebat; corpus squamulis minutis conicis loricatura et veluti granulatum erat absque ullo scutulorum vestigio, quae passim in dorso vulgaris Geckonis, velut etiam Chamaeleonum conspiciuntur; soli digitorum lamellae divisae sulco emittunt pro lubite animalis ungues vagina granulata tectos et super extremo digitorum articulo eminentes. Pollices mutici erant pedes ipsi vel potius artus utrinque breviores quam in vulgari et bifurcifero stellione; papillae seu pori femorales desunt in hac specie; caudae quatuor primae partes quintae annulis late distantibus incisae ei visuntur. Exemplum alterum Rebeltianum dimidiatam Blochiani magnitudinem habuit colore egregie servato, qui supernum corpus cinereum obduxit, brunneo variegatus marmoris instar; infra sordide album videre licebat, oculos coeruleos pupilla ad perpendiculum dividente; cauda verticillorum vel annulorum vestigio carebat, longitudine corpori reliquo aequalis, conica squamulis paulo majoribus obsita, quae infra etiam majores fuere, velut in abdomine etiam reliquorum stel-. lionum. Tertium, Musei Academiae Berolinensis regiae exemplar pallidum absque ullo colore caudam ab initio tenuem deinde subito tuberosam gerebat, plane ut ab Houttuyno satis bene cum toto animalculo pietam vidit. Igitur nomen ineptum Rapicauda eum altero perfoliatus a natura lamellarum soli digitorum ducto permutavit Schneider. Cepedii Geckotte nulla alia est species quam hacc sola. Eam Synonyma ille distinguit a vulgari Geckone corpore et cauda breviore sed crassiore et pororum femoralium absentia. Caudam cum actate crescere in crassitiem, longitudinem vero minui et annulos ejus antea mucronibus eminentes atque horrentes paulatim sensim evanidas fieri ait. In provinciae Gallicae domibus oberrantis nec vocem nec venenum incolae agnoscunt.

Memoratur denique hoc idem animal a celeberrimo Hermann in Commentar. Tabular. affinitat. p. 251. lamellas enum soli digitorum sulco divisas annotavit; ungues abesse asserit quidem, verum ex verbis: digitis muticis dorso carinatis suspicatur celeb. Schneider ungues in vagina conditos eminuisse super digitorum extremis articulis et visum ejus effugisse. Reliqua certe notitia cum hac specie in omnibus convenit. Quod vero Cepedii verba, qui ait, ungues manifestos et conspicuos in Geckotte adesse, non leve, uti confitetur, dubium excitaverint, non mirum est, cum nequidem, plures alias species, ut noster, vel climaticas varietates perfoliata sua subesse suspicatus sit. Videbimus, infra, Geckonem australem argyropodem ad perfoliatum Stellionem Schneideri referendum esse. Unguium structuram habitaculis accommodatam cum habitaculis ipsis paulo va inre aeque ac venenum ex esca Scorpionum aliorumque insectorum venenatorum oriri censeo. In Gallica Provincia Geckottem nullomodo venenatam Tarantam audire Gallus narrat de la Cépède, idque nomen cum brevi notitia retulit etiam Galli Papon itinerar. Provinc. pag. 347. vers. germ. In Italia stellionem Linn. vulgo Tarantulam vocari tradit Cetti hist. amphib. Sardic. p. 71. Ex narratione Cettiana, Chalcidicam lacertam ab Imperato p. 901. breviter notatam et p. 919. satis pingui Minerva pictem stellionem Linnaei esse, suspicor. Dicitur locis opacis murorumque rimis habitare, trux aspectu, coloris plumbei, extantibus per universum cristis. Vulgo Tarantulam vocari addit et falso Veterum scriptorum Chalcidicam lacertam esse affirmat.

- 5) Stellio Chinensis. Cauda ancipite, digitis omnibus unquiculatis, facie foraminibus pluribus pertusa. Haec species ab Osbeckio in itinerario (Reise nach Ostindien und China, Rostock 1765. 8°. pag. 366. Lacerta Chinensis) descripta cinerea injuste a Gmelino in editione Systematis Linneani omissa est. Quamvis autem inter parietes tapetibus papyraccis laevissimis tectos reptare et blattis victitare dicitur, tamen Gecko laticaudatus est, quam ob rem ad sequentem speciem Schneideri transcamus.
 - 6) Stellio sputator, corporis fasciis transversis, brunneis

vel albis brunneo colore marginatis, squamis nitidis, digitis muticis, cauda tereti, subtus scutorum serie obsita.

Ex Insula Sti Eustachii 1755 in Sueciam transmissum primus descripsit et in tab. IV. fig. 1 - 2. pinxit Sparrmann (Nov. Act. Holmiens. Vol. V. pag. 166. vers. germ. Primus notitiae auctor Acrelius annotavit Britannicum nomen Woodslaue atque haec de moribus addidit: passim oberrare in casis domibusque ligneis, parietesque perreptare; ubi siquis propius adstans inspicere velit bestiolam, facile irritatam hanc spectatorem saliva oris nigra venenata conspuere; quo facto statim locum tactum intumescere; tumorem ipsum illita camphora spirituve vini leniri. Nocte conditam latere. Formam ipsius ita descripsit Sparmann: Longitudo corporis duos pollices, caudae $2\frac{1}{4}$ poll. Aequat. Color totius corporis dilute cinereus, cingulis vel maculis brunneis, in quibusdam cingula albicant; brunneo colore marginata. Versus caudam extremam cingula sens m deficiunt aut in maculam magnam brunneam alba utrinque minore cinctam transeunt. Color corporis inferioris cincreus lucidior est. Artus pariter maculae striarumque duarum vestigia pingunt. mulis minus acutis corpus tegitur; margines maxillarum majores squamae ambiunt, caudam infra linearum aliquot intervallo ab ano series scutorum occupat a parte posteriore latiorum, margine velut. abscissa et leviter sinuata. Lingua oblonga rotunda, magis tenuis quam crassa, fine leviter divisa. Pedum digiti utrinque quini absque unguium vestigio posteriorum pollices a reliquis digitis separati versus corpus reflectuntur. Lamellarum sub digitorum solo nulla fit Ovum pluribus lacertae exemplis additum ab eadem cditum creditur, colore cinereo maculis brunneis nigrisque sparsum, quae varietas in ovis lacertarum mira mihi accidit.

Postea exemplum ex Insula S^{ti} Dominici (Haiti) missum duos pollices longum, cujus dimidiam partem longitudinis cauda occupabat, descripsit et pinxit Gallus de la Cépède pag. 409. tab. 18.

Squamae omnes splendent, color infra albicans supra gryseus brunneo saturate variegatus. Cingula quatuor brunnei, paene nigri coloris, caput dorsumque occupant, sex similia caudam ambiunt; ejusdem denique coloris limbus circumdat maxillae superioris oram. Aurium foramina non apparent; lingua plana lata, priore parte leviter incisa. Rostri pars superior et vertex capitis albicant, nigris maculis sparsa; artus gryseo albo et nigro colore variantur. Digiti utrinque quini absque unguibus manifestis subtus additas habent squamas parvas et desinunt in globum vel laminam squamatam (pelote ou petite plaque écailleuse) qualem in nulla alia lacerta a se repertam fuisse asserit. Statim tamen genus Stellionum subjungit, eujus has esse notas ait: "les doigts garnies par dessous des grandes écailles, qui se recouvrent comme les ardoises des toits." Tales igitur squamas vel lamellas si voluit intelligere, ut suspicor, nullam potest esse dubium, bestiolam ad genus Stellionum pertinere, cum reliqua forma notas ejus reddere videatur. Alieno etiam generi inseruit hanc speciem Gmeliniana Systematis Linnaei editio. Similes narrationes de Aspide ptyade venenum spectatoris ori inspuente veterum scriptorum exstant.

7) Stellio platyurus, cauda supra convexa infra plana, media serie scutorum 50, initio leviter verticillato, lamellis soli digitorum divisis, lunatis et imbricatis, unguibus nudis, corpore aequaliter squamulis conicis loricato, inferioribus majoribus.

8) Stellio maculatus Bontii pag. 52.

Bontius Salamandram Indicam vocat, pedem circiter longam coloris e viridi dilutioris, quem Belgice Seegreen, id est thalassinam vocent, interstinetam maculis rubris, ac si minio tineta esset, capite bufonis, oculis magnis foede protuberantibus. Gecko vocavi ait, quia Gecko assiduo sonet, prius edito stridore, qualem picus Martius emittere soleat. Dentes esse acutos fortes; palatum rabrum; digitorum quinis unguiculis acutis firmiter etiam mortuam

adhaerere corporibus. Suspensam a Javanis de cauda evomere sa- Geskonis niem; qua collecta incolas sagittas inficere, eamque ob causam bes- venenum ad tiam domi alere solere. De sanie ad venenum sagittarum inficien- inficiendas sagittas a Jadarum collecta consentit Valentyn. p. 294. Tom. III. qui vocem vanis adhibibestiae vesperi exaudire ait similem vocabulo Gekko. Corpus cum capite latum, caudam longam esse; corpus variari maculis rubris. flavis, viridibus et nigris. Addit proditam ab aliis narrationem de bestiola hominem aggressa.

Schneiderus picturam stellionis hujus platyuri seculo praeterito extremo in Batavia Indica factam et ab Andrea Cleyero ad Christ. Mentzelium, Archiatrum Electoris magni Friderici Wilhelmi transmissam coram habuit, communicatam a medico Berolinensi Kurella in qua coloris varietatem mirandam et scuta dorsi dictis a Bontio coloribus picta cum digitis quinque unguiculatis et subtus lamellatis agnovit. Reliquas notas cruent, quibus ipsum animal tractare atque conspicere contigerit.

9) Stellio phyllurus; corpore supra tuberculato, cauda mucronibus aspera, post initium dilatata, ceterum gracili.

Hunc primus sub nomine Lacertae platyurae cauda depressa plana lanceolata, margine subaculeata, corpore grysco fusco scabro, unguibus quasi duplicatis, lingua brevi, lata integra seu non forficata, apice autem leniter emarginato descripsit et in tab. III. fig. 2. pinxit John White Journal of a Voyage to new South - Wales. London 1790. p. 246. Longitudinem pollicum 41 habet.

10) Stellio fimbriatus; corporis superiorem partem ab in- Tab. x. feriore distinguente margine membranacea fimbriata, cauda plana, digitorum soli lamellis sulco divisis, unquibus vagina conditis, per sulcum emergentibus.

Hunc nominavit Flaccourt Histoire de Madagascar p. 255. et Dapper descript. de l'Afrique p. 458. Primus accurate pinxit, tab. 30. de la Cépède pag. 425. Cauda similis est Salamandrae aquaticae sed horizontaliter plana. Caput planum latum et trigonum longitudine dimidiata trunci, oculi grandes pupilla foramine longo verticali patet. Digiti crassi et breves membrana aliqua invicem juncti adhaerent, subtus lamellas sulco divisas imbricatas gerunt viginti, ungues retractiles, vagina conditi super articulis digitorum extremis eminent, atque infra per lamellarum sulcum expediuntur. Reliqua transco, cum sit species platyura. In Insula Madagascar frequens habitat arbores et ore aperto, intus glutine quodam oblito insecta captat. Lentus per terram incedit capite cernuo sub angulo obtuso corpori et collo adjuncto. Timorem vanum injicere videtur ignaris incolis incessus bestiae, quac ore aperto trux obviam occurrentibus ire solet.

- 11) Stellio tetradactylus praecedenti simillimus, marginis membranaceae absentia digitorumque numero distinguitur. Hunc primus ex Galli Bruyeres notitia secum communicata descripsit sed alieno Salamandrarum generi propter digitorum anticorum numerum inscruit de la Cépède pag. 493. Longitudo pedem aequat. habitat candem cum priore patriam, ubi vulgo Sarrubé audit, non minus ab incolis formidatus, quam alter, timore aeque vano. Tempore pluvio et noctu frequentior apparet, quam tempestate sicca aut interdiu, sylvarumque umbras amat.
- 12) Stellio Geitje cauda lanceolata palmis tetradactylis. Hanc notam animalculi veneni crimine condemnati ad Promontorium bonae spei reperti et a Sparmanno descripti in Actis Gothenburg. I. pag. 75. picti vero in Tab. V. fig. 1. positam ad Geckones retulit Gmelin, vix 3 pollices longum, variegatum, subtus albicantem cauda pedibusque Salamandrinis, veneno et papillis per totum corpus sparsis Geckoni similem dixerunt. Pictura Edwardsi tab. 204 a Linnaeo laudata pedes latos lamellatos subtus aut reliquam stellionum formam vix repraesentat. Video tamen Gronovium Musei II. p. 78. eandem picturam Edwardsi ad Salamandram suam retulisse, quam ipsam ad Geckonem suum revocavit Linnaeus.

13) Stellio brasiliensis.

De hoc Margraf histor. Brasil. pag. 238. Lacertulus teres 4 vel 5 digitos longus, venenatus, digitis posticis quatuor; corpus totum hepatici est coloris cum albis notulis, in cauda vero albis lineolis, hine inde etiam aliquantulum flavi mixtum. Oculi splendentes quasi vitrei. Piso autem p. 283. Longus 3 vel 4 digitos cauda est caeteris latiori et breviori, velocissime movetur praedamque per msidias venatur, totus veneno turget. Uterque nomen ci vernaculum posuit Carapopéba. Schneiderus recte monet nec ex Pisonis nec Margrafii relatione nec icone Stellionem agnosci posse; attamen ipse ex alia pictura eundem agnovit. Collectionem scilicet ineditam picturarum Zoologicarum in ipsa Brasilia olim sub auspiciis Principis Mauritii delineatarum, quam ex dono egregii Pincipis olim magno Electori Friderico Guilielmo datam servat inter pretiosissima cimelia Regia Bibliotheca Berolinensis, ipsi inspicere licebat. Ibi igitur pictura cum nomine Caropopébi exstat in folio 413. coloribus aqua dilutis illuminata, quae idem animalcululum sistit, pedum utrinque digiti quini unguiculati apparent. Caput ingens cum oculis grandibus et protuberantibus, deinde reliqua corporis forma artusque breves ei persuaserunt, ut crederet stellionis speciem a Pisoni et Margrafio intelligi.

Addere nunc liceat Geckonem homalocephalum Creveldi nuperrime ab ipso Schneidero in Aetis scrutatorum Berolinens. (Magazin der Gesellschaft naturförschender Freunde, Berlin 1890 dritten Jahrganges viertem Quartale p. 206. Tab. VIII.) communicatum, forsan eum Stellione fimbriato conjungendum — de quo etiam dicitur: totum corpus squamulis minutis teetum et quasi granulatum conspicitur, praeterea pars capitis, trunci artuumque superior ab inferiore diseriminantur marqine membranacea fimbriata.

14) Stellio homalocephalus corpore utrinque fimbriato cauda pinnata spathulata, digitis squamis lunaeformibus cristatis inbricatis membrana natatoria junctis.

Caput oblongum subovatum supra infraque depressum excepta regione supra orbitate paululum fornicata. Rostrum rotundum. Naves parvulae oblongae intermedio ex una parte fere tetragono ex altera parvulo sublunato scutello vicinae. Maxilla superior margine unica inferior et brevior, duplici serie scutorum cataphracta. Anterior capitis pars ad verticem usque verrucis majoribus, reliqua minoribus granulata. Rictus retro oculos fere dehiscens in fine magis elevatus. Dentes in utraque maxilla numerosi minutissimi peracuti. Lingua non nisi anteriore parte libera apice obtuse excisa.

Oris fauciumque interiora papillis tecta. Meatus auditorius bene conspicuus infra et antice membranula plieis crispata non admodum lata, tum latiori et prope angulum maxillae in lobum pendulum desinente. Oculi sat magni a se invicem distantes maxillae angulo proximiores. Pupilla perpendicularis crenata quasi erosa. Collum fere nullum. Corpus superum inferumque depressum poris femoralibus 21 in abdomine concurrentibus, uti in Geckone. Pedes omnes pendadactyli. Digiti membrana natatoria juncti, cristati ad ungues usque imbricati lobati. Unguiculi parvi incurvi peracuti excepto illo subrotundo, qui pollici insidet. Cauda corpus longitudine longe excedens depressa linea a basi ad finem descendente in duas quasi partes divisa ex utroque margine pinnis lobatis supra convexis subtus concavis, decurrentibus tandemque confluentibus spathulata. Tota corporis superficies a dorso usque et caudae extremum lineis quatuor papillis primum minoribus planiusculis cuti tenaciter adhaerentibus a basi caudae ubi magis concurrunt; et ultra majoribus prominulis acuminatisque constantibus insignita. Hae lineae aliis undulantibus aequaliter a se distantibus in dorso, lumbis et cauda decussatae. Corpus totum atque ejus partes modo verrueis, modo papillis, modo squamulis, figura magnitudine digerentibus imbricatis teetus membranisque circum cinctum, quarum maxima sub axilla incipiens et in inguide desinens ex utraque parte relictis pedibus omnibus liberis anteriora corporis a posterioribus separat. Omnes verrucae papillae, squamulae, quibus corpus et extrema et membranae teguntur microscopio punctis minimis conspersa observantur. Color animalis squalide canus.

Lobi capitis hujus Geckonis plicas laxas auriformes illas Lacertae mystáceae Pallassii (itinerar. III. p. 702. nº. 36. Tab. V. f. 1.) in memoriam revocant, quae similes lobos formant et a rictu utrinque pendentes, quas appropinquante homine suffuso sanguine in semidiscoideas alulas expandit Lacerta et fuga satis agilis se subducit. Haec et Lacerta pipiens ex monte Bogdo deserti Caspici a Pallassio (in Zoograph. Ross. Asiat. III. pag. 27.) descriptae formam et habitum Geckonum prae se serunt, sed cum auctor lamellas plantarum non respexerit, nondum decisum est, an sint veri Geckones. In eodem hoc casu est Lacerta caudiverbera Sebae (Mus. II. t. 103, fig. 2.) et Lacerta principalis Linnaei (Amoenit. Acad. I. pag. 286. no. 11. et Mus. Friedr. Adolphi I. pag. 43. quam Schneiderus dissecuit et soleas digitorum lamellatas vidit (l. c. p. 37.) nec dubito, quin plures aliae Lacertae, si scrutatores lamellas in solis digitorum tamquam solam et genuinam notam Geckonum curatius inspicere velint, pro Geckonibus agnoscendae sint. Interca tandem ad Geckonem nostrum australem lamellis argenteis distinctum transcamus.

lustratis nunc omnium Geckonum notis a Schneidero omnium optime et summa cum cura indicatis vidimus, Geckonem nostrum ex insula Oceani australis Nuckahiwa allatum perfoliatis Schneideri adscribendum vel subnumerandum esse, distinguitur enim a Geckone Linnaei per absentiam scutorum dorsi, pororum femoralium, artubus brevioribus, colore obscuriore, lamellis sub solearibus digitorum subdivisis argento resplendentibus, unguibus retractilibus, vagina insertis super extremo articulo eminentibus infraque per lamellarum sulcum interdum emergentibus pollicibus muticis vel paulo minoribus, et respondet igitur chractere Stellionis perfoliati.

Descriptio Stellionis vel Geckonis argyropodis ex Insula Nuckahiwa allati.

Tab. XI.

Lacerta violaceo-fusca sex ad septem pollicum longa, rapicaudac sinillima sed lamellis argenteis soli digitorum ab eadem distincta, in insula Nuckahiwa satis frequens casas incolorum perreptans et folia Musae paradisiacae et arundinis bambos, ab indigenis insulae Kaka dicta, corpus habet supra violaceo brunneum maculis atrofuscis fasciatum, squamulis papillaribus minimis prominulis granulatum, subtus roseo lividum, caudam teretem versus apicem attenuatam corpore paulo breviorem supra aeque violaceo brunneam fasciis atro fuscis irroratam, subtus pallidam, ad apicem vero obscuriorem, in medio linea longitudinem versus ad apicem usque excurrente interrupta rubente notatam (vid. fig. 2. Tab. X. b.).

Caput ingens planum subrhomboideum protensum rostro obtuso, naribus ad apicem rostri. Oculi grandes ad latera capitis distantes palpebris verruculosis clausiles, iride flavo fusca pupilla perpendiculariter fissa coeruleo atra aperti. Rictus oris amplissimus longe retro oculos dehiscens dentibus 60 in utraque maxilla acutissimis armatus. Maxillarum margines scutellati (vid. fig. 2. a.). Orbitae margine superiore protuberantes cum callis occipitalibus verticem plagioplateum quadammodo exasperant.

Vertex depressus parum concavus, inaequalis, rugosus juxta orbitas elevatus. Lingua lata obtusiuscula crassiuscula. Aures magnae concavae (fig. 1. a) retro fauces et angulum oris longefissi hiantes, tympanum nudum.

Rostrum longum obtusum supra depressum inaequale ad latera anterius eminentiis duabus nares indicantibus terminatum. Maxillae aequales latiusculae arcum semicircularem paulo compressum formantes scutellis oblongis marginatae et margine subservato cinctae sunt. (fig. 2. a) Collum versus nucham plica gemina rugosum, inter maxillae inferioris bifurcationem (vid. fig. 2) parum coarctatum.

Abdomen inflatum ventricosum versus thoracem angustior. Ani apertura transversalis subtus ad basin caudae. Artus breves crassiusculi atro violacei supra coloris maculis lucidioribus guttati subtus pallidiores, roseo lividi, anteriores paulo breviores, posteriores paulo longiores, femora longitudine crurum illis paulo crassiora inferius parum angustiora, crura medio inferiore, parum compressa superiore subteretiuscula. Digiti omnium quatuor pedum figura et numero fere aequales, numero sunt quinque in singulo pede lobati nimirum vel spathuliformes et quasi clavati, supra convexi unguiculis in medio pedunculatis instructi, subtus concavi et lamellati.

Pedes pentadactyli in hocce animalculo omnium partium maxime singulares et mirabilis structurae sunt; et quidem propter digitorum formam et functionem. Planta pedis non singula est, sed quintuplicata-vel rectius dicam: Planta pedis nulla est, sed potius quinque digitorum plantae sunt. Pes non tangit terram, sed animal in digitis incedens, in his solis gerit plantas et hae digitorum plantae omnium partium externarum omnino admiratione et aspectu dignissimae sunt, qua de causa easdem et armato oculo inspexi et pedem a superiore facie (fig. 3) et digitum ab inferiore (fig. 4) lente duplicata auctum delineavi.

Digiti ad basin angustiores extremitate latiores clavati vel dilatati sunt, plantae digitorum singulorum igitur ovatae sunt et subtus planae vel plano concavae, lamellis margaritaceis vel argento resplendentibus transversalibus imbricatae, quorum medio ligamentum (*) intus decurrit ad dirigendum earum situm vel motum, margine crenulato vel serrato cinctae. Margo serratus a squamis ex dorso plantae prominulis formatur. Dorsum digiti cujusvis vel lobuli

^(*) Sulcum vocat Schneiderus, inde distinxit lamellas integras a lamellis soli digitorum sulco divisis, simulque nexum sulci vel ligamenti cum vagina unguiculi, quam pedunculum unguis musculosum voco, intelexisse videtur.

non minus admirabis, quam inferiorem superficiem, convexum nimi-

Geckonis

rum est et ovatum squamulis tectum, ad marginem squamulae lateseunt et prominent, ita, ut marginems erratum efficiant et terram proxime tangant membranulae affixae, forsan ut arctius sese contrahant et spatium, repositis lamellis, vacuum inter fundum et plantam forment. Animalia hae enim in domiciliis ferocium indigenorum insulae De supino et sub tectis corum oberrantia in facie inferiori laevigata aedium tabulatarum et truncorum politissimorum arundinis Bambos supine incedunt, et aequali dexteritate in senestrae horizontalis navis nostrae inseriore planitic decurrebant et corporis totius pondus pedibus quasi agglutinatis instar muscae domesticae currendo et commorando tenebant. In planitie vitrea fenestrae et arundinis Bambos truncorum nullum plane muci vel sanici glutinosae relictum vestigium post incessum animalculi reperire potui. Humorem glutinosum interdum e fundo plantae inter lamellas exsudare acrem, verum quidem est, ut in praemissis jam exemplo allato contestatus sum, sed hujus humoris ope pedum digitos currendo agglutinari, ut hoc a Schneidero doctissimo explicatum est, valde dubito. An denique humor ex nostri animalculi digitis tam venenatus sit, quam ex Geckonis aegyptiaci vel cairiensis ab indefesso Hasselquist egregie descripti (itinerar. pag. 356 358.) mihi non compertum est, venenatum esse, ex solo horrore, quo omnes feroci indigeni bestiolam tamquam immanem et perniciosam pestem fugiebant, suspicatus sum: sed ad dorsi digitorum structuram redeam. E centro dorsi cujusvis digiti ascendit peduneulus musculosus arcum faciens et unguem compressum aduncum in extremitate gerens vel amplectons, quam Schneiderus vaginam unguium appellavit. Haec vagina unguium musculosa articulum ultimum digiti ex penultimo Jobato ovali et quidem e dorsi centro ejusdem prodeuntem constituit et cum ligamento lamellis affixo, cuius rum et un- imperio lamellae vel eriguntur vel deprimuntur, intimo cohacrere quium mecha-videtur, dum enim Geckones in laevigatis et glabris planitiebus inmismo in Ge- cedunt, unguibus non utuntur; si vero in fundo scabro et inacquali skonibus perdecurrent, unguibus ancorae ad instar infictis fundo corpus sustinere

solent atque igitur ungue ut et ipso digito clavato et lamellato unguem dirigente tamquam retinaculo, catorum in morem, utuntur. Musculi igitur in dorso digiti infixi, quorum imperio pedunculus unguium, musculosus e centro lobi ovalis ortus erigitur, eo tempore quo lamellarum functione utitur, relaxati, videntur contra dum ligamentum lamellarum et plantae margines relaxantur, unguem antrorsum deprimere et fundo infigere valent.

Haec omnia, quae de incessu Geckonum et de lamellarum erigendarum vel deprimendarum usu et functione nec non de unguium adhibendorum auxilio et nexu dixi, lectoribus, figuram tertiam et quartam iconis adspicientibus, clariora erunt, si ligamenti ejusdem, cujus per lamellas in medio decursum pro sulco lamellas dividente habuerunt antecessores, nexum interiorem cum musculis vaginae unguis respicere velint.

Color caeterum in pedibus superiora versus spectatis, ut in toto corpore violaceo brunneus maculis rotundis lucidioribus guttatus, in dorso et capite maculae atrofuscae obscuriores singulae fasciarum forma dorsum et truncum irroratum nebulosum versus latera pallidiorem cingentes, contra in cauda confluunt et continuas fascias formant.

Perfoliati Geckonis nomen in nostram speciem argyropodem praeprimis cadere et quadrare, quisque, qui figuram tertiam iconis inspicere et pedunculum unguiferum vel vaginam unguis e centro digiti lobati, petioli perfoliati instar, emergentem animadvertere velit, intelliget. Nimis splendida caeterum nota est lamellarum argento micantium, ut verear, ne quis novam speciem australem cum alia jam cognita miscere vel in dubium vocare possit. Nihilominus tamen eandem, non ut gloriarer novam et splendidam speciem Geckonum numero attulisse, sed potius, ut Schneideri doctissimi et diligentissimi de familia Geckonum illustrata merita in memoriam re-

vocem ac confirmem eiusque consilium, nomen Geckonis ex auctoritate veterum cum stellionis nomine permutandi, renovem, dignari volo. Ex eodem hoc consilio, ut nempe Stelliones vel Geckones non solum tereticaudatos sed etiam laticaudatos exemplo picto illustrarem juxta meum argyropodem, etiam fimbriatum vel homa locephalum Creveldi adjeci.



JUR UNE COCHLIDE DU GOUVERNEMENT DE TWER.

PAR

B. SEWERGUINE.

Présenté à la Conférence le 17 Déc. 1817.

Le territoire du Gouvernement de Twer nous présente un terrein d'alluvion, ou plutôt des sédimens d'un ancien Océan remplis de crustacées petrifiées, dont la pluspart des originaux n'existent plus, où ne se trouvent que dans les mers les plus éloignées, comme je l'ai dejà exposé dans l'apperçû de mon voyage dans l'année 1809.

Le sol en est pour la pluspart ou argilleux, ou calcaire, ou sablonneux, présentant par ci par là des collines, mais de hauteur moyenne qui font la continuation des monts Alaounes. Le tout entrecoupé de lacs plus ou moins étendus.

Les pétrifications que l'on y trouve, sont des Fongites. Trochites, Entrochites, des Astéries, des Chamites, des Ostracites, des Pectunculites, des Anomies, des Madreporites etc. les toutes pour la plûspart silicieuses, rarement calcaires en masses comme concassées et isolées remplissant les plaines, et étant souvent à charge au laboureur qui cultive la terre, et qui en amasse de grands tas pour en debarrasser le champ.

Comme depuis mon voyage, j'ai eu l'occasion par mes correspondances de me procurer un échantillon d'une pétrification, digne d'être notée, par les circonstances particulières qui l'accompagnent, je crois être de mon devoir d'en faire part à l'Académie. C'est le Schraubenstein des Allemands, Helmintolithus Epitonium de Linnée selon l'édition de Gmelin. Quelques uns l'ont nommée, Pierre Trochléaire. Quant au nom Cochlide, je l'ai emprunté de Pline qui au livre 37 section 74 de son histoire naturelle semble avoir indiqué sous le nom de Cochlis, une production minèrale analogue à la notre.

Tout le monde connoit ce que c'est cette pétrification par sa forme extérieure. C'est-à-dire qu'elle présente un assemblage d'articulations dont la figure est ronde, et qui ressemblent à de petites roues mises l'une sur l'autre, sans pourtant se toucher par les bords qui sont attenués, et le tout réuni par une jointure qui passe par le centre des articulations en formant un cylindre oblong.

Celle qui est le sujet de cette notice est silicieuse rayant le verre. La longueur du cylindre est de plus de deux pouces, et les articulations sont au nombre de vingt-cinq, tandis que l'on n'en a remarqué jusqu'ici qu'au nombre de 8, 10, 15 ou tout au plus vingt, ce qui est encore rare.

Mais ce qui fait la pétrification encore plus remarquable, c'est sa matrice, si je puis m'exprimer ainsi, qui est un silex où elle a été renfermée jadis, et où elle a laissé un trou en forme d'un tuyau, dont elle se laisse facilement dégager.

On remarque dans l'intérieur de ce tuyau des stries parallèles de couleur de nâcre, comme des restes de l'envellope primitif ou de l'écail de l'animal par le quel il y étoit attaché et dont le noyau, la cochlide en queston s'est degagée après que l'envellope a été detruit par le laps du tems.

Sans doute que la masse silicieuse étoit encore dans un état de mollesse, quand elle compris dans son intérieur l'animal dans

son état primitif, et c'est par le gencement de la matière silicieuse qui se contractoit de plus en plus en se durcissant, que le noyau du crustacé s'en est degagé, n'ayant été attaché aux parois du tuyau que par les restes de l'enveloppe ou de l'écail.

C'est à l'espèce des Entrochites qu'ordinairement on rapporte ces sortes de noyaux, quoique toujours leur nature ne soit pas decidée au juste.

Je fais hommage pour le cabinet minéralogique de l'Académie, de l'échantillon décrit ci-dessus.

Il a été trouvé non pas loin des sources de la Wolga dans le district de la ville d'Ostaschkow, ou encore plus décisif près des bords de la Dwina sur les frontières du territoire mentionné.

COLEOPTERA CAPENSIA,

ANTENNARUM CLAVA SOLIDA ET PERFOILATA,

COLLECTA, RECENSITA ET DESCRIPTA

A

C. P. THUNBERG.

Conventui exhibuit die 14 Jan. 1818.

Insecta Coleoptrata in genere, quae clava antennarum instruuntur solida et perfoliata, plerumque in omni mundi plaga occurrunt minora, minus speciosa, inconspicua et non raro minutissima. licet in naturæ politia et oeconomia non sint minoris momenti, quam alia. Muscis itaque non multum adferunt ornamenti, a peregrinatoribus rarius apportantur, et ab Entomologis multis contemta atque ob exignitatem saepe neglecta praetereuntur.

Singulare tamen, haec inter, est Genus, Pausus dictum, quod Africae tantummodo incola valetur, et clava Antennarum maxime artificiosa adornatur, forsan quoque animalculum nocturnum.

Naturale et facile cognoscendum Genus constituunt numerosae Coccinellae, per totum fere globum terrestrem sparsae, omniaque climata amantes. Harum fere semicenturiam alit australis Africes angulus, quarumque species, ante meum in hoc celeberrimum promontorium adventum, omnes ferme erant incognitae.

Cum vero non absque omni fructu esse potest, cujuslibet terrae et regionis cognoscere Faunam, studium imprimis oeconomis utile et commendandum; in hisce parvulis insectis Capensabus examinandis et describendis, facile mihi persuasus sum, operam non omni-

no deperditam fore meam, si non confingat, aliquam inire gratiam apud Entomologiae Studiosos, quibus aureum illud *Plinii* effatum perbene notum:

Nunquam Natura magis, quam in minimis tota est.

PAUSUS.

- P. lineatus: fuscus elytris linea nigra. *.
 Pausus lineatus. Thunb. Act. Stockh. 1781. p. 171. T. 3. f.
 4. Fabric. Eleut. 2. p. 75.
- P. ruber: piceus clava antennarum dentata. 4.
 Pausus ruber. Thunb. Act Stockh. 1781. p. 170.

COCCINELL'A.

- C. rufa: flavescens corpore atro. *.
 - Magnitudine C. immaculatae globosa, tota flavesceus vel pallide rufa, abdomine solo atro.
- C. pygmaea: elytris rufis; thoracis punctis duobus abdominisque medio nigris. *.
 - Inter minores, seu magnitudine Cocc. 2 punctatae, tota supra rufa, globosa, laevis, immaculata exceptis punctis duobus in margine postico tharacis.
 - Subtus abdominis et pectoris medium nigrum.
- C. simplex: elytris fulvis: marginibus nigris; thorace immaculato; abdominis medio nigro. *.
 - Mediocris magnitudinis, globosa, glabra, nitida, tota fulva abdominis medio elytrorumque marginibus atris.
- C. divergens: elytris flavis: marginibus nigris; thoracis margine postico punctisque disci duobus atris. *.
 - Coccinellae 5 punctatae magnitudine, supra convexa, laevis, pallide lutca.
 - Caput flavum oculis nigris.

Thorax flavus: in margine postico lunula oblonga, in disco puncta duo atra.

Elytrorum margines omnes tenuissime atri.

Pectus et abdomen nigra.

Pedes flavi.

C. cuneata: elytris flavis: margine nigro; thorace flavo: margine postico maculisque quatuor atris. *.

Mediocris magnitudinis, supra flava corpore atro, laevis.

Caput punctis tribus atris.

Thoracis margo posticus totus ater; in singulo latere punctum atrum et in disco maculae duae cuneiformes, atrae.

Elytra immaculata, margine omni atra, laevia, glabra.

Pectus abdomen et pedes nigri tarsis flavescentibus.

- C. fimbriata: elytris flavis; marginibus nigris; thoracis margine postico punctis quatuor nigris. *.
 - Coccinella fimbriata. Dissert. Acad. Vol. 3. pag. 132. T. 7. f. 14. Non. Ins. Spec. I. p. 11. f. 14.
- C. spicillum: elytris rufis: marginibus nigris; thorace atro: margine antico et lateribus, disco ocellis duobus flavis. *.

Mediocris magnitudinis, supra tota flava, subtus tota nigra, laevis.

Caput nigrum guttis duabus flavis.

- Thorax niger. Margo anticus et laterales flavi; versus marginem anticum in disco ocelli duo flavi.
- C. crucigera: elytris rufis: marginibus atris; thoracis margine postico lunula, disco cruce, lateribusque punctis nigris. *.

Magnitudine Cocc. 5 - punctatae, rufa, laevis, nitida.

Thorax flavus. In medio dorso crux atra; margo posticus lunula atra notatus; in singulo latere puncta duo parva nigra, quorum posticum obsoletum.

Elytra immaculata margine omni atro.

Lodomen totum atrum.

Pedes rufescentes.

- C. rimata: clytris sanguineis: maculis duabus suturaque atris. †. Coccinella limbata. Fabric. Eleut. I. p. 359.
- C. trinotata: elytris rubris hirtis: punctis tribus nigris; capite rubro. *.
 - Coccinella trinotata. Nov. Ins. Spec. I. p. 11. f. 11. Dissert. Ac. vol. 3. p. 133. t. 7. f. 11.
- ©. 8 maculata: elytris rubris: punctis octo nigris; thorace immaculato. *.
 - Coccinella 8 maculata. Nov. Ins. Spec. I. p. 13. T. 7. f. 15. Non Fabric. Eleut. I. p. 365.
- C. oculata: elytris rubris: punctis novem nigris; circulo flavocircum oculos. *.
 - Coccinella oculata. Nov. Ins. Spec. I. p. 14. f. 18.
- C. circularis: clytris rubris: punctis novem nigris subocellatis. *.

 Magnitudine mediocri, convexa, tota rufa elytris punctatis.

 Thorax immaculatus uti ct abdomen.
 - Elytra punctata punctis atris novem cinctis circulo pallide lutescenti; 1 versus basin elytri, 2 in medio, 1 ante apicem et 1 commune in ipsa sutura intra apicem.

Pedes omnes et toti rubri.

- C. 9 signata: elytris rubris: margine punctisque novem atris; thorace bipunctato. *.
 - Similis C. 9 maculatae; differt vero margine externo atro. Mediocris magnitudinis globosa, rufa.
 - In thorace versus marginem posticum puncta duo, atra, subconfluentia.
 - Elytrorum margo exterior, uti et sutura tenuissime atra. Puncta 1 prope basin; 2 in medio, quorum alter cum priori co-haeret; pone medium 1, et intra apicem 1 commune in ipsa sutura.

Abdominis carina atra...

Alac fuscae.

- C. iridea: elytris rubris: punctis novem nigris ocellaribus. *. Coccinclla iridea. Nov. Ins. Spec. I. p. 14. f. 17.
- C. 11 signata: elytris rubris: punctis undecim nigris; corpore nigro rufomarginato; thorace immaculato. *.
 - Differt 1°. a C. 11-punctata, quod quadruplo major et thorax immaculatus.
 - 2°. a C. 11-maculata margine abdominis undique rufo, et quod quadruplo major.
 - 3°. a C. 11-notata margine abdominis rufo.
- €. flavicollis: elytris sanguineis: punctis decem nigris; therace flavo. *.

Coccinella flavicollis. Nov. Ins. Spec. I. p. 18. f. 26.

- C. gibba: elytris rubris: fascia punctisque sex nigris. *. Coccinella gibba. Nov. Ins. Spec. I. p. 13. f. 14.
- C. capensis: elytris rubris: punctis duodecim nigris; thorace immaculato. *.

Coccinella capensis. Novae Insect. Spec. I. p. 16. f. 21.

Coccinella chrysomelina. Fabric. Eleut. I. p. 368.

Pectus atrum.

Maculae elytrorum magnac, rotundae.

Turiat glabra et pubescens.

- C. borcalis. clytris rufis: punctis duodecim nigris; thorace quadripunctato. *.
 - Coccinella borealis. Nov. Ins. Spec. I. pag. 15. f. 20. Fabric. Eleuterat. I. p. 368.
- C. variegata: elytris flavis: punctis duodecim fasciaque media nigris. †.
 - Coccinella variegata. Fabric. Eleut. I. p. 368.
- C. 12 maculata: elytris rufis: punctis duodecim nigris minutis distinctis. *.
 - Mediae magnitudinis, et C. capensi, cui similis, plus duplo minor.

- Tota rufa thorace immaculato.
- Elytra convexa, tribus punctorum rotundorum et parvorum paribus notata, quorum par ultimum obliquum.
- C. Caffra: elytris luteis: fasciis duabus dorsalibus sinuatis punctisque sex nigris; thorace atro biguttato. •.

 Coccinella rivularis. Fabric. Eleut. I. p. 361?
- C. distincta: elytris rubris: punctis sedecim nigris distinctis. *. Coccinella distincta. Nov. Ins. Spec. I. p. 17. f. 23.
- C. crux: elytris flavis: lineis duabus cruceque nigris. *.
 Coccinella crux. Nov. Ins. Spec. I. p. 20. f. 29.
- C. lunata: elytris flavis: fasciis duabus arcu punctisque quinque nigris. *.

Coccinilla lunata. Nov. Ins. Spec. I. p. 19. f. 28.

- C. lineata; elytris rubris: margine omni maculisque duabus oblongis nigris. *.
 - Coccinella lineata. Nov. Ins. Spec. I. p. 21. f. 31. Coccinella striata. Fabric. Eleut. I. p. 360.
- C. comma: clytris flavis sutura margine lineaque nigris. *. Coccinella comma. Nov. Insect. Spec. I. p. 20. f. 30.
- C. psi: elytris flavis: margine externo maculis quatuor nigris. *. Coccinella psi. Nov. Ins. Spec. I. p. 13. f. 16.
- C. repanda: elytris flavis: fasciis tribus undatis nigris. *.

 Coccinella repanda. Nov. Ins. Spec. I. p. 18. f. 25.

 Coccinella tricineta. Fabric. Eleut. I. p. 361.
- C. flexuosa: elytris rubris: fasciis duabus punctisque duobus nigris. *.

Coccinella flexuosa. Nov. Ins. Spec. I. p. 17. f. 24. Coccinella bifasciata. Fabric. Eleut. I. p. 363.

C. un data: elytris luteis: fascia flexuosa punctisque duobus nigris; thorace flavo punctato. †.

Coccinella undata. Fabric. Eleut. I. p. 362.

C. undulata: elytris rubris: fasciis undatis dentatisque variis nigris. *.

Coccinella undulata. Nov. Ins. Spec. I. p. 18. f. 27.

- C. flavipes: elytris nigris; thorace nigro: maculis duabus flavis. *. Coccinella flavipes. Nov. Ins. Spec. I. p. 21.
- C. minima: atra immaculata. *.

Pulicis minimi vix magnitudine, tota supra infraque atra, im-

Similis C. morio seu Anthreno atro Mus. Upsal. sed quadruplo minor.

C: pulicaris: atro capite elytrisque postice flavis. *.

Pulicis vix magnitudine, tota atra, capite antennis elytrisque postice a medio ad apicem flavis.

Pedes rufescentes.

- C. oblongata: elytris atris: maculis transversis rubris; thorace utrinque macula marginali rufa. *.
 - Magnitudo et summa similitudo C. oculatae; differt vero macula transversa elytrorum non orbiculari, sed oblonga, versus marginem externum latior.
- C. rivosa: elytris nigris: lunulis sex pustulisque quatuor rubris. *.
 Coccinella rivosa. Nov. Ins. Spec. I. p. 22. f. 33.
 Coccinella lunata. Fabric. Eleut. I. p. 384.

 Habitat in Capite bonae spei et in India orientali.
- C. hirta: elytris nigris: maculis duodecim rubris. *. Coccinella hirta. Nov. Ins. Spec. I. p. 23. f. 35.
- C. 10 pustulata: elytris nigris: pustulis decem fulvis. *.
 Coccinella 10 pustulata. Linn. Syst. Animal. I. p. 585.
 Fabric. Eleuter. I. p. 384.

Corpus magnitudine C. 7 - punctatae, convexum, glabrum.
Caput flavum oculis nigris.

Thorax niger, glaberrimus, margine antico angulisque anticis flavis.

Elytra marginata, nigra, glaberrima. Maculae decem fulvae: in singulo 1 ad basin lunata margine flavescente, cruribus postica spectantibus; 1 in margine exteriori ad apicem lunata cruribus antrorsum versis; 1 pone medium elytri etiam lunata cruribus postica spectantibus. Praeter has duae maculae rotundae, altera in medio elytro et altera versus suturam.

Pectus et abdomen nigra, glabra, plana marginibus russ.
Femora antica basi nigra tibiis slavescentibus.

Pedes postici toti nigri.

C. pardalina: elytris nigris: punctis decem margineque sinuato albis. †.

Coccinella pardalina. Fabric. Eleut. I. p. 386.

C. 12 - verrucata: elytris nigris: lunulis duabus bascos pustulis - que decem rubris. †.

Coccinella 12 - verrucata. Fabric. Eleut. I. p. 385.

C. 20 - pustulata: elytris nigris: pustulis viginti fulvis. *.

Coccinella 20 - pustulata. Nov. Ins. Spec. I. p. 24. f. 36.

An Coccinella canina? Fabric. Eleut. I. 387.

C. atrata: elytris atris: guttis quatuor flavis; capite thoraceque duabus. *.

Pulicis magnitudine, globosa, atra.

Capitis guttulae duae et in margine thoracis gutta utrinque flava. Elytrorum macula anterior major.

C. dentata: elytris nigris: margine externo linea tridentata punctisque sex flavis. *.

Coccinella dentata. Nov. Ins. Spec. I. p. 23. f. 34.

Mémoires de l'Acad. T. VII.

ANTHRENUS.

A. obscurus: supra fuscus puncto elytrorum marginali, subtus cinereus. *.

Anthrenus obscurus. Act. Societ. Litter. Upsal. vol. 7.

A. cinereus: cinereus, tomentosus punctis thoracis quatuor atomisque clytrorum fuscis. *.

Anthrenus cinereus. Act. Upsal. vol. 7.

- A. irroratus: fuscus elytris apice fasciisque quatuor albis. *.
 Anthrenus irroratus. Act. Upsal. vol. 7.
- A. bifasciatus: ater elytris punctis fasciisque duabus albis; thorace multipunctato. *.

Anthrenus bifasciatus. Act. Upsal. vol. 7.

A. pustulatus: ater, pubescens elytris maculis decem rubris. *.
Anthrenus pustulatus. Act. Upsal. vol. 7.

HISTER.

- H. major: elytris substriatis; thoracis marginibus ciliatis. *.

 Hister major. Fabric. Eleut. I. p. 83.
- H. cyancus: thorace aeneo, elytris cocrulescentibus. *. Hister cyancus. Fabric. Eleuterat. I. p. 86.

DERMESTES.

D. marginatus: niger thoracis lateribus pectore incisurisque abdominis albis. *.

Dermestes marginatus. Nov. Ins. Spec. P. I. p. 7. f. 6. Dermestes vulpinus. Fabric. Eleuter. I. p. 229.

- D. piceus: totus ferrugineus elytris striatis. *.
 Dermestes piceus. Nov. Ius. Spec. I. p. 8.
 Dermestes felinus? Fabric. Eleut. I. p. 314.
- D. bifasciatus: niger elytris fasciis binis undulatis luteis; tho-race cinereo tessellato. *.

Dermestes bifasciatus. Nov. Ins. Spec. I. p. 6. f. 2.

BRACHYPTERUS.

B. capensis: ater pedibus piceis. *.

Magnitudine pediculi, totus ater, laevis, pedibus solis piceis, paulo pallidioribus.

Llytra abdomine duplo fere breviora.

CORYNETES.

C. rufipes: hirtus, violaceus pedibus rufis. *.
Anobium rufipes. Nov. Ins. Spec. I. 10.
Dermestes rufipes. Fabric. Entomol. Syst. I. p. 230.

Corynetes rufipes. Fabric. Eleuterat. I. p. 286.

C. ruficollis: hirtus, violaceus thorace basi elytrorum pedibusque rufis. *.

Anobium ruficolle. Nov. Ins. Spec. I. p. 8. f. 7.

Corynetes ruficollis. Fabric. Eleut. I. p. 286.

SPHAERIDIUM.

S. scapulare: atrum elytris basi rufis. *.
Nitidula humeralis. Fabric. Eleut. I. p. 354.

Magnitudine Sp. haemorrhoidalis, totum atrum, glabrum, humeris elytrorum seu basi latere externo maeula magna rufa.

S. carbonarium: atrum totum elytris tenuissime striatis. *.

Magnitudine et statura Sp. atri, sed totum aterrimum, nec piceum, laeve, glabrum elytris vix manifeste striatis.

Pedes parum picei.

BOSTRICHUS.

B. typographus: pilosus, testaceus elytris stryatis praemorsoretusis dentatis. *.

Bostrichus typographus. Fabric. Eleut. II. p. 385. Totus fusco - ferrugineus.

Antennae subfissiles clava triarticulata.

Caput inflexum, nigrum collo rufo.

Thorax gibbus, aculeato - muricatus.

Scutellum nullum.

Elytra cylindrica, praemorsa, dentata, punctatissima, vix striata. Tibiae spinosae. Femora crassiuscula.

HYDROPHILUS.

H. gibbus: globosus, ater elytris laevibus; oculis glaucis. *.

Habitat in Capite bonae spei et in Brasilia.

Magnitudine Hydroph. orbicularis, subglobosus; totus ater, glaber, nitidus, laevissimus, oculis solis glaucis.

Elytra corpus includentia.

Obs. Hydrophili genus pertinere ad insecta antennis perfoliatis, nec clava solida, verum triarticulata.

MEGATOMA.

M. bifasciata: nigra, nitida elytris laevibus: fascia duplici rubra undata. *.

Anobium bifasciatum. Nov. Ins. Spec. Diss. I. d. 9. fig. 9.

CLERUS.

C. aethiopicus: coeruleus elytris fasciis duabus albis. . Anobium capense: Nov. Ins. Spec. Diss. I. p. 9. fig. 8.

DE RUMAENZOVITE, FOSSILI FENNICO NOVO,
DISQUISITIO.

N. NORDENSKIÖLD.

Conventui exhibuit die 10 Junii 1818.

Fossile, cujus a me peractam disquisitionem examini Imperialis Academiae Scientiarum jam audeo subjicere, in Fennia occurrit ad Stratum Calcareum Kulla in Paroecia Kimitto, quae ab urbe Aboa quinto distat milliario Svecano, situm. Licet ad Granatorum ordinem hoc pertineat fossile, diversum tamen est prorsus et distinctum ab omnibus hucusque quantum quidem scio, examinatis gra-Novae itaque speciei novum additurus nomen, non potui quin, meae in Summum Scientiarum physicarum protectorem, Excellentissimum Dominum, Comitem Illustrissimum Nicolaum Rumaenzoff, indulgens pietati, ipsam nomine insignirem Rumaenzovitae. - Stratum ad Kulla, unde ab antiquis inde temporibus lapides effracti sunt calcarei, atque ad officinam massariam (Hohe Ofen) ad Dal adhibiti, in diem prominens pars est venae calcareae secundum oram Fennicam porrectae, in Paroeciis Pargas et Kimitto praecipue conspicuae. Directio ejus est inter plagas O N O et W S W. Stratum porro est erectum, a perpendiculo non ultra 15 aut 20 gradus deflectens. Crassitiem nonnisi aliquot habet perticarum. xum, utroque latere, griseo constat Gneiso, ejus, quod hisce in locis vulgare est, indolis. Lapis calcareus, qui heic occurrit primaevus est, opacae istius, confusae et tenuae spathosae texturae, colorisque albi, cum flavis atque griseis variationibus, quae quidem, venularum instar, Stratum permeant. Rumaenzovites uti interjacens, quam Salband appellant, materies, inter Gneisum et Calcem inspersa reperitur, ea Strati parte, quae ad meridiem vergit; adestque praepraeterea in minoribus Gneisi per Stratum calcareum extensionibus. Concreta adeo est cum Gneiso, ut utriusque formatio uno eodemque prorsus facta esse videatur tempore.

A. Descriptio Mineralogica.

Colorem Fossile nostrum habet brunum; partim flavescenti-brunum, partim nigrescenti-brunum, fractumque ad magnam similitudinem accedit resinae.

Fossile hocce forma obvenit compacta (derb) interdumque conspicuum est optime formatis superficiebus crystallinis, quae ad regulare Rhomboïdale dodecaëdron, marginibus lateralibus abscissis, pertinere videntur. Raro nonnisi una reperitur complete formata superficies, cui adjunctae sunt partes ceterarum, quae in illam angulo inclinant 120 graduum. Vulgo conspicuum est Fossile singularis indolis crystallinis meatuum superficiebus, quae in apicem sese conformant pyramidalem striataeque sunt transversaliter. Apices istae pyramidales carent forma constante, neque, quod ad meatus fossilis, quid habent determinati.

Meatus lamellarum duo esse videntur; quorum unus valde est occultus, neque visibilis nisi per rimas, quae in minera occurrunt. In se inclinant hi angulo fere 90 graduum.

Fractura est festucosa, tenui-conchaeformis. Partes fractae absque forma determinata, marginibus acutis.

Superficies crystallinae clare, speculi instar, nitent. Crystallinae meatuum superficies, partim nitent, partim nitoris fere expertes sunt vel cereum habent illum. Fractura gaudet nitore, qui inter illum vitri ac resinae est.

Laminae tenuiores maxime sunt pellucidae.

Minera porro est fragilis, neque difficilis divisu; dura, scintillat vi chalybis. Radit vitrum et Spathum scintillans, at ipsa scalpitur a Quarzo. Gravitas specifica est 3,6096, in temperatura (Celsii adhibito Thermometro) + 16 graduum.

Pulvis est albescenti - flavescens.

B. Experimenta ad Tubum ferruminatorium.

Fragmentum Rumaenzovitae per se a flamma exteriori non mutatur, nisi quod aliquantum albescat, rimisque tenuibus in multae euntibus directiones, adficiatur; interiori admotum flammae, absqus fervescentia, in guttam colliquescit vitream, quae, si subito et evitato contactu fuliginis fuerit liquefacta, lapidis servat colorem atque pelluciditatem; alioquin atra fere fit.

Frustulum parum a subcarbonate sodae afficitur, superficies tamen albida fit, aspectu vitrea; pulvis autem in flavescens atque pellucidum colliquescit vitrum.

A subborate sodae satis tarde parvaque quantitate solvitur, si vel in pulverem redactus fuerit lapis. Primum evanescit lapidis color. Gutta deinde, conveniente temperatura, lactescit; refrigescens autem clara fit et flavescenti - bruna; ubi vero perfecte refrixerit, colorem accipit viridescenti - nigriscentem. Nitrate potassae adhibito, nullum plane vestigium proditur Mangani.

A Sale Microcosmico solvitur, at valde exigua quantitate, in pulverem licet contusus. Vitrum refrigescens flavescentem accipit colorem; deinde autem plane fit clarum. — Nimia addita pulveris lapidis quantitate, natare reperitur in vitro massa quaedam alba nondum soluta, cujus portio si magna fuerit, gutta, frigida facta, albafit et opaca.

C. Disquisitio Analytica.

E pracliminaribus experimentis cum patuisset, in Fossili contineri terram Siliceam, Alumineam, Calcaream et Ferrum oxidatum, aliquibus simul deprehensis vestigiis Mangani et Magnesiae, sequentem aggressi sumus Analysin:

- a) Bene contritus Iotusque pulvis, ponderis 5 grammarum, quadruplo addito sui ponderis subcarbonate potassae in cochleari platineo eo, quo rubuit, caloris gradu sesqui-alteram horam comburebatur. Massa ignita intense erat viridis, concreta et bullis plena. Solvebatur deinde haec in acido muriatico, aqua diluto; flocci aliquot, decompositi aperte pulveris, insoluti remanserunt, adhibita licet fuerit abundantia acidi. Solutio una cum ista in acido muriatico non soluta terra silicea, usque ad siccitatem evaporabatur. Massa salina, concreta albescenti-flava, in aqua, cui admixtum fuit acidum muriaticum, iterum soluta terram siliceam insolutam reliquit quae in filtro collecta, nova aquae copia perluta et siccata atque ignita ponderis fuit 2,050 grammarum. Fuit haec niveo alba et, factis solitis experimentis, naturam prodidit terrae Siliceae, omnino purae.
- b) Aqua, qua terra erat perluta silicea, decoquendo usque ad $\frac{3}{4}$ inspissata, affundebatur solutioni, quam jam ope Ammoniaeae eausticae, minima, qua fieri potuit, abundantia adhibitae, praecipitatum fuit albido-flavum, valdeque spatiosum. Colligebatur hoc mox in filtro, fervidaque aqua perluebatur, ne quae in solutione residua fuit, terra calearea, acido afficeretur carbonico.
- c) Ut jam e praccipitato, quod a calce immune erat, magnesia et mangani oxidum separarentur, solvebatur illud iterum in acido muriatico, commiscebatur cum muriate ammoniaco ac praecipitabatur ope subcarbonatis ammoniaci. Quod hine obtinebatur praccipitatum, postquam una cum solutione per aliquod tempus in vase inclusum jacuerat, obturato, in filtro collectum bene perluebatur.
- d) Quod in solutione b) liquamen filtrum pertransierat ope Oxalatis Ammoniaci praecipitabatur, locoque calido aliquod tempus retinebatur. Praecipitatum hocce lacteo-album, bene perlutum atque siccatum, ignitum est in cochleari platinco, ponderisque fuit 2,191 grammarum. Superfundebatur jam huic subcarbonas ammoniacus et siccabatur; unde pondus solum 0,004 gr. ipsi accessit.

Hacce 2, 195 grammae subcarbonatis calcarei 1, 238 gr. puram calcaream continent terram.

- e) In c) et d) obtenti liquores, quorum utrumque Magnesiam et Manganum continere suspicare licuit, una commiscebantur, et ad siccitatem concocti, in cochleari platineo, gradu adhibito ignis leniori, comburebantur, usque quo exhalare desiverunt Muriatis Ammoniaci vapores. Quae remansit, massa salina cum valde diluta subcarbonatis potassae solutione digerebatur; brunescens quaedam terra insoluta remansit, quae, facta ignitione, colorem accepit nigrescenti-brunum, ponderisque fuit 0,058 gr. Hacc massa iterum in concentrato acido muriatico soluta reliquit 0,012 gr. terram Siliceam. Solutae 46. milligrammae continebant circiter \(\frac{1}{3}\) Magnesiam et \(\frac{9}{3}\) Oxidum manganteum.
- f) Ferri et Aluminae praecipitatum in e) solvebatur iterum in acido muriatico, admixta huic parva portione acidi nitrici, cum quo per horulam digerebatur, ut summo, qui obtinere posset, gradu oxidarctur omne, quod praesens esset ferrum. Solutio deindo, addito ammoniaca caustica, ad neutralisationem ea cura-redigebatur ut, facta digestione, parva portio oxidi ferrici praecipitaretur. Diluebatur tum solutio cum magna aquae copia, et praecipitabatur ope succinatis ammoniaci. Praecipitatum obtinebatur brunum, quod ignitum dedit 0.351 grammas oxidi ferrici. Alumina ope ammoniacae causticae praecipitata et ignita, ponderis fuit 1.204 gr. Fuit hace alba et in Foco tubi ferruminatorii, addita gutta solutionis nitratis Coboltici, colorem ostendit coeruleum, qui ne minimum quidem in rubrum vergebat, unde nullam admixtionem habeit Magnesiae.
- g) Ut exploraretur an et quatenus contineret lapis volatiles in igne partes; horam unam, calore ad plenam usque rubescentiam adaucto, urebantur frustula lapidis 16,23 grammarum; quo facto,

haec 0,148 grammae seu 0,91 pro quoque centum, partes e suo pondere amiserunt. Lapidis frustula albida sunt facta, et in majoribus rimis, valde tenues comparuerunt albae membranulae, antea non visibiles. Constabant haecce sine dubio e calce, non nisi exiguam et negligendam efficiente partem ponderis totius lapidis.

Analysis itaque praebuit nobis:

	•					ntum pondio.
Terram Silic	eeam (a	2,05	0 {			1101
	(6	0,01	2	₩s.	•	41,24.
Cal	caream (a	7) 1,23	8	-	-	24,76
Alm	mineam (f) 1,20	i,		-	24,08.
Oxidum Ferrica	um (f	0,35	1	-	-	7,02.
Magnesiam et l	Mangan. (e) 0,04	6	-	*	0,92.
Partes Volatiles	s (9) et				
Facturam -		465	wo =	₩.,		1,98.

Neque Magnesia neque Oxidum Manganicum ad Fossilis chemicam constitutionem pertinere videntur. Oxygenium Terrae Calcareae et illud Oxidi ferrici eadem sunt inter se ratione ac numeri. 3 et 1 respective sumti. Oxygenii in Alumina ad illud in oxido ferrico ratio est ut 5:1; ac denique oxygenium in Terra Silicea et illud in Oxido ferrico rationem sequuntur candem ac numeri 9 et 1 respective. Formula itaque minerae nostrae mineralogica, ad mentem cel. Berzelii exposita, hace erit: 3CS + 5AS + FS.

E praecedenti descriptione mineralogica manifeste patet Rumaenzoviten in Systemate mineralogico Granatorum Ordini esse
annumerandum. Non itaque ab re erit heic universalem Granatorum Ordinis synopsin exhibere, ut ratio reddatur, cur sit Rumaenzovites. species propria constituenda. Proportionum determinatarum.

secundum quas sese componit natura anorganica, doctrina, proxime praeterlapsis annis novam adepti sumus rationem, compositionem fossilium via chemica explorandi; atque mineralogo maximi haec erit momenți investigatio constitutionis chemicae Fossilium, ut horum cuique debitus in systemate viudicetur locus. Quemadmodum e puro crystallographico contemplandi modo haud identica spectare possumus Fossilia, quae diversas habent crystallisationis formas fundamentales, ita etiam, pura instituta Chemica investigatione, nequaquam ca licebit, ad unam referre speciem, quae, quod ad constitutionem suam, diversa esse deprehendantur.

In ordine eo, cujus jam proponemus Tabellam, Fossilia crystallisationis formam fuudamentalem unam eandemque quidem habent, (excepto Aplomo, quod quidem in forma crystallisationis fundamentali putat Haüy a ceteris crystallis discrepare, exceptisque insuper iis, quae nondum sub forma regulari comparuerunt) at sunt tamen in chemica sua constitutione maxime diversa, idque non solum quod ad materias, quae eandem ingrediuntur, verum etiam quod ad formam constructionis suae atomicae. Quam vero relationem constructionis erystallicae diversitas ad diversitatem dispositionis atomorum habeat, in praesenti Scientiae statu ne suspieari quidem licet.

Signa, quibuscum in sequenti Tabella, atomi cujusque, quae Fossile ingreditur, materici, exprimentur, eadem sunt, ac quibus usus est cel. *berzeitus* in suo, de puro chemico systemate minerali, tractatu; cujus quidem versio Germanica in XV. Volumine invenitur Libri, qui "Beyträge zur Chemie und Physik von *Schweigger*" inscribitur. Exprimit ibi Terram Siliceam signum S, Terram Alumineam A, Magnesiam M, Terram Calcaream C, Oxidum Ferricum F, Oxidum ferrosum f, Oxidum Manganicum Mg, Oxidum manganosum mg.

Ne ullum quidem (excepto Rumaenzovite) Fenniae propriorum Granatorum poterit heic afferri, cum nulla, quantum equidem scio, horum hactenus facta fuerit analysis. Valde tamen nobis videtur probabile, Fennica nostra Granata, locum juxta Almandinum et Granatum Faluense fore occupatura, illaque eandem cum alterutra horum lapidum habere formationem.

Lati.

Franatum Swappawa

Hisinger, Afhandlingar i Fysik etc. II. 157.

Bucholz.

Rothovites

Franatum Swappawa

Bucholz.

Rothoff, Afhandlingar i Fysik, Kemi etc. III, 324

Topazolithes

Bonvoisin, Haüy, Tableau Comparatif. p. 33.

oxidati.

Aplomum . . a Laugier, Annales du Mus. LX. 271.

Granatum Danemore: \[\langle Murray, Afhandlingar i Fysik, Kemi etc. II. 188

Grossularia . , iridis Klaproth, Beiträge zur etc. IV. 320.

Rumaenzovites bruna

Pyrope . - rubra Klaproth, Beiträge zur etc. II. 21.

Colophonites 'acco- Simon, Journal der Physik u. Chemie, IV. 405.

a. Siliciates Aluminae et Ferri oxidati.

Almandinum	A5 + FS ?	4,085	Grana confusa, Trapezoidali- Dodecaëdron	,	\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \
Granatum Faluense	AS + fS	4,2	Rhomboidali - Dodecaëdron	Lamina tenuiores pur-	SHisinger. Afbandlingar i Fysik, Kemi och Mineralogi, IV. 386.
rubrum Groenlandiense	$AS + FS + SM^{\frac{1}{2}}$	3,920	Frustula conchaeformia	Rubrum Pellucidum	Klaproth, Beiträge zur etc. V. 131.
Shex manganicus granatiformis (Granatförmiger Braunsteinkisel.)	AS + FS + 2MgS	3,7	Trapezoidali - Dodecaëdron	Hyacinthino - Rubrum	ibidem II. 239.
	b. Silio	i a t	es Calcis et Fe	rri oxidati.	
Cranatum Swappawarense Tyringense	$CS + FS + \frac{1}{3}fS$ $CS + FS$		Amorphum	Nigrum , Opacum	Hisinger, Afhandlingar i Fysik etc. II. 157. Bucholz.
• •	$CS + FS + \frac{1}{3}MgS$	3,835	Rhomboidali - Dodecaëdron, apicibus abscissis	Superficies obscuro-bruna Fractura flavo-bruna	Rothoff, Afhandlingar i Fysik, Kemi etc. III, 324.
Topazolithes	CS + FS + MgS?		Rhomboidali - Dodecaëdron	Flava, Flavo - viridis	Bonvoisin, Haüy, Tableau Comparatif. p. 33.
	c. Siliciates,	C a l	lcis, Aluminae	et Ferriox	idati.
Aplomum	$CS + 2AS + FS^2$	3,444	Rhomboidali - Dodecaëdron , secundum breviorem dia- gonalem striatum	Color inter Nigro-griseum et Nigro-brunum	Laugier, Annales du Mus. LX. 271.
Granatum Danemorense	CS + AS + FS + MgS	3,902	Trapezoidali - Dodecaëdron	(Albido - brunum; Obseu-	{Murray, Afhandlingar i Fysik, Kemi etc. II. 188.
Mclanites	6CS + 2AS + 3FS + fS 6CS + AS + 3FS + fS + mgS 12CS + 4AS + 3FS + fS		Rhomboidali - Dodecaëdron Amorpha Trapezoidali - Dodecaëdron		Klaproth, Beiträge zur etc. V. 170. Rose, Mineralogische Tafeln von Karsten, p. 33. Klaproth, Beiträge zur etc. IV. 320.
Rumaenzovites	3 CS + 5 AS + FS	3,6096	Rhomboidali - Dodecaëdron, marginibus abscissis	Clara Flavescenti - bruna	
Pyrope	CS + 15AS + 6FS + 4MS	3,718	Graniformis		Klaproth, Beiträge zur etc. II. 21.
Colophonites	$4 CS + 3AS + FS + \frac{1}{2}MgS$	4,007?	. Trapezoidali - Dodecaëdron	Flavo-bruna in olivaceo- viridem vergens	Simon, Journal der Physik u. Chemie, IV. 405.

NOVAEINSECTORUM SPECIES, DESCRIPTAE

A

G. J. BILLBERG.

Conventui exhibuit die 8 Julii 1818.

DECAS Ia.

Scientia Entomologica, licet ab illo ipso tempore, quo Svecus Linne, in editione duodecima Systematis Naturae, hanc tractabat, per quotidianas fere novas observationes et detecta, admirandum in modum increverit, et numerus specierum notarum, comparatione antecedentis aetatis plus quam sextuplex evaserit, nihilo tamen minus ad totum insectorum agmen cognoscendum haud sufficit. Mihi, hujus Scientiae cultori, sperandum sit, Academiam Imperialem haud inique laturam fore, si descriptionem decem novarum specierum, ad inferendam in Actis ejus cruditissimis proponere ausus sin, ordinatarum, proxime morem celeberrimi Dr. Latreille, pauculis quibusdam immatationibus meis.

Venia igitur dicam, distributionem Insectorum in Classes secundum formam et qualitatem alarum, in Ordines secundum alas et organa oris, et in Subdivisiones secundum formam et numerum pedum, palporum et antennarum, naturae maxime convenire.

Classes, quas proposui, sunt:

- 1. Elythroptera, alis superioribus crustaceis vel coriaceis.
- 2. Gymnoptera, alis nudis, squamoso-imbricatis vel membranaceis.
- 3. Aptera, alis in utroque sexu nullis.

Et quum species, quas hoc modo in lucem proferre conatus sum, primae Classis sum, a re non vacat nutum faventem expetere. Quod ad primum ejus Ordinem attinet, Linnaei usos sum denominatione, elucet:

Coleoptera. Respectu vero hujusce Ordinis subdivisionum, Schemam his Litteris adjectam synopticam citem.

In descriptionibus terminos colorum retinui, quos quidam a me, in Actis Regiae Academiae Scientiarum Sveciae anno 1813, editus Tractatus indicat, in quo horum terminologiam Historiae Naturali, tanto magis necessariam judicavi, quo differentia denominationis, qu'un varii auctores promiscue adhibuerunt, magnam, sine dubio, Lectori attulit molestiam.

1.

LUCANUS (Auctorum).

Tab. XII. Ibex, mandibulis exsertis apice incurvatis, quadridentatis; castaneus subtus nitidus, supra purpureo-sericeus, scutello albido. Fig. 1. a. (mandibula magnitudine aucta Fig. 1. b.)

Habitat Brasiliae.

Descriptio. Statura Corporis fere Luc: paralellipipedi, at minor, mandibulisque majoribus exsertis. Caput longitudine latius, antice semicirculari, medio depressum: angulis anticis sinuato acutis et foveola longitudinali ante oculos; Castaneum, supra purpurco seriecum, subtus nitidum: oculis nigris; mandibulis exsertis, subtrigonis, longitudine fere Capitis Thoracisque, supra depressiusculis, subtus convexis, castaneis, glabris, dentibus 4 parvis; duo ante medium et duo ad basin, antennis nigris. Thorax longitudine fere duplo latior, lateribus rotundatis, marginatis, angulisque anterioribus porrectis: postice truncutus, castaneus, supra purpureo sericeus: margine antice albido ciliato; subtus nitidus. Scutelium parvum, albido vil-

losum. Elytra latitudine Thoracis sed fere triplo longiora, ad apicem attenuata, extus marginata, intra humeros apiceque foveolata, castanea, purpureo sericea, ipso margine suturaque nigris. Corpus subtus pedesque castanei: tarsis fuscescentibus, subtus lutescente pilosis.

2.

ORYCTES (Hligeri).

- Thorace cornuto.

Faunus, obscure castaneus, capite antice transversaliter rubrescente; thorace medio retuso, apice unituberculato (foeminae)
Elythris stria suturali lateribusque punctato striatis. Fig. 2.
Habitat Barbariae.

Descr. Statura et magnitudine sere Or. (Geotrupis Fabr.) Aloci, cui similis, a quo tamen fascia transversa rubrescente punctisque lateralibus elytrorum differt, ut etiam ab Or. Boac. colore opaciore, tuberculis capitis thoracisque. stria punctisque elytrorum. fasciaque Capitis diversus. Castaneus supra obscurior. Caput inaequale, antice truncatum, ad basin duplo latins fascia ad marginem apicalem semicirculari rubrescente, vertice urberculis duobus inter oculos parvis: mandibulis nigris, antennis vero palpisque obscure castaneis, punctulatis. Thorax medio longitudine dimidio latior. ad basin transversus. antrorsum angustion, apice sinuato truncatus, lateribus medio rotundatis, antice lateribusque squamulose rugosus. postice laevis, oculo armato subtiliter et irregulariter striatus, tuberculo ad apieem parvo, foveaque ante medium dorsali magna. Scutell'un triangulare antice squamulose rugosum. Elytra latitudine duplo lougiora, stria sutur di distincta, latere punctis et serialibus et sparsis, medio et ad apicem oculo armato subtiliter et irregulariter striatis. Pectus subtilissime punctatum: pilis sparsis testaceis. Sternum antice squamulose rugosum, cum Abdomine glabrum. Femora castanea, Tibiae Tarsique vero nigrescentes.

Obs Marem ejus non vidi.

3

RUTELA (Latreilli).

+ Scutello brevi.

- Unguibus inaequalibus.

Fersicolor, viridinitens, supra testaceo pubescens; elytris striatopunctatis. Fig. 3.

Hab. Brasiliae.

Descr. Statura et summa affinitate R. glaucae, sed multo minor et convexior differt hasi capitis angustiore apieeque truncato, thorace longiore scutello majori elytrisque punctatis. Caput latitudine inter oculos longius, antice truncatum, ruguloso punctatum, supra pube testacea brevissima indutum. Thorax longitudine latior: angulis anterioribus porrectis, posterioribus lateribusque rotundatis; marginatus, punctatus: impressulis nonnullis lateralibus et dorsalibus; viridinitens pube brevissima testarea Scutchum subtriangulare, magnum subtilissime punctatum, viridinitens, minus pubescens. Elytra latitudine Thoracis, sed plus triplo longiora, marginata: lateribus sub humeris adpressis; punctato-striata: interstitiis striarum irregulariter et concinne punctatis; viridinitentia, testaceo pubescentia. Corpus subtus totum viridinitens, erebre punctatum, pilis marginalibus testaceis; apice tibiarum tarsisque piceis.

4.

MELOLONTHA (Auctorum).

* Ungulis omnibus binis, apice simplici, medio dente acuto armatis.

 \div Clava antennarum lamellis plusquam tribus: 3.7, 1. 5 — -1.5, 6, 1. 4.

Opaca. oblonga, rugulosa, obscure picea, apice elytrorum lurida: corpore lineisque tribus thoracis albido villosis. Fig. 4.

Ilab. -- -

Deser. Statura et affinitate M. serrulatue (Synonymia Dr. Schönherri Tom. I. pag. 3, App. pag. 73.), a qua tamen differt

clava antennarum tetraphylla, thorace lineis tribus albidis apiecque elytrorum lurido. Caput subquadratum, antice truncatum, marginatum, rugulose - punctatum, obscure piccum: pilis adpressis erebris murinis; antennis piecis clava tetraphylla (mas non visus). Thorax longitudine dimidio latior, antice semicircularis: lateribus vix crenulatis, angulato rotundatis, marginatus, ruguloso punctatus, obscure piceus: pilis adpressis sparsis griseis, lineisque tribus pilosis longitudinalibus abbreviatis albidis. Scutellum subtriangulare, apiec rotundatum, rugositate, coloreque thoracis at crebrius pilosum. Elytra latitudine plus duplo long'ora, apice truncata, marginata, parum convexa, subtiliter rugulosa, luvida, sed ad basin pieea: pilis brevissimis sparsis, adpressis grisescentibus. Corpus subtus totum obscure piceum, subtilius rugulosum, albido villosum, pilis sparsis longioribus grisescentibus, unde maculis quatuor latere abdominis triangularibus albidis; Pygidio marginato breviter villoso. Pedes nigrescentes: tibiis antieis externe tridentatis.

5.

+ Clava antennarum in utroque sexu triphylla.

M. Aenea. Oblonga ferruginea, villosa, supra aenea, thorace elytrisque pilis brevibus rarioribus adpressis albidis.

Hab. Brasiliae.

Descr. Statura et magnitudine M. pilosae var. β. (villosae Fabr.). Caput subquadratum, elypeo paulo emarginato angulis anterioribus rotundatis; rugulosum, aeneum, dense lutescente villosum: Oeulis nigris antennisque ferrugineis. Thorax longitudine duplo latior, antice angustior: lateribus rotundatis; crebre punctatus, aeneus: pilis brevibus rarioribus adpressis alb dis. Scutellum trinagulare, aeneum, laeve et glabrum. Elytra latitudine plus daplo longiora, dorso lineis tribus subelevatis, rugose punctulata; impressione mugua oblonga obliqua laterali, sub humero faveolaque minori rotunda a ad medium; aenea, pilis brevibus rarioribus adpressis albidis. Corpus

subtus ferrugineum, dense lutescente villosum; pedibus aeneis, lutes-

6.

M. Gröndahli, Oblonga, ferruginea albo squamulosa: elevatione furcata media, et utriusque lateris thoracis, scutello, margine suturaque Elytrorum chrysoprascis. Fig. 6.

Hab. in Cap. bonae spei.

Descr. Statura et magnitudine M. ruficornis. Caput subquadratum, clypeo haud emarginato reflexo, angulisque anterioribus rotundatis; rugulosum, ferrugineum; squamulis albidis; subtus lutescente villosum; palpis antennisque ferrugineis, clava triphylla. Thorax longitudine dimidio latior, antice angustior, lateribus rotundatis; ruguiosus, ferrugineus, squamulis albidis, elevatione furcata a basi supra medium et elevationibus lateralibus difformibus glabris chrysopraseis; subtus obscure ferrugineus: squamulis candidis. Scutelluin triangulare, glabrum, chrysopraseum, linea pone basin transversa impressa aurea. Elytra, latitudine duplo longiora infra humeros paulo dilatata, transversim rugosa, ferruginea: lineis quinque subelevatis denudatis, et interstitiis linearum squamulis albidis indutis, lineis squamulosis tamen pone medium oblique denudato abruptis, margine suturaque chrysopraseis. Sternum obscure ferrugineum, lutescente hirtissimum. Abdomen obscure ferrugineum squamulis candidis tec-Pedes ferruginei, squamulis candidís et pilis rarioribus lutescentibus.

Obs. In memoriam Medici Regis Sveciae defuncti Di. Doctoris Carol. Fredr. Gröndahl, Historiae Naturalis eximii cultoris, sacra.

7.

M. Aphodiina, gibba, crebre punctata, atra: capite antice retropresso et clypeo porrecto. Fig. 7. a. (magnitudine aucta Fig. b.)

Hab. Indiae. Dr. Gröndahl.

Descr. Magnitudine M. Ruricolae, at statura propter corpus ejus gibbosius Aphodio fere simile. Caput marginatum, antice retropressum clypeo porrecto emarginato transverso, angulisque rotundatis; crebre punctatum, atrum; palpis antenn sque ferrugineis, clava triphylla testacea. Thorax longitudine plus duplo latior, gibbus, marginatus, glaber, ater. Scutellum triangulare, glabrum puncto uno alterove impresso. Elytra latitudine dimidio longiora, lateribus parum dilatata, convexa, lateribus et ad suturam punctatostriata; dorso striis duobus geminatis, punctato-striatis, interstitiis crebre punctatis; atra. Corpus subtus totum punctatum, glabrum, atrum. Pygidio tantum oculo armato pilis brevibus sparsis lutescentibus instructo. Pedes picei, tarsis vero pallidioribus.

* Vingulis aut omnibus simplicibus, aut certorum Parium apice bifidis aut dente armatis.

8.

M. Forströmi, glabía, castanea nitida; fronte impressa, -Py-gidio barbato. Fig. 8.

Hab: Brasiliae.

Descr. Statura et magnitudine M. antiquae (Synonymia Di. Schönherr T. I. pag. 3.) pag. 196. n°. 159, app. pag. 111, n°. 154.) a qua tamen characteribus indicatis bene distincta. Tota castanea, glabra, nitida. Caput marginatum, antice truncatum, lateribus sinuatis; punctatum: fronte impressa, linea transversa impressiore. Thorax longitudine fere duplo latior: angulis anterioribus prominentibus, sed posterioribus ut etiam lateribus rotundatis; oculo armato subtiliter punctatus: impressione ad utrumque angulum anteriorem parva. Scutellum triangulare, laeve. Elytra latitudine plus duplo longiora, marginata. Suria suturali et impressione parva sub humeris, rudimentisque oculo armato in dorso punctorum striatorum. Corpus subtus laeve: pygidio lutescente barbato pedibusque pilis sparsis castaneis.

Obs. Dr. Pastori Ecclesiae Forström, Scientiae Historiae Naturalis in Insula St. Barthelemy indefessa cura Scrutatori denominata.

9.

M. penicillata villosa, chrysoprasea: elytris clare ferrugineis, margine suturaque atro-viridibusque, tibiis tarsisque piceis.
 Fig. 9.

Hab. — extra Europam. Dr. Gröndahl.

Descr. Statura fere M. austriacae, at paulo major. Caput oblongum, clypeo exserto, apice emarginato margineque sursum versus-flexo; lateribus sinuatis; crebre punctatum, chrysopraseum, antrorsum infuscatum, subtus lutescente barbatum; antennis, clava oblonga palpisque ferrugincis, penicillo unius cujusque maxillae lutescente cujus stipes fuscus. Thorax subquadratus: angulis acutis lateribusque paulo rotundatis, antice paulo angustior, convexus profunde punctatus: angulis anterioribus depressis et lineis duabus ad basin transversis impressis; chrysoprascus, lutescente villosus. Scutellum triangulare, punetatum, medio laeve: linea basali impressa; chrysopraseum. Elytra latitudine thoracis, at fere duplo longiora, ad apicem haud angustiora, ab humeris longitudinaliter elevata profunde et irregulariter punctata; clare ferruginea margine exteriore suturaque atro - viridibus. Corpus subtus chrysoprascum squamulose et transversaliter striatum, lutescente pilosum: femoribus viridinitentibus, tibiis tarsisque piceis. .

10.

TRICHIDIÙS (mihi).

Aurantiacus pulverulente squamosus, supra aurantiacus, subtus pallide ochiaceus capite nigro pedibus ferrugineis. Fig. 10.

Hab. - - extra Europain. Dr. Grondahl.

Deser. Statura fere Trichii (Melofonthae Fabr.) Dentipedis a duplo majo, thorsee augustiore. Totus creberrime punctulatus,

capite excepto squamulis pulverulentis supra aurantiacis subtus pallide ochraceis-tectus. Caput oblongum, margine subreflexo, squamulis pilisque sparsis aurantiacis atrum. Thorax latitudine paulo longior antice posticeque truncatus, lateribus medio rotundatis pilis rarioribus aurantiacis. Scutellum subtriangulare. Elytra latitudine anteriore fere duplo longiora, versus apicem attenuata, humeris prominentibus, pilisque rarioribus aurantiacis. Corpus subtus glabrum: Pedibus feirugineis punctatis pilis sparsis ferrugineis.

Obs. Hoc-genus differt a Melolontha et Trichio cujum intermedium videtur, habitu, structura corporis femoribus validioribus maxilla multidentata, ungulis tarsorum, etiam posticis, bifidis. Huc pertinent Melol. (Fabr.) Dentipes, arthritica, podagrica, abbreviata, etc.

SCHEMA SYSTEMATIS INSECTORUM ELYTROPTERORUM SYNOPTICA ORDINIS PRIMI COLEOPTERA

Elytris crustaceis, sutura recta; Maxilla nuda, libera, palpigera.

Sectio I.

PENTAMERA, Tarsis omnibus quinque articulatis.

Legio I. Saprophagi, Palpis quatuor.

Phalanx 1. Antennis plus minusve clavatis.

Trib. 1. Lucanides, antennarum capitulo pectinato vel lateraliter fisso.

Divisio 1. Antennis non fractis: Genus: Passalus.

- 2. Antennis fractis: Genera: Lucanus, Platycorus, Lamprima, Aesalus.
- Trib. 2. Scarabacides, antennarum capitulo lamellato vel horizontaliter fisso.
 - Divis. 1. Antennis 11-articulatis: Gen. Lethrus, Scarabacus.
 - 2. Antennis 10-articulatis: Gen. Aegialia, Trox, Si-

- nodendrum, Oryctes, Geotrupes, Phileurus, Hexodum, Rutcla, Melolontha, Hoplia, Glaphyrus, Amphicoma, Anisomyx, Trichidius, Chrestomachilus, Pachypus, Trichius, Goliathus, Cetonia.
- Divis. 3. Antennis 9-articulatis: Gen. Aphodius, Onitis, Copris, Onthophagus, Ateuchus, Gymnopleurus.
- 4. Antennis 8-articulatis: Gen. Sisyphus.
- Trib. 3. Histerides, antennarum capitulo compresso subfoliato: Gen. Hister, Hololepta.
- 4. Sphaeridiides, antennarum capitulo compresso perfoliato:
 - Divis. 1. pedibus gressoriis; articulo tarsorum basali secundo non breviore: Gen. Sphaeridium.
 - 2. pedibus natatoriis; articulo tarsorum basali secundo breviore: Gen. Hydrous, Hydrophilus, Limnebius, Spercheus, Elophorus, Ochtebius, Ilydraena.
- 5. Sarrotriides, clava antennarum 8 articulata, Gen. Sarrotrium.
- 6. Gyrinides, clava antennarum multiarticulata: Gen. Heterocerus, Parnus, Gyrinus, Georissus.
- 7. Byrrhides, clava antennarum extrorsum crassiore: Gen. Nosodendrum, Chelonarium, Byrrhus, Scaphidium, Anthrenus, Troscus.
- 8. Ptinides, clava antennarum articulis 3-majoribus elongatis: Gen. Dorcatoma, Anobium, Riphidium, Ptilinus, Xyletinus, Ptinus, Gibbium.
- 9. Dermestides, clava antennarum oblonga: articulis approximatis: Gen. Megatoma, Attagenus, Dermestes, Byturus, Cryptophagus.
- 10. Silphaedes, clava antennarum ovata perfoliata: Gen. Engis, Triplex, Tritoma, Ips, Nitidula, Strongylus, Cercus, Catheretes, Colcebicus, Peltis, Necrophorus, Necropterus, Silpha, Catops, Agyrtes.

- Trib. 11. Scydmaenides, clava antennarum extrorsum crassiore, Gen. Mastigus, Scydmaenus.
- 12. Micropeplides, clava antennarum uniarticulata: Gen. Micropeplus.
- Phal. II. antennis extrorsum crassioribus vel filiformibus elytris dimidiatis.
 - Trib. 13. Staphylinides, corpore elongato: Gen. Astrapaeus, Staphylinus, Lathrobium, Paederus, Stenus, Evaesthaetus, Oxytelus, Oxyporus, Lomechusa, Aleochara, Tachinus, Tachyporus, Omalium, Proteinus, Anthophagus.
- Phal. 3. antennis moniliformibus vel filiformibus; elytris integris. Trib. 14. Cucujides, corpore valde depresso: Gen. Cucujus, Dendrophagus, Trogosita.
 - 15. Clerides, eorpore oblongo convexo: Gen. Trichodes, Clerus, Opilus, Tillus, Enoplium.
 - 16. Telephorides, corpore praesertim elytris molliusculis: Gen. Atractocerus, Lymexylon, Melyris, Zygia, Dusytes, Malachius, Malthinus, Telephorus, Lampyris, Omalisus, Lycus, Drilus, Cupes, Scirtes, Cyphon, Atopa, Cebrio.
 - 17. Elaterides, sterno resiliente, praesertim elytris duris, Gen. Phosphoreus, Elater.
 - 18. Buprestides, sterno non resiliente, corpore convexo, elytris duris: Gen. Cerophytum, Melasis, Trachys, Aphanisticus, Buprestis, Chloria, Sternoxus.

Leg. II. Entomophagi, Palpis sex.

- Trib. 1. Dytiscides, pedibus natatoriis: Gen. Dytiscus, Colymbetes. Laccophilus, Noterus, Hydroporus, Hyphydrus, Paelobius, Haliplus, Limnius.
 - 2. Carabides pedibus gressoriis; maxillis arcuatis inermibus: Gen. Scolytus, Cychrus, Procrustes, Carabus, Calosoma, Nebria, Leistus, Blethisa Loricera, Panagaeus, Agra,

Odacantha, Polystichus, Drypta, Gaterita, Zuphium, Cymidis, Demetrius, Lebia, Dromius, Risophilus, Lamprias, Aptinus, Brachinus, Graphipterus, Anthia, Badister, Synunchus, Lieinus, Trechus, Amara, Calathus, Zabrus, Oodes, Poecilus, Harpalus, Chlaenius, Stomis, Sphodrus, Pterostichus, Melops, Brosscus, Ditomus, Siagona, Scarites, Apotamus, Morion, Clivina, Dyscirius, Beubidiuus, Elaphrus, Notiophilus.

Trib. 3. Cicendelides, pedibus gressoriis: maxillis ungue apicali corneo armato: Gen. Picendela, Megacephala, Colliuris, Manticora.

Sectio II.

HETEROMERA tarsis 4 - anticis quinque articulatis, posticis quadriarticulatis.

Leg. I. Sympephycomeni, elytris connatis.

Phal. 1. mento parvo.

- Trib. 1. Scaurides, palpis filiformibus, Gen. Sepidium, Stenosis, Scaurus.
 - 2. Blapsides, palpis capitatis, Gen. Blaps, Misolampus.
- Phal. 2. mento lato.
 - Trib. 3. Pimeliaedes, antennis non capitatis: Gen. Eurychora, Akis, Tentyria, Moluris, Pimelia, Zophosis, Asida, Maehla, Platynotus.
 - 4. Erodiides, antennis capitatis: Gen. Erodius, Chiroscelis.
- Leg. II. Chorizomini, elytris separatis.
 - Trib. 1. Eledonaedes, antennis serratis: Gen. Cnodalum, Epithragus, Eledona.
 - 2. Diaperides, antennis extrorsum crassiovibus s. clavatis, Gen. Clypeaster, Cossyphus, Trachyscelis, Anisotoma, Tetra-.

- toma, Eustrophus, Diaperis, Phaleria, Toxicum, Hypophlaeus, Boros.
- Trib. 3. Tenebrionides, antennis moniliformibus, Gen. Bolitophagus, Pedinus, Opatrum, Tenebrio, Upis.
- 4. Helopides, antennis filiformibus plerumque apice moniliformibus, Gen. Helaea, Helops, Melandria, Allecula, Mycetophila, Conopalpus, Orchesia, Hallomenus, Dircaea, Serropalpus.
- Lagriaedes, antennis filiformibus; corpore convexo, Gen.
 Calopus, Dryops, Lagria, Nilio, Scraptia, Notoxus, Streopes,
 Anthicus.
- 6. Cistelaedes, antennis longioribus subsetaceis, Gen. Philodactyla? Oedemera, Stenostoma, Cistela.
- 7. Pyrochroaedes, antennis filiformibus corpore depresso: Gen. Pyrochroa, Pytho.
- 8. Meloides, antennis diversis, elytris dimidiatis; Gen. Meloë.
- 9. Cantharides, antennis subfiliformibus, Gen. Horia, Crisites, Oenas, Cantharis, Zonitis, Nemognatha, Apalus, Tetraonyx.
- 10. Mylabrides, antennis extrorsum sensim crassioribus, Gen. Mylabris, Cerocoma.
- 11. Mordellaedes, antennis apice paulo crassioribus, Gen. Ripiphorus, Pelecotoma. Mordella, Anaspis.
- 12. Salpingides, antennis extus crassioribus; ore rostrato, Gen. Salpingus.

Sectio III.

TETRAMERA tarsis omnibus quadriarticulatis.

- Leg. I. Rhyncophori, capite rostrato; ore apice Rostri.
 - Trib. 1. Bruchides, rostro lato, Gen. Rhinomacer, Platyrhinus, Anthribus, Bruchus.
 - 2. Attelabides, antennis rectis, Gen. Brachycerus, Ramphus, Apion, Rhynchites, Apoderus, Attelabus. Cylas, Brentus.

- Trib. 3. Curculionides antennis fractis:
 - Divis. 1. Antennis ad basin rostri insertis, Gen. Rhina, Callandra, Cossonus.
 - 2. antennis sub basi rostri insertis, Gen. Lixus, Rhynchaenus, Brachyrhinus, Curculio, Psallidium, Eurhin, Erythrinus, Cryptorynchus, Cionus, Orchestes.
- Trib. 4. Bostricides, capite exserto haud rostrato, Gen. Hylurgus, Bostricus, Platypus, Cryptogaster, Hylesinus, Phloiotribus.

Leg. II. Platyprosopi capite non rostrato.

- Trib. 1. Apatides clava antennarum perfoliata, aut serrata, Gen. Ligniperda, Apate, Psoa, Corynetes.
- 2. Pausides, clava antennarum solida vel apice globosa, Gen. Pausus, Cerapterus.
- 3. Cerylonides, antennis 10 articulatis clavatis, Gen. Cis,
 Nemosoma, Cerylon, Monotoma.
- 4. Mycetophagides, antennis 11-articulatis, extus crassioribus: Gen. Mycetophagus, Rizophagus, Lyctus. Ditoma.
- 5. Colydiides, antennis extrorsum crassioribus; Gen. Colydium, Latridius, Sylvanus, Meryx.
- 6. Cerambycides, antennis plerumque setaceis longis.
 - Divis. 1. tarsis subtus non spongiosis, Gen. Brontes, Parandra.
 - 2. tarsis subtus spongiosis, Gen. Spondylis, Passandra, Prionus, Acrocinus, Clenodes, Lamia, Dorcadium, Tetraops, Saperda, Gnoma, Trachyderes, Cerambyx, Stenochorus, Callidium, Clytus, Necydalis, Molorchus, Rhagium, Leptura.
- 7. Lemaedes, Iacinia maxillarum exteriore vix 2-articulata, Gen. Donacia, Lema, Sagra, Orsodacina. Megalopus.
- 8. Gallerucaedes, laciniis maxillatur subacqual bus, Gen. Crioceris, Adorium, Galleruca, Adaria de la lacina.

- Trib. 9. Cryptocephalides, lacinia maxillae externae majori, Gen. Eumolpus, Cryptocephalus, Chlytra, Chlamys.
- 10. Chrysomelaedes, lacinia maxillae externae latiori, Gen. Paropsis, Doryphora, Chrysomela, Helodes, Calaspis.
- 11. Hispaedes, corpore elongato; thorace quadrato, Gen. Hispa, Alurnus.
- 12. Cassidaedes, corpore elypaciforme; thorace semicirculare: Gen. Himatidium, Cassida.
- 13. Erotylides, maxillis ungue corneo instructis: Gen. Erotylus, Aegithus, Languria, Phalacrus, Agathidium.

Sectio IV.

TRIMERA, tarsis triarticulatis.

- Trib. 1. Coccinellaedes, antennis thorace brevioribus, Gen. Scymnus, Coccinella, Chilocorus.
 - 2. Endomychides, antennis thorace longioribus, Gen. Eumorphus, Endomychus, Lycoperdina.

Sectio V.

DIMERA, tarsis biarticulatis.

- Trib. 1. Pselaphides, antennis 11-articulatis, Gen. Chennium, Pselaphus.
 - 2. Clavigerides, antennis 6 articulatis, Gen. Claviger.

DE SUPERNUMERARIO SIVE ABDUCENTE ACCESSORIO

OCULI MUSCULO,

IN CADAVERE HOMINIS OBSERVATO.

AUCTORE

P. ZAGORSKI.

PANAGES.

Conventui exhibuit die 16 Dec. 1818.

Naturam humanam; circa corporum et partium haec constituentium formationem, non semper ad normam et regulas, a Summo Artifice sibi praescriptas componi, per plures observationes compertum habemus. In actis Societatum litterariarum et potissimum in operibus Anatomicorum innumerae pene prostant historiae casuum, ubi natura vel, ut specialiter dicam, ea naturae humanae facultas, quam nomine vis formativae insigniunt, ab archetypo primi creati hominis, quod stricte et exacte sequi deberet, diversimode deflexisset, lususque sui vestigia variis sub formis, tum per deformitates, plus minus notabiles, tum per alias qualescunque partium varietates, et similia id genus vitia, ostendisset.

Si ad tales normae et legum inobservantias, quas vis formativa interdum committere sibi permittit, attendamus, illas crebriores majorisque momenti in partibus vitae organicae, quam in organis vitae animalis hominis occurrere, facile perspiciemus. Sic in systemate circulatorio sive vasculoso, in quibusdam organis reproductionis et in partibus generationis, frequentes et insignes a statu normali aberrationes observatae sunt: in musculari autem et precipue in nervoso systematibus, quibus character vitae animalis exprimitur, nonnisi raras casque leves varietates contingere videmus.

Inter observationes tamen de varietatibus musculorum, nullibi reperio similem casum, qualis mihi anno praeterito in hominis adulti cadavere sese obtulit; cusum nempe supernumerarii s. abducentis accessorii bulbi oculi musculi, cujus descriptionem cum adnexa icone hic propono.

Musculus oculi supernumerarius ser abducens accessorius.

Priusquam descriptionem insucti hujus musculi faciam, haec esse praemittenda duxi.

Musculos quosdam corporis humani, maxime eos, qui in respirationis mechanismo partem habent, sat saepe variare, neminem Anatomicorum fugit. Tales sunt musculi: sterno-costales, levatores costarum longi et abdominis pyramidales, quorum priores defectu solo, reliqui et defectu et numero peccant persaepe. — Musculi etiam retrahentes auris, psoae minores et plantares sunt illi, qui solent aliquando variare, et quidem priores duo, numero, posteriores quatuor, vel defectu vel mutatione loci insertionis suac; id quod a me multoties, et aute me ab aliis jam pridem observatum, et in compendiis anatomicis notatum est. Variant quoque, sed rarissime, nonnulli alii musculi.

Ut autem musculi bulbi oculi, quorum numerus constanter senarius est, et speciatim recti, defectu vel excessu variarent, nec mihi, per sex circiter lustra Anatomiam colenti, praeter hunc unicum casum, nec aliis de Anatomia humana meritissimis viris, saltem quorum opera legebam, unquam observasse licuit. Quod musculos obliquos organi visus spectat, praeter paucos Anatomicos, Celeberrimus Albinus in sua Historia Musculorum hominis facit mentionem cujusdam musculi gracillimi, obliqui superioris sev trochlearis comitis, quem tamen clarissimus Zinnius, qui accuratissimam oculi omniumque ejus partium descriptionem nobis reliquit, nunquam se vidisce asserit.

Hac nota praemissa, ad descriptionem supernumerarii musculi, a me observati accedo.

Peculiarem lacertum carneum, sat robustum, qui huic observationi ansam dedit, musculum supernumerarium oculi rectum appello ob rationes sequentes: 1) quia, praeter solitum organi visus musculorum numerum, aderat; 2) quia progressum, directionem et insertionem similes rectorum musculorum oculi habebat; 3) quia originem cum rectis, abducente, deprimente et adducente communem a ligamento communi Zinnii ducebat.

Non erat hic musculus aliuscujusque illorum musculorum fasciculus separatus, ut cum nonnullis musculis accidere interdum solet, sed plane lacertus peculiaris et distinctus, qui, ex angulo originis communis abducentis musculi et deprimentis ortus, pergebat inter hos musculos in regione externa et inferiore orbitae versus bulbum, ita tamen, ut tam in toto tractu suo, quam in loco suae in selerotica insertionis, propior abducenti quam deprimenti musculo esset.

Ex hoc situ et ex longitudine, aequipari longitudini musculi abducentis, qui, ut notum est, omnium rectorum brevissimus sed crassissimus habetur, non improbabilis conclusio deduci potest, quod supernumerarius iste musculus non deprimenti, sed abducenti suppetias suas in agendo praebebat; et hanc ob rem abducens accessiorius dici meretur.

Quoad robur et crassitiem fibrarum, accessorius hie musculus abducenti ordinario multum, deprimenti vero et aliis reetis oculi musculis vix quidquam cedebat: ab omnibus tamen in eo differebat, quod non, more illorum, tendine dilatato, sed angustato et quasi rotundiusculo in sclerotica desinebat, uti in figura expressum est.

Explicatio tabulae.

Figura sistit partem mediam et anteriorem bascos cranii cum orbita dextra, cujus paries superior ablatus est, ut oculus in ipsa

jacens cum musculis suis, superficiesque externa palpebrae superioris cum musculo ejus elevatore conspiciantur.

- 1) Portio media partis orbitalis ossis frontis cum osse ethmoideo, cujus crista galli justo major in hoc subjecto erat.
- 2) Processus orbitalis externus ossis frontis.
- 3) Portio ossis basiliaris cum abscissis nervis opticis, sua foraminina intrantibus.
- (4) Musculus elevator palpebrae superioris.
- 5) Musculus attollens bulbi oculi, elevatori palpebrae subjacens.
- 6) Musculus trochlearis.
- 7) Musculus adducens.
- 8) Nervus opticus.
- 9) Musculi obliqui inferioris insertio.
- 10) Musculus abducens.
- 11) Musculus deprimens.
- 12) Musculus abducens accessorius.



URSUS BRASILIENSIS,

NOVA QUAEDAM SPECIES, DESCRIPTA ET DELINEATA

A

C. P. THUNBERG.

Conventui exhibuit die 11 Aug. 1819.

Tab. XIII. Contendunt nonnulli Auctores Zoologi, dividi deberi Ursi genus in duo distincta genera, scilicet Ursi et Melis. Nota, quam ut characterem hujus divisionis assumserunt, adeo tamen est exigua, nimirum foramen illud excretorium, quod aeque in Mele ac in Hyaeina inter anum et genitalia observatur, ut in ambobus his generibus, numquam speciebus nimium multis instructis, non mereatur,

Ad Ursi Genus, ob rationes allatas, et ut spero, rectius retuli novam hanc Speciem, quae e Brasilia Americes meridionalis oriunda mecum fuit benevole communicata. E minoribns inter Congeneres est, et ab antea notis speciebus, tam Europaeis, quam Americanis satis sufficienterque diversa et distincta, nec inamoena species.

ad quam hoc respectu adtendatur, imprimis quod et Meles et Ursus externo habitu aeque ac vivendi ratione omnino conveniant.

E loco natali et patria ejus hanc novam speciem Ursi apellavi brasiliensem, cujus Iconem cum Descriptione heic adjungere volui, ut animalculum e Classe Mammalium, Curiosis Zoologiae Studiosis innotesceret, nec amplius, ut huc usque, obscurum et omnino ignotum in sylvis felicioris Orbis nostri regionis, sibi ipsi relictum delitesceret. Longitudine Catum domesticum adaequat circumferentia angustiori.

Caput antice et circum oculos nigrum, supra cinereum, gula colloque subtus nigris.

Nasus paulo productus, parum prominens, supra planiusculus.

Vibrissae labii inferioris et menti exstantes, atrae.

Dentes primores 6, excavati, aequales, ut in Urso.

canini multo majores: superiores extus sulco exarati; inferiores adhuc majores: omnes conici, basi crassi, apice acuti, curvi.

molares 4, usque 5, trilobi, postici sensim majores.

Auriculae rotundatae, cinereo - pilosae.

Collium supra, dorsum totum, latera et cauda grisea seu cana e pilis atris apice albis.

Pectus et pedes omnes nigri pilis raris intersparsis albidis.

Abdomen minus nigrum videtur, itidem pilis pluribus albis intersparsis.

Cauda longitudine pedum, corpore quadruplo brevior, teres, pilosa, parum attenuata, fusco - grisea.

Palmae et plantae pentadactylae, fissae: unguibus curvis, acutis, cincreis.

Corporis longitudo a naso ad caudae basin 20 pollices circiter.

caudae circiter 5 pollices; pedum 4.

Character specificus sequens esto: cauda fusco-grisea, longitudine pedum; fronte dorsoque cincreis; naso, collo, pedibus abdomineque nigris.

Licet proxime facie sua ad Viverras accedat, cum iis tamen conjungi non potest, ob dentes primores aequales, intermediis minime brevioribus ut in Viverris; ob dentes omnes, imprimis caninos et quoque ungues validiores.

Nisi omnia me fallunt, ad *Ursi* genus referri debent plures in Systemate *Linnaeano* ad Viverras relatae species, nominatim Viverra tetradactyla, Nasua, Narica, vulpecula, qvasje et mellivora.

Singulare etiam est, quod in hac specie observatur, nimirum quod partes corporis inferiores longe obscuriores et nigro tinctae sint, quam quidem superiores. Circumstantia haec obvenit, imprimis apud illa Mammalia, quae antra sibi effodiunt subterranea, in quibus sub dio tranquilla et secura quiescunt, noctu pastum quaesitura excuntia et circumvagantia.

De cetero ex Animalculi hujus Economia et vivendi ratione nihil innotuit.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES, FAITES A ST. PÉTERSBOURG ANNÉE MDCCCVIII,

D'APRÈS LE NOUVEAU STYLE,

PAR

B. PETROW.

Présenté à la Conférence le 23 Oct. 1816.

I. BAROMÈTRE.

Hauteurs extrêmes, variation, milieu arithmétique, hauteur moyenne et nombre des jours, anxquels la hauteur du barometre a été au-dessus de 23 pouces de Paris.

NB. m. signifie matin ou avant midi, apr. m. après midi et s. soir ou après midi.

	Hau	teurs	varia_	milieu arith_ hauteur		hauteur
Mois	les plus grandes	les plus petites	tions	métique	moyenne	de 25 pouces
	pouces jours	pouces jours		pouces		
Janv.	28 18 le 6 et 17 .	27,27 le 12. m.	1,21	2-,87	28,02	18
Févr.	28,54 le 22 ct 29 ipr. m	. 27,10 le 7 s. et 8 m.	1,44	27,32	28,00	19
	29,23 le 2 m.		1,65	28,40	28,50	27
	28,50 le 21 m.			27,79	27,965	18
	28,54 le 11, 12 et 13 m		0,66	28,0ർ	28,215	20
	28,35 le 6 et 22 m.		0,62	28,04	28,10	19
	28.37 le 24 m. et apr. m		0,70	28,02	°8,14	27
	28.40 le 31 apr. m.	27,80 le 6 m.	0,00	28,10	28,105	26
	28,671 19 m.		1,13	28, 10	28,083	19
	28,65 le30 m. stapr. m		1,30	28,00	28,30	30
	28, 5 le 4 m.	27,54 le 13 apr. m.	1,21	28, 14	28,062	- 18
Déc	29,04 le 27 s.	27,10 le 7 apr. m.	1,94	28 07	28,23	25
Λ .	29,24 1- 26 Mars	27,08 le 7 Avril	2,1	28,155	28 143	272
TI.	29,23 L 27 Mars	27,08 le 7 Avril	2,15	28, 155	23,061	116
E.	28,67 le 19 Sept.	27,35 le 1 Octobre	1,32	38,010	28,157	147

- A. marque l'intervalle de toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1808, comprenant les 366 jours de l'année.
- H. marque l'intervalle de 6 mois d'hiver depuis le 1 Novembre 1807 jusqu'au 1 Mai 1808, comprenant 182 jours.
- E. marque l'intervalle de 6 mois d'été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1808, comprenant 184 jours.

Le tableau précédent indique, que la variation du baromètre a été la plus grande (de 1,94 pouce) en Décembre, et la plus petite (de 0,60 pouce) au mois d'Août; que la hauteur moyenne se trouve être la plus grande (de 28,50 pouces) en Mars, et la plus petite (de 27,965 pouces) au mois d'Avril.

II. THERMOMÈTRE DE Mr. DÉLISLE.

1) Températures extrêmes de l'atmosphère avec leurs différences, milieu arithmétique, et températures moyennes pendant les matins et les soirs, à midi ou bientôt après midi et pour chaque mois entier de l'année 1808.

		Températur	es extré	mes	1	1	Températures moyennes,
Mois	les plus basses				leurs diffé- rences	leur milieu arithmé_ tique	pendant à midi pour
	degres	jours	degrés	degrés jours de		degres	degrés degrés degrés
Janv.	170,6	le 14 m.	148,1	le 5 apr.m.et 24 m.	22,5	159,35	157,70 155,60 157,00
Févr.		le 26 m.	148	le 21 apr. m.	44	170	166,19 163,47 16-,29
Mars	190	le 16 m.	143	le 19 apr. m.	47		168,06 155,09 163,74
Λ vril	185	le 2 m.	127,5		57,5		155,91 144,89 152,24
Mai	153,	le 1 et 12 m.	123	le 8 apr. m.	30	1 '	144,20 132,50 140,30
Juin	146,2	le 13 m. et s.	105	le 27 apr. m.	41,2	125,60	131,00 120,06 127,35
Juill.	136	le 12m., 16et 28s.		le 8 apr. m.	30	121,0	128,01,117,14 124,39
Aoùt	140,6	le 29 m.	08,8	le 4 apr. m.	31,8		130,12 121,25 127,16
Sept.	151:	le 16 m.	1.15	le i et 3 apr. m.	36		134,59 126,23 131,81
Oct.	1	le 7 m.	131,3		22,7	142,65	140,23,137,09 139,48
Nov.		le 30 m.	144	le 1 et 2 apr.m.	31	159,50	153,80 151,82 153,14
Déc.	188	le 28 m.	157	le 24 apr. m.	31_		170,51 166,90 169,31
Α.	192	le 26 Février	105	le 27 Juin	87		148,36 141,08 145,93
H.	192	le 26 Février	127,5	lc 24 Avril	64,5		159,34 154,54 158,40
E	154	le 7 Octobre	105	le 97 Juin	49	129,50	134,69 125,86 131,75

D'après ce tableau on voit: 1) que le plus grand froid (de 192 degrés) a été le 26 Février à 6 heures du matin; 2) que la plus grande chaleur (de 105 degrés) est arrivée le 27 Juin après midi; 3) que la plus grande différence entre la plus basse et la plus haute températures de l'atmosphère fut (de 57,5 degrés) en Avril, et la plus petite (de 22,5 degrés) en Janvier; 4) que la température moyenne, pendant les matins et les soirs, se trouve être la plus basse (de 170,51 degrés) en Décembre, et la plus haute (de 128,01 degrés) en Juillet; 5) qu'à midi ou bientôt après midi la température moyenne la plus basse (de 166,90 degrés) a été en Décembre, et la plus haute (de 117,14 degrés) en Juillet.

2) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs et à midi ou bientôt après midi, pour chaque mois, au-dessous et au-dessus de quelques divisions principales du thermomètre.

						A midi ou bientôt après midi la température a été plus						
	la température à été plus basse que					la t		ature a iute qi		plus		
Mois						150	50 140 130 120 110					
			<u> </u>						jours			
anvier	Jours	<u>, journ</u>	1	14	30		10.11.0	Joan	1			
Février	1	5	12	22	29	3						
Mars		6	17	30	31	4 3 8						
Avril	ł	1	6	9	25	22	11	2	}			
Mai		ĺ			7	31	28	11				
luin			i	1	'	30	2 9	24	17	4		
Juillet			1	}	l	31	31	31	19	5		
Août			ŀ	ŀ		3 r	31	29	13	1		
Septembre	-		l		r	30	3o	24	4			
Octobre					5	31	22					
Novembre			3.	5	22	15		}				
Décembre	İ	8	18	31	31		1					
Α.	1	90	57	111	181	236	182	121	53	10		
Н.	1	14	41	88	161	63	1.1	2				
E.			_		13	184	1171	119	└ 5 3	10		

Il a commencé à geler le 24 Septembre 1807, c'est-à-dire moore avant le commencement de l'intervalle H., et il a gelé pour la dernière fois le 12 Mai 1808, après un intervalle de 232 jours. En A., et notamment en E., il a recommencé à geler le 16 Septembre 1808, après un intervalle de 126 jours.

Il a gelé, pendant les matins et les soirs, en A. 181 jours, en II. 161 jours, et en E. 13 jours; il n'a pas gelé, à midi ou bientôt après midi, et la plupart pendant les vingt-quatre heures et des mois entiers sans interruption, en A. 236 jours, en H. 63 jours, et en E. 184 jours.

La rivière Newa, après avoir été couverte de glaces du 11 au 12 de Décembre 1807, débâcla le 25 d'Avril après midi 1808, conséquemment après un intérvalle de 136 jours. Du 28 au 29 Novembre 1808, elle se couvrit de nouvelles glaces, ayant été ouverte pendant 217 jours.

III. VENT.

Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1808.

		La fo	orce des	s vents	Rapport de la direction des vents					
Mois	calme	vent fai- ble et médiocre	fort	vent très- fort et violent	Nord	Est	Sud	Quest		
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours		
Janvier	2	17	6	6	3	4	14	8		
Février	4	15	6	4	6	6	8	5		
Mars	15	12	1	3	5	3	2	6		
Avril	3	15	8	4	4	8 6	9	6		
Mai	6	16	5	4		6	4	8		
Juin	7	16	6	1	7 5	8	6	4		
Juillet	7 3	14	12	2	9 5	6	6	7		
Λ oùt	7	17	6	1	5	6	7	6		
Septembre		20	6	3	7	3	7	10		
Octobre	2	15	8	_6 5	2	6	17	4		
Novembre	1	17	7	5	6	6	9	8		
Décembre	7	18	4	2	2	9	12	1		
Λ.	58	192	75	41	61	73	101	73		
11.	28	84	39	31	28	28	55	43		
Ε.	26	98	43	- 17	35	37	47	49		

Les mois de Janvier, de Février, d'Avril, de Juillet, d'Octobre et de Novembre ont été les plus venteux; ceux de Mars, de Juin, d'Août et de Décembre les plus calmes. L'hiver (H.) a été presque aussi calme que l'été (E.), qui l'a suivi dans le rapport de 26:28 ou 13:14.

Le vent dominant était dans l'année celui du Sud.

	, .		•
TT7	T ITTO A PY	TOT	L'ATMOSPHERE.
I V	LAPIAL	4.) 11.	I. AT MILISPHERE.
	A 4 A 1 A 1 A 1 A 1 A 1 A 1 A 1 A 1 A 1	1/1/	

	Cicl		brouil		l'arc.	tonnerre	.51	gelée		para-	l'auro r e	
Mois	serein	nnages	couvert	lard	pluie	en-ciel	et éclaire	grèle	blanche	neige	selenes	bordale
	jours	jours	jears	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	2	11	18	5						14	2	ĺ
Févr.	4	16	9	7		ļ			1	9 +	ι	
Mars	12	16	$\begin{vmatrix} 9 \\ 3 \end{vmatrix}$	13		j		1		6	3	
Avril	2	22	6	5	3					12		
Mai	9	13	9	9	8			1	3			
Juin	2	27	1	9	11	2	4			1		
Juill.	5	23	3	12	11	2	4 5 5					1
Août	1	23	7	12	19		5	1				ł
Sept.	4	24	2	11	10	2	2				1	
Oct.	1	19	11	13	10		i		2 3		2	
Nov.	2	15	13.	4	2				3	15	3	
Déc.	4	10	17	11			_			18	3	
Α.	48	219	99	110	74	6	16	3	9	75	15	1
H.	21	80	81	41	13			1	2	5 9	9	
E.	22	129	33	65	69	6	16	2	5	1	3	1

On voit par l'inspection de cette table: 1) que le nombre des jours entièrement sereins a été le plus grand en Mars et en Mai; 2) que dans les mois de Janvier, Avril, Juin et Novembre on a compté deux jours sereins, et dans le mois d'Août ainsi qu'en Octobre un seul jour serein; 3) qu'il y en avait en hiver (II.) presqu'autant qu'en été (E.).

Cette annee-ci il neigea pour la dernière fois du 13 au 14 de Juin, et pour la première fois du 2 au 3 de Novembre, après un intervalle de 142 jours.

Il tonna pour la première fois le 8 de Juin à 2 heures après minuit, et pour la dernière fois le 11 Septembre à 3 heures après midi.

Cette année-ci, ainsi que l'année passée, je n'ai pu remarquer qu'une seule aurore boréale du 23 au 24 du mois de Juillet.

Le 29 Décembre vers les 3 heures après midi il m'est arrivé d'observer deux couronnes, ou, pour parler plus proprement, deux colonnes verticales autour du soleil. Les couleurs de ces deux colonnes ont été à peu près celles de l'arc en ciel.

SECTION

DES
SCIENCES POLITIQUES.



DE L'EMPLOI DU CRÉDIT POUR SUBVENIR AUX BESOINS DU GOUVERNEMENT DANS LES ÉTATS MODERNES ET PARTICULIÈREMENT EN RUSSIE.

PAR

H. S.TORCH.

Présenté à la Conférence le 8. Juillet 1818.

Dans la situation où se trouvent les puissances de l'Europe, se revenu annuel de chacune d'elles sussit tout au plus pour les dépenses publiques en tems de paix; c'est déjà l'esset d'une administration sage et bien ordonnée quand il y sussit: mais aucun État, quelque bien gouverné qu'il soit, ne peut soutenir la guerre la plus courte et la moins onéreuse avec ses revenus ordinaires. Il lui faut donc, pour ce cas, des ressources d'un autre genre.

Les moyens qu'on a imaginés et tentés jusqu'ici, peuvent se comprendre sous les six chess suivans:

- 1°. L'établissement d'impôts extraordinaires pendant la durée de la guerre;
- 2°. L'accumulation d'un trésor en tems de paix;
- 3°. La fonte de la vaisselle;
- 4°. Les subsides des puissances alliées;
- 5°. La création d'un papier-monnaie;
- 6°. Ensin l'emploi du crédit.

L'établissement d'impôts extraordinaires pendant la guerre est une mesure évidemment insuffisante. Souvent la dépense d'une seule campagne équivaut au revenu annuel de l'État: or quel est le peuple qui pourrait supporter le doublement subit de ses impositions?

L'accumulation d'un trésor en tems de paix a été souvent pratiquée par les gouvernemens de l'antiquité; mais cette mesure est devenue également insuffisante dans nos tems modernes et depuis que l'invention des armes à feu a rendu la guerre infiniment plus dispendieuse. Les Rois de Prusse avaient autrefois pour principe d'amasser un trésor pour subvenir aux fraix de la guerre; cependant l'expédition de Fréderic - Guillaume contre la France révolutionnaire en 1792 a bien prouvé qu'un trésor, même considérable, ne suffit point pour soutenir une guerre tant soit peu prolongée. D'ailleurs cette mesure a l'inconvénient d'enfouir, longtems avant qu'on en ait besoin, des valeurs qui auraient pu contribuer à enrichir la nation si elles fussent restées dans la circulation.

La fonte de la vaisselle est une ressource bien plus pauvre encore, comme l'expérience l'a démontré en plusieurs occasions, par exemple en France, sous Louis XIV, pendant la guerre de la succession d'Espagne, et dans le commencement de la guerre occasionnée par la révolution. À cette dernière époque, toute la somme provenue de la vente des vases sacrés et des autres ornemens des églises dans ce pays si grand et si riche ne s'éleva pas au-delà de 45 millions de francs, ou de 11 \frac{1}{4} millions de roubles d'argent; somme qui pouvait à peine suffire pour continuer la guerre pendant deux mois (\frac{1}{2}). Le montant de la vaisselle que les parti-

Des finances de la République Française en l'an IX, par Ramel, ministre des finances, pay, 36.

culiers offrirent à cette occasion, doit avoir été encore plus modique, puisque Mr. Ramel n'en fait aucune mention dans son rapport.

Les subsides des puissances alliées sont quelquesois d'un grand secours pour supporter les fraix d'une guerre; mais cet expédient suppose des circonstances qui ne se rencontrent que rarement. Il faut d'abord qu'on ait des alliés; ensuite que ces alliés soient disposés à faire de pareils sacrifices pour la cause commune; ensin qu'ils soient assez riches pour les faire. Et lors même que toutes ces conditions se trouvent remplies, la dépendance dans laquelle la puissance salariée se met à l'égard de celle qui la paye, a presque toujours des suites sacheuses pour la première et nuit le plus souvent aux operations de la guerre. D'ailleurs une guerre ne peut jamais être faite avec les seuls subsides qu'on recoit; la nation en porte toujours le principal sardeau.

La création d'un papier-monnaie est à la vérité une ressource prompte, facile et commode, mais sous ces apparences trompeuses elle cache des fruits amers. La quantité de numeraire dont une nation a besoin pour sa circulation, est déterminée de la manière la plus rigoureuse, par la valeur de ses achats et de ses ventes, et par la vitesse que le numéraire met à circuler: une nation ne peut guère posséder ni plus ni moins de numéraire que ce que ces deux rapports exigent. Si elle n'a d'antre numéraire que de l'or et de l'argent, et qu'une circonstance extraordinaire lui en enlève une partie, le déficit est sur le champ réimporté des pays étrangers; car dans ce cas l'argent de ient cher chez elle et ses marchandises baissent de prix, de sorte que tous ses voisins trouvent leur profit à lui envoyer de l'argent et à tirer d'elle des marchandises. De même lorsqu'une circonstance extraordinaire lui amène plus d'argent que sa circulation n'en exige, le surplus est sur le . champ réexporté; car dans ce cas l'argent baisse de prix chez elle, et ses marchandises renchérissent, de sorte que ses marchands

trouvent leur profit à importer des marchandises étrangères qui sont à bas prix, et à les payer avec de l'argent qui vaut moins chez eux que chez l'étranger. Ainsi quand une nation n'a d'autre numéraire que les monnaies d'or et d'argent, elle en a toujours la quantité qu'il lui faut, ni plus ni moins.

C'est bien autre chose quand le gouvernement crée un papier-monnaie. Celui-ci n'a point de valeur hors des limites du pays; ainsi quand on en met trop en circulation, le surplus ne peut s'exporter nulle - part, et la masse entière du papier reste dépréciée, à moins que le gouvernement ne retire l'excédent de la circulation pour l'anéantir. Mais autant qu'il est aisé de multiplier le papier-monnaie, autant îl y a de difficultés pour le restreindre. À mesure que le papier baisse, les prix du travail et de toutes les marchandises haussent: en conséquence, lors même que le gouvernement augmente les impôts, son revenu n'en est augmenté que nominalement, et il est aussi peu en état qu'auparavant de racheter le papier. Celui-ci reste donc déprécié; et sa valeur incertaine flotte au gré des opinions populaires et des manœuvres des agioteurs. Or cet état des choses est une des plus grandes calamités qui puissent frapper une nation. Comme le numéraire est la mesure du prix de toutes les choses, comme on s'en sert pour exprimer la valeur de toutes les transactions pécuniaires, il n'y a personne qui ne souffre plus ou moins quand sa valeur devient incertaine. Le développement de ces vérités me conduirait ici trop loin; ceux de mes lecteurs qui seraient curieux de connaître toute l'étendue des maux que produit un papier-monnaie déprécié et variable, me permettront de les renvoyer à mon Cours d'Économie politique. Ce que je viens de dire sussit pour prouver que l'émission d'un papier-monnaie est une ressource plus praticable à la vérité que les précédentes pour subvenir aux fraix d'une guerre, mais aussi bien plus ruineuse lorsqu'on n'en use pas avec la plus grande circonspection.

Chez une nation qui n'a d'autre numéraire que des espèces métalliques, la création d'un papier - monnaie pour faire face aux dépenses extraordinaires et instantanées d'une guerre, peut se justifier aux yeux d'une saine politique, pourvu que le gouvernement s'empresse de racheter son papier aussi-tôt après la guerre. L'effet qui résultera de cette mesure, dans des circonstances pareilles, sera d'expulser de la circulation autant de monnaie métallique qu'il y est entré de papier; et d'y faire ensuite revenir la première, à me-sure que le papier est retiré de la circulation. C'est en agissant avec ces précautions, que le gouvernement de Prusse a trouvé deux. fois dans un court espace de tems une ressource précieuse dans la création d'un papier - monnaie. Mais si, au lieu de racheter le papier pendant la paix, on le laisse subsister, et qu'en entreprenant de nouvelles guerres on l'augmente au point de chasser du pays toute monnaie métallique ou à - peu - près, cette opération devient déjà très - nuisible, et cela sous deux rapports: 1°. le gouvernement se prive pour l'avenir de ce moyen, et 2°. il expose son papier à se déprécier; car du moment que le papier reste seul dans la circulation, sa valeur devient variable, et le public, effrayé de la disparition des espèces, commence à s'en défier. Enfin si le gouvernement persiste à suivre ce système, lors même qu'il n'y a que du papier dans la circulation, la baisse du papier devient progressive, et c'est alors qu'il entraîne les suites pernicieuses qui le rendent un fléau également terrible pour les peuples et pour les gouvernemens.

Reste à considérer la sixième ressource, les emprunts. Ceuxci peuvent se faire de différentes manières et avec plus ou moins de facilités pour la nation et le gouvernement: il convient donc de caractériser ceux qui présentent le plus d'avantages.

Les emprunts publics peuvent se faire dans l'intérieur du pays et dans l'étranger. Pour un pays dont l'industrie est encore

à se développer, il est avantageux d'admettre les étrangers dans les emprunts, afin de ne pas retirer trop de capitaux à l'industrie domestique; d'ailleurs par ce moyen le gouvernement pourra se procurer des fonds à moins de fraix, car parmi les nations étrangères ce ne seront que les plus riches qui lui prêteront; et plus une nations est riche, plus l'intérêt est bas chez elle.

Un gouvernement qui emprunte peut convenir avec ses prêteurs d'un terme à l'échéance duquel il les payera; il peut aussi emprunter sans fixer de terme pour le remboursement : or cette dernière méthode est plus avantageuse pour le gouvernement, parcé qu'elle lui laisse la faculté de se libérer de ses dettes quand il en a les moyens. Dans les emprunts sans terme l'intérêt ou la rente s'appelle une rente perpétuelle. Le capitaliste qui prête ses fonds. à cette condition n'est cependant pas privé par là de la faculté de les retirer à volonté; car les titres de sa créance étant transmissibles, il peut les vendre. D'un autre côté, un gouvernement qui emprunte sans terme n'a pas l'intention de rester éternellement débiteur: au contraire, s'il entend bien ses affaires, il affecte, outre la somme annuelle nécessaire pour acquitter l'intérêt, une autre somme proportionnée pour racheter chaque année une portion de ses engagemens, afin de diminuer sa dette. Ainsi les créanciers de l'État qui veulent vendre leurs titres, trouvent toujours un capitaliste prèt à les acheter, savoir le gouvernement lui - mème, ce qui maintient' leur prix.

C'est cette somme annuelle affectée au rachat d'une dette publique qu'on nomme son fonds d'amortissement. Pour accélérer l'extinction de la dette, on y ajoute encore les arrérages des rentes dont il a déjà racheté les titres. Par ce moyen une dette, par exemple, qui porte une rente perpétuelle de 6 pour cent, et dont le fonds d'amortissement est de 2 pour cent, peut être entièrement éteinte au bout de 24 années. C'est à l'institution d'un

parcil fonds d'amortissement qu'il faut surtout attribuer le crédit si longtems soutenu du gouvernement d'Angleterre, qui, malgré sa dette immense, trouve encore des prêteurs qui lui confient leurs capitaux, aux mêmes conditions qu'on prêterait à un bon débiteur ou à un gouvernement non obéré.

On voit que le grand avantage qui résulte pour un État de la faculté d'emprunter, c'est de trouver promptement les secours extraordinaires que réclament les besoins du moment, et d'en répartir les charges sur un grand nombre d'années. Quant aux inconvéniens des emprunts publics, on ne leur connaît que deux: celui de retirer les capitaux des usages productifs; et celui de faire monter l'intérêt. Mais si le gouvernement a besoin de fonds pour la défense du pays (et c'est le cas que nous supposons toujours) il ne s'agit pas d'éviter tous les inconvéniens, mais de choisir le moyen qui en présente le moins. Or comme ce sont les emprunts, nous pouvons établir en principe qu'ils sont le seul moyen recommendable pour faire face aux dépenses extraordinaires qu'exige la défense du pays. Au reste ce principe est reconnu et pratiqué par tous les gouvernemens éclairés; et si plusieurs d'entre eux ont pu soutenir des guerres qui semblaient surpasser leurs moyens, c'est à l'application de ce principe qu'il faut surtout attribuer cet effet. Il est vrai que le crédit public, cet excellent moyen de défense, est encore souvent devenu un moyen d'attaque, et qu'il a multiplié et prolongé les guerres: mais où est l'invent'on utile dont les hommes n'ayent pas abusé? Dans l'état actuel des choses, aucun gouvernement ne peut se passer de crédit. sans se trouver dans une infériorité manifeste à l'égard de ceux qui s'en servent. C'est comme si on vouloit rejeter une nouvelle arme que les autres emploient avec succes.

Mais l'emprunt n'est pas seulement la ressource la plus recommandable pour subvenir aux dépenses de la guerre; c'est en-

core le meilleur moyen pour tirer un État des embarras où ses finances peuvent se trouver à la suite de guerres qu'on a soutenues sans faire des emprunts. Un gouvernement, par exemple, qui, pour faire face aux dépenses de la guerre, aurait augmenté son papier - monnaie au point de le déprécier fortement, ne trouverait pas de moyen plus expéditif et moins onéreux pour en diminuer la masse. et par conséquent pour en relever la valeur, que d'ouvrir un emprunt et d'anéantir tout le papier qui lui rentrerait par cette voic. Sans doute que l'exécution de cette mesure le met dans la nécessité de payer un intérêt et d'assigner un fonds pour l'amortissement du capital; mais lors même qu'il serait forcé d'imposer pour cet effet le peuple, le surplus de charges qui en résulterait pour celuici, ne serait rien en comparaison de l'immense avantage que lui procurerait la hausse de son papier et la stabilité que sa valeur attendrait quand l'opération serait achevée. Mais dans un pays dont la population, l'industrie et la richesse vont toujours en augmentant, et où par conséquent les impôts subsistans rendent davantage d'année en année, sans qu'on ait besoin de les hausser ou de les multiplier; dans un tel pays, dis - je, le gouvernement, s'il est économe et bien - intentionné, trouvera peut - être moyen d'épargner au peuple de nouveaux saerifices pour cet objet; la simple réduction de ses dépenses le mettra peut-ètre en état d'assigner un fonds annuel suffisant pour payer et l'intérêt des sommes empruntées et la portion du capital qui doit les amortir successivement. Dans ce cas, l'opération joindrait au caractère d'utilité publique qu'elle porte toujours, celui d'une biensaisance paternelle qui la rendrait doublement précieuse.

Telle est la mesure qui vient d'être ordonnée en Russie par le Maniseste du 16 avril 1817. Régler les dettes de l'Empire, leur affecter à tous un intérêt proportionné au taux usuel; assurer le payement exact de cet intérêt; créer un fonds d'amortissement pour leur extinction succéssive; rétablir la valeur des assignats en

réduisant leur masse; fonder par toutes ces mesures un système de crédit public qui, dans le cas d'une guerre future, ne force plus le gouvernement de recourir à l'augmentation de son papier-monnaie; enfin consommer toutes ces opérations importantes sans augmenter les charges du peuple: voilà le plan que le gouvernement s'est tracé et qu'il a fait connaître par ledit Manifeste et le Réglement qui y est joint. Un but si utile, des moyens si bien choisis, des efforts si généreux, commandent la reconnaissance; mais ce sentiment ne doit point rester stérile: il faut que la confiance du public vienne au devant des mesures salutaires du gouvernement; et pour que cette confiance naisse, pour qu'elle se soutienne, il importe d'approfondir ces mesures.

Avant de caractériser plus amplement l'opération dont il s'agit, il est nécessaire dr donner une idée de la masse et de la nature des dettes dont le réglement et l'extinction successive doivent
s'opérer par son moyen. Les données que je vais fournir à cet
égard, ne sont que très - imparfaitement connucs; mais le public
peut s'y fier, car elles sont puisées dans les bonnes sources.

Toutes les dettes de l'Empire, de quelque nature qu'elles soient, peuvent se classer sous deux divisions: les dettes portant intérêt ou devant en porter, et les assignats.

Les dettes portant ou devant porter intérêt se subdivisent en trois espèces:

1°. La dette extérieure, contractée en Hollande sous les règnes précédens. Elle vient d'être réglée définitivement par la Convention du 3 mai 1815. Son montant est de cinquante millions de florins de Hollande, et elle s'éteindra successivement dans l'espace de cent-quatre apnées.

- 2°. Les dettes intérieures à terme. Elles comprennent: a) l'emprunt fait au Lombard, b) celui ouvert aux particuliers en 1809. et c) les dettes contractées par l'achat de quelques bien-fonds (²). Toutes ces dettes sont à courte échéance, et doivent être finalement remboursées dans le courant de huit années. Elles se montent à cinquante millions de roubles environ, et exigent dans les années les plus difficiles jusqu'à treize millions par an, les fonds de remboursement et les intérêts pris ensemble. Si elles étaient converties en dettes sans terme, le tiers des sommes qu'elles coâtent actuellement à l'État, suffirait pour les éteindre en moins de quatorze années.
- 3°. Les dettes intérieures flottantes et exigibles à tout instant. Celles-ci comprennent : a) les avances faites à la trésorerie par la banque d'emprunt, par le département des appanages et par les chambres de prévoyance (приказы общественнаго призрънія) dans les gouvernemens. Ces dettes portent six pour cent d'intérêt. b) Les dettes contractées par le département de la guerre envers les fournisseurs des armées. Celles-ci, à la vérité, ne portent point d'intérêt; mais comme les prix des objets fournis ont été en raison des délais et de l'incertitude des payemens, elles coûtent probablement à l'État bien au-delà du montant de l'intérêt.

La masse totale des dettes (en évaluant celle de Hollande suivant le change actuel) ne s'élève pas encore au montant du revenu annuel de l'Empire; ainsi, comparativement aux dettes de la plupart des autres puissances de l'Europe, elles sont peu considérables; et elles le sont encore moins quand on les compare aux ressources de l'Empire.

⁽²⁾ L'emprunt intérieur de 1810, qui était de vingt millions payables en mounaie d'argent, à raison de 50 copeks d'argent pour un rouble en assignats, n'est plus compris dans cette liste, puisque le rembouraement s'en est effectué depuis le 15 juillet 1817, et que sette dette se trouve complètement étaite dans ce moment.

Le montant des assignats en circulation, à l'époque où le gouvernement arrêta leur émission en 1810, était évalué à 577 millions de roubles. Comme on n'a point l'intention de les supprimer tout-à-fait, mais seulement d'en diminuer la masse pour les porter au pair avec la monnaie d'argent, la quantité à supprimer ne peut point être calculéé avec certitude.

Telles sont les dettes à éteindre: voici les moyens qu'on emploira à cet esset.

Pour parvenir à ce but, le gouvernement n'établit aucun nouvel impôt; mais il maintient ceux qui, pour le même objet, avaient été créés en 1812, et que l'urgence des besoins de l'État pendant la guerre avait fait détourner de leur destination primitive. Comme le montant de ces droits est plus ou moins variable, le gouvernement leur substitue un revenu fixe et provenant d'une des sources les plus solides du revenu public: il assigne pour cet objet, jusqu'à l'entière extinction de toutes les dettes, un fonds annuel de soixante millions de roubles en assignats, devant-ètre prélevé sur le revenu des domaines de la Couronne. L'application de ce fonds au but indiqué, de même que toutes les opérations y relatives, sont l'objet d'une Commission particulière, nommée la Commission pour l'amortissement des dettes de l'Empire. Cette Commission, ainsi que la banque d'assignats et eelle d'emprunt, se trouvent soumises à la surveillance d'un Conseil, composé de trois membres du gouvernement et de douze députés de la nation. Les premiers sont : le Président du Conseil de l'Empire, le Ministre des finances et le Contrôleur des finances; parmi les autres membres, six sont élus par la noblesse et autant par le commerce. Ce Conseil examine chaque année la situation du crédit public dans toutes ses branches et sous tous ses rapports; il rend compte à l'Empereur de toutes les opérations faites par la Commission et de leur résultat; et ce rapport est rendu public par la voie de l'impression. Si dans l'avenir on trouvait nécessaire d'apporter quelques modifications aux mesures adoptées, ecs changemens ne pourront être proposées au Souverain, sans avoir préalablement subi l'examen du Conseil et obtenu son approbation.

Le fonds annuel destiné au payement des dettes est divisé en deux portions égales: trente millions pour l'extinction des dettes portant intérêt, et autant pour la diminution des assignats (3). À mesure que les dettes de la première espèce s'éteignent, l'excédent des trente millions destinés à cet usage vient grossir le fonds pour l'amortissement des assignats, de sorte que le total de 60 millions est toujours délivré chaque année pour le même objet, jusqu'à l'extinction de toutes les dettes actuellement existantes et jusqu'au parfait rétablissement de la valeur des assignats. Si à l'avenir le gouvernement trouvait nécessaire d'ouvrir un nouvel emprunt, afin de faire face à des dépenses extraordinaires et imprévues, il aura soin d'assigner un nouveau fonds d'amortissement, uniquement pour cet emprunt.

Ainsi la dette de l'Empire actuellement existante est une dette fondée ou consolidée, puisque le gouvernement lui affecte une somme annuelle, séparée de tous ses autres revenus et dépenses, et uniquement destinée au payement de cette dette et des intérèts qu'elle porte,

Les dettes, soit extérieures, soit intérieures, sont pour la plupart, comme nous l'avons vu, des dettes à terme. Le payement des intérêts et le remboursement du principal de ces dettes s'effectueront sans qu'il soit rien changé aux stipulations, sauf les arrangemens pris ou qui seront pris de gré à gré avec les créanciers. Les titres

⁽³⁾ La Commission n'étant entrée en activité que depuis le 1er de Septembre 1817, le fonds d'amortissement pour cette année n'a été fixé qu'à quarante millions, dont 30 étaient destinés au payement des dettes, et 10 à diminuer la masse des assignats.

de leurs créances sont transmissibles et peuvent servir comme susetés, pour l'accomplissement d'un engagement pécuniaire.

Les créanciers de l'État qui ont des titres à terme peuvent les convertir en titres sans terme. Dans ce cas leurs créances jouissent des avantages suivans:

Un titre sans terme rapporte à son possesseur une rente perpétuelle de 6 pour cent par an, payable tous les six mois. Tout propriétaire de pareils titres peut les vendre ou les engager en totalité ou en partie. Il lui est également permis de leur attribuer toutes les qualités et prérogatives d'un bien-fonds et même celles d'un majorat, pourvu que le capital qu'ils représentent ne soit pas au-dessous de cinq-mille roubles; il peut aussi les rendre inaliénables, en assignant la rente à tel établissement, à telle personne ou à telle destination qu'il juge convenable.

Les étrangers peuvent participer aux avantages des titres sans terme, à l'égal des sujets de l'Empire. Le payement des rentes perpétuelles, de même que celui des dettes à terme, se continuera en tems de guerre comme en tems de paix, sans égard aux rapports hostiles dans lesquels la Russie pourrait se trouver avec la nation à laquelle appartient le créancier. Si un étranger, créancier de l'Empire, vient à mourir sans testament ou autres dispositions particulières, les titres de sa créance passent à ses héritiers, d'après les lois de son pays.

Les capitaux placés à rentes perpétuelles ne peuvent être saisis ni mis sous sequestre, ni pour les prétentions de la Couronne ni pour celles des particuliers, le cas excepté où le possesseur aurait livré ses titres comme sûretés. Pareillement ces capitaux ne séront jamais assujétis à aucune redevance ou imposition.

Personne ne peut être forcé d'accepter le remboursement de sa créance; mais pour faciliter la vente de leurs titres à ceux des créanciers qui veulent s'en désaisir, la Commission les rachète au

taux de la place, et emploie chaque année à cet effet un fonds déterminé, outre celui affecté au payement des rentes perpétuelles. Ce fonds d'amortissement a été dans l'origine de deux pour cent du montant total des dettes sans terme, mais il s'accroît successivement par les arrérages des rentes dont il a racheté les titres.

Dès la publication du Maniseste, les sommes suivantes, qui étaient à la disposition de la Couronne, ont été converties en dettes consolidées sans terme: 1°. Les capitaux appartenant à la samille Impériale qui se trouvent au département des appanages; et 2°. ceux appartenant aux chambres de prévoyance, aux sondations pieuses, aux établissemens publics et aux tribunaux, lesquels ne peuvent jouir que des intérêts, sans toucher au capital. Quant aux capitaux de ces mêmes corporations qui se trouvent placés à la banque pour un tems quelconque ou jusqu'à requisition, ils y restent placés sur le même pied qu'auparavant.

Penvent également être convertis en dettes consolidées sans termes, au gré des créanciers, les sommes que les particuliers ont à prétendre pour contrats et fournitures faits au département de la guerre en divers tems et jusqu'à l'année 1816, aussi-tôt que leurs prétentions sont reconnues valides.

Toutes les dettes consolidées de l'Empire sont inscrites dans le Grand Livre, destiné à constater l'état de chaque dette, les progrès de son remboursement et de l'acquit exact des intérêts ou rentes. Le Grand Livre est muni du sceau de la Commission, de la signature du ministre des finances et de celle du chef de la Commission et de ses membres. Il y en aura deux exemplaires, exactement conformes l'un à l'autre; l'un sera gardé au ministère des finances, l'autre à la Commission.

Le Grand Livre a trois parties: la première pour la dette étrangère ou l'emprunt fait en Hollande, la seconde pour les dettes

intérieures à terme, et la troisième pour les dettes sans terme. Cette dernière a quatre sous - divisions: 1°. pour les dettes ordinaires de cette espèce; 2°. pour les capitaux inaliénables dont la rente perpétuelle est affectée à l'entretien d'établissemens publics; 3°. pour les capitaux formant des majorats.

En portant le nom d'un créancier sur le Grand Livre, la Commission lui délivre en outre un billet pour certifier cette inscription. Pour les dettes à terme, particulièrement les dettes étrangeres, les créanciers conservent les obligations dont ils sont munis, sans qu'il y soit fait aucun changement.

Les inscriptions sont transportables d'un individu à l'autre, soit en entier, soit en partie, pourvu que les sommes transférées ne soient pas au-dessons de cent roubles et qu'elles soient des sommes rondes. Cet arrangement présente aux commerçans et aux gens d'affaires des facilités pour le payement de grosses sommes, telles qu'une banque de dépôt les offre. Le transfert s'effectue à St. Pétersbourg, a la Commission, deux fois par semaine; dans les autres villes de l'Empire par devant les tribunaux civils de gouvernement ou de district; dans l'étranger par devant les missions ou consulats de Russie, à moins que les proprietaires ne veuillent l'effectuer par leurs fondés de pouvoir à St. Petersbourg.

Si quelqu'un perd une inscription, il sussit qu'il en donne sur le champ avis à la Commission qui le publie dans les gazettes du pays et étrangères; et si au bout de 18 mois l'inscription ne s'est pas retrouvée, elle est regardée comme nulle et la Commission en delivre une nouvelle.

Les titres des créanciers de la dette fondée sont reçus comme suretés par les tribunaux et les offices de la Couronne, pour 60 pour cent de leur valeur nominale; entre particuliers, suivant les stipulations qui se font de gré à gré. Ne peuvent être ni-transférés ni donnés comme suretés les titres des capitaux de fa-

mille ou inaliénables, puisque ces opérations sont contraires à leur destination. Un titre livré comme sureté ne cesse pas de rapporà son possesseur l'intérêt ou la rente perpetuelle à laquelle elle lui donne le droit.

Si un créancier de l'État désire faire un empaunt à la banque d'emprunt, sur un titre qui n'est pas celui d'un capital inalienable ou de famille, la banque peut acquiescer à cette demande; mais la somme qu'elle lui prête ne peut pas aller au-dela du quart de la valeur du titre.

Les rentes perpétuelles se payent deux fois l'année, savoir depuis le 15 Juillet jusqu'au 1er d'Août, et depuis le 15 Janvier jusqu'au 1er Février; le payement des intérêts pour les dettes à terme s'effectue pareillement deux fois l'année, depuis le 1er jusqu'au 15 Juillet, et depuis le 1er jusqu'au 15 Janvier; ce dernier terme est encore celui du remboursement successif des capitaux, à moins que les créaneiers des dettes à termes n'aient désiré et supulé d'autres époques pour le payement de leurs intérets et de leurs capitaux. Ceux qui manquent de se présenter au terme fixé, sont obligés d'attendre le terme suivant pour toucher les sommes qui leur sont dues, et comme dans aueun eas la Commission ne paye un interêt composé, ils reçoivent alors ces sommes sans accroissement d'intérêts.

Les payemens se font indifféremment, soit aux possesseurs des titres, soit aux personnes que ceux-ci ont muni de leurs plein-pouvoirs; on peut les toucher, soit à St: Petersbourg, à la Commission, soit dans l'intérieur de l'Empire aux caisses publiques des villes de gouvernement ou de district. Dans ce dernier cas, il faut s'adresser à la Commission au moins quatre mois avant l'échéance du terme; autrement l'envoi des sommes dues est remis jusqu'au terme suivant. Les sommes envoyées par la poste aux lettres ne payent point la prime d'assurance etablie pour ces envois.

Voilà pour ce qui regarde les dettes portant intérêt; quant aux mesures prises pour la diminution des assignats, elles se réduisent à ce qui suit.

Afin de relever la valeur des assignats, le gouvernement en diminuera successivement la masse, jusqu'a l'époque où leur taux se rapprochera de la valeur des espèces sonnantes. Les sommes qu'il destine annuellement à cette opération, sont de quatre espèces:

- 1°. Le fonds de 30 millions de roubles ci-dessus indiqué, et qui sera uniquement appliqué à cet esset.
- 2°. Les arrérages du fonds pour les dettes portant intérèt. À mesure que ce fonds sera libéré par le remboursement de ces dettes, il viendra grossir le fonds d'amortissement pour les assignats.
- 3°. Les sommes qui pourront rester chaque année des revenus de l'État, après avoir satisfait aux dépenses publiques.
- 4°. Les sommes qui rentreront à la Commission pour les bien-fonds vendus depuis 1810, et qui dés-lors furent destinées à diminuer la masse des assignats.

Pour accélérer la suppression des assignats, le gouvernement a recours aux emprunts. Les sommes qui entrent par ce moyen, sont brûlées publiquement; on en agit de même chaque année avec les fonds destinées à l'amortissement des assignats, après en avoir déduit les sommes nécessaires au payement des intérêts et au remboursement graduel du principal des emprunts.

Le premier emprunt a été ouvert depuis le 1^{er} Juillet jusqu'au 20 Decembre 1817. On y a reçu toute souscription volontaire de fonds, tant de la part des sujets russes que des étrangers. Les fonds ont pu être versés, soit en assignats soit en obligations de la banque d'emprunt, ou en monnaie d'or et d'argent de Russie, mais pas autrement qu'en sommes rondes de centaines et pas moins de cent roubles. Pour tout capital versé on a accordé une prime de 20 pour cent, de sorte qu'au lieu de mille roubles on a inscrit mille deux-cent roubles au profit de celui qui les avait fournis. De plus, en compensation des fraix que l'envoi des sommes par la poste ou leur remise par lettres de change avait pu occasionner, il a été accordé un pour cent de tout le capital versé, lequel a été décompté des sommes fournies. Ces fonds ont été inscrits sur le Grand Livre, comme dettes à rentes perpétuelles, et il en a été delivré des inscriptions dans la forme établic. Le payement des rentes, comptées à 6 pour cent de tout le capital inscrit, s'effectue dans la même monnaie qu'on a fournie, aux deux époques de l'année et de la manière indiquée ci-dessus. Ces payemens se font sur le fonds de 30 millions destiné à l'amortissement des assignats.

Les fonds versés dans ce premier emprunt se sont élevés à 28 millions de roubles en assignats; 38 millions ont été brûlés publiquement en avril 1818.

Telles sont les mesures les plus essentielles que le gouvernement a prises pour régler les dettes de l'Empire et pour en assurer l'extinction. Les principes qui servent de base à ce vaste projet, sont de nature à ne pouvoir être contestés que par l'ignorance; mais l'exécution pourrait sembler difficile, même à des esprits éclaires, s'ils sont prévenus par l'idée que le crédit public ne peut subsister que sous l'égide d'une forme de gouvernement représentative. Cette croyance, qui est assez générale, me paraît dénuee de tout sondement et dementie par l'expérience. Partout et dans tous les cas, le crédit public ou la confiance des prêteurs dans un gouverpement est en raison des moyens qu'il a d'accomplir ses promesșes, et de la volonte qu'on lui suppose de les accomplir. Les moyens sont faciles à constater, et la volonté se juge sur la conduite antérieure du gouvernement à l'égard de ses créanciers. conséquence un gouvernement représentatif dénué de ressources et ayant déja maniscaté sa mauvaise soi, aura moins de crédit qu'un

gouvernement monarchique ou obsolu auquel on connaît de grands movens et qui n'a jamais violé ses engagemens. Souvent la conviction des moyens l'emporte même sur les craintes qu'inspire la mauvaise foi. La banqueroute que la France avait faite sous le Régent, n'empêcha pas les emprunts qui se firent sous Louis XV; et ces emprunts se conclurent à un intérêt plus bas que ceux du règne de Louis XIV, et a aussi bon marché que ceux qui se firent dans le même tems en Angleterre, proportion gardée du taux usuel de l'intérêt dans les deux royaumes. La réduction forcée des rentes sous Louis XV n'empêcha pas non plus les emprunts conclus sous Louis XVI. Tant il est possible à un gouvernement monarchique d'obtenir du crédit, lors même qu'il n'est pas tres-religieux à remplir ses promesses, pourvu qu'on lui connaisse les moyens de les remplir. Désespérera-t-on après cela de voir le crédit public s'établir en Russie? Dans un pays qui conserve encore toute la vigueur d'un jeune État; dont la population; l'industrie et la richesse s'accroissent avec une rapidité qui fait l'étonnement de tous les observateurs; qui offre d'année en année de nouvelles ressources à son gouvernement, sans que celui-ci ait besoin d'augmenter ou de multiplier les impôts; dans un pays que sa position géographique, sa puissance militaire et le devouement de ses peuples paraissent garantir pour longtems de toute invasion étrangère; dans un pays enfin dont le gouvernement a toujours religieusement accompli ses engagemens avec ses créanciers, soit étrangers soit domestiques, quel que fut le caractère personnel de son Chef ou l'esprit dominant de son administration?

En consultant l'expérience des tems passés, il paraît qu'on n'a guère lieu de douter de la confiance du public envers le gouvernement de Russie. Toutes les fois que les Souverains de cet Empire ont fait l'appel aux capitalistes, jamais la confiance de ceux-ci ne leur a manquée; preuve les emprunts négocies à différentes reprises avec tant de facilité à Livourne, à Genes, à Am-

sterdam, à Hambourg et dans l'intérieur de l'Empire. Tel est le crédit dont jouit ce gouvernement dans les pays étrangers, qu'en mars 1815, à une époque où le payement des intérets de sa dette en Hollande avait éte suspendu pendant trois ans, à cause de la guerre, ses promesses s'y vendaient encore au taux de 65 pour cent, et qu'elles remondrent à 86 pour cent, du moment que la Convention du 3 mai parvint à la connaissance du public. Depuis que la banque d'emprunt et le Lombard de St. Pétersbourg existent, les étrangers y ont toujours placé des capitaux, et il y a en des époques où le montant de ces dépôts étrangers n'a pas été loin de cent millions de roubles.

Au reste le tems résondra bientèt la question si le crédit public peut s'établir en Russie. En supposant le problème résolu d'une manière favorable aux vues du gouvernement, et ses projets salutaires réalisés avec persévérance, voici quels en seront les heu-reux résultats:

- 1°. Le gouvernement et ses créanciers se verront débarrassés, le premier de toute gène dans le payement de ses dettes, les autres de toute incertitude à l'égard de leur remboursement. Les payemens du tresor se feront avec une régularité qu'il était impossible d'atteindre tant que la plupart des dettes étaient à terme ou flottantes et exigibles à tout instant; et il en résultera une épargne remarquable dans tous les achats que fera le gouvernement et dans toutes les fournitures pour lesquelles il passera des contrats.
- 2°. Au bout d'un certain tems, susceptible d'être calculé, l'État se verra libéré de toutes ses dettes, exceptees celles dont les créanciers ne voudront point le remboursement ou dont les capitaux seront constitués inaliénables. Plus le montant de ces dernières sera considérable, plus l'extinction des autres en sera accélérée.

3°. Le système du crédit public une fois bien établi, le gouvernement, dans le cas d'une guerre future, ne sera plus forcé de recourir au moyen ruineux du papier-monnaie, mais il trouvera une ressource prompte et facile dans les emprunts; et comme il a déclaré que les emprunts futurs doivent se faire sur la même base que ceux d'aujourd'hui, c'est-à-dire qu'on y affectera sur le champ un sonds annucl pour le payement des intérêts et le remboursement successif du capital, ces nouvelles dettes seront de même éteintes, chacune à une époque déterminée, et sans grever le trésor public d'une manière onéreuse.

Voilà les fruits que l'Empire recueillera du réglement de ses dettes, pourvu que l'exécution du plan adopté soit poursuivie avec persevérance. Quant aux effets que produira la diminution des assignats, cet objet est trop vaste pour être discuté dans ce Mémoire; j'en réserve l'examen pour une autre occasion.



DES VARIATIONS DANS LES PRIX DES MARCHANDISES.

PAR

H. STORCH.

Présenté à la Conférence le 9. Déc. 1818.

Il saut distinguer trois espèces de variations dans les prix: les variations réelles, qui arrivent dans le prix nécessaire des marchandises et par suite dans leur prix courant; les variations accidentelles, qui n'affectent que le prix courant des mavehandises, indépendamment de leur prix nécessaire; enfin les variations nominaies, qui proviennent des variations du numéraire.

1) Des variations réelles.

Le prix nécessaire des marchandises n'étant autre chose que les fraix qu'elles ont coûte à produire, il s'ensuit que les variations réelles ont lieu toutes les fois que ces fraix varient.

Ainsi le prix nécessaire des marchandises baisse quand les fraix de production diminuent. Ceci est possible de deux manières:

- 1°. Quand le prix des sources de production diminue, c'està-dire quand le taux des salaires, des rentes ou des profits baisse;
- 2°. Quand l'industric se perfectionne. Dans ce cas les sources de production sont employées plus convenablement et elles donnent un plus grand produit, ce qui fait baisser le prix de ce produit.

De même le prix nécessaire des marchandises hausse quand les fraix de production augmentent. Ceci arrive:

1°. Quand le prix des sources de production s'élève;

2°. Quand l'industrie décline ou rétrograde.

La baisse réelle du prix des marchandises est presque toujours un avantage pour la société, quelle que soit la cause de cette baisse:

Car si elle est l'esset d'une baisse dans le prix des sources de production, et que cette baisse est à son tour l'esset de l'état progressif de la nation, la perte que sont les possesseurs de ces sources sur le taux de leurs revenus, leur est compensée par la multiplication de leurs revenus ();

Et si elle est l'effet du perfectionnement de l'industrie, la perte que font les producteurs sur le prix de leurs produits, leur est compensee par la multiplication des produits; car dans ce cas les moyens de production devenant plus puissans, la chose produite auguente tonjours en quanté à mesure qu'elle diminue en valeur, on plutôt elle ne diminue en valeur que parce qu'elle a augmenté en quantité.

En conséquence la baisse réelle est favorable aux consommateurs sans être nuisible aux producteurs ni aux revenus que donnent les sources de production; elle est même favorable aux producteurs, car la baisse d'une denrée en multiplie le débit. Enfin comme tout producteur est en même tems consommateur, si la baisse s'étend sur d'autres produits outre les siens, il en profite encore comme consommateur.

⁽¹⁾ A mes re qu'une nation s'envielnt, les capitaux rapportent un intérêt moindre mais il y a plus de capi aux qui le rapportent; les profis e manaent, mais il s. fait p. s. d'entrepris s et des entr pris s plus vastes. Ainsi il y a tonjours e impensation, non-seal ment pour la societé, mais encore pour les individus; et cette compensation si double pour la société tant qu'elle continue à s'urichir, pusque la la isse d la rente des capitaux et du proir d'en reprise est contrebalaizé par la hausse des salaires et de fair nite fon a re. Chez une union parvenue au tant, le l'opal nec et où les salaires même basseraient, il y aurit à la véridé et up usation pour la so été, quant à ce revenu, pulsque, si les salaires étaient faib s. Il y aurait plus d'ouvriers qui en gaga rai ut; mais cette compensation neu si ruit den une pour les individus, et la nation même retirerait moms de revenu net a un ouaité des salaires.

Par la raison contraire, la hausse réelle du prix des marchandises est presque toujours un détriment pour la société:

Car si elle est l'effet d'une hausse dans le prix des sources de production, et que cette hausse n'est pas la suite naturelle de l'état progressif de la nation, les gains des possesseurs de ces sources sont autant de pertes pour les consommateurs;

Et si elle est l'esset du déclin de l'industrie, les producteurs en sournissant moins de produit, ne gagnent pas davantage qu'avant la hausse, et les consommateurs sont des pertes en payant ce produit plus cher.

Ainsi, dans la première de ces suppositions, la hausse réelle est favorable aux possesseurs des sources de production, mais elle est nuisible aux consommateurs; dans la seconde, elle est nuisible aux consommateurs sans être favorable aux producteurs; elle est même nuisible à ceux-ci, car la hausse d'une denrée en diminue le débit. Enfin, comme tout producteur est en même tems consommateur, si la hausse s'étend sur d'autres produits outre les siens, il y perd encore comme consommateur.

Ces principes sur les variations réelles du prix des marchandises nous offrent les deux conséquences que voici:

- 1°. Que le haut ou bas prix des denrées, lorsqu'il provient du prix nécessaire, est toujours de fort longue durée, puisque ce prix est le résultat de la situation progressive ou rétrograde de la mation, qui ne peut changer que graduellement avec le cours des siècles;
- 2°. Et que, dans un pays riche, la plupart des marchandises sont toujours meilleur marché que dans un pays pauvre, à moins que des impôts excessifs n'y fassent naître une cherté artificielle. Je dis la plupart des marchandises; car la hausse de certaines marchandises, surtout des produits agricoles, est très-compa-

tible avec les progrès de la richesse nationale, et elle est même une suite de ces progrès.

2) Des variations accidentelles.

Les causes qui font hausser ou baisser le prix courant des marchandises, lors même que leur prix nécessaire ne varie point, se réduisent toutes à une seule cause générale : le dérangement de l'équilibre entre l'offre et la demande des marchandises. Quant aux effets de ces variations ace dentelles, ils ne sont pas les mèmes dans la circulation interieure que dans le commerce avec l'étranger.

Dans la circulation intérieure ces variations sont toujours nuisibles, car le gain que fait le vendeur est une perte pour l'acheteur, et réciproquement.

Dans la circulation extérieure, la hausse accidentelle des marchandises procure des gains à la nation qui les vend, et les pertes retombent sur la nation qui les achète. Pareillement la baisse accidentelle des marchandises cause des pertes à la nation vendense, et les acheteurs dans l'étranger y gagnent. Cependant, comme dans la règle les gains et les pertes de cette nature se compensent, il est probable que la richesse nationale en est fort peu affectée, quoique ces variations de prix puissent enrichir tels individus dans la nation et appauvrir tels autres.

Nous avons vu que le haut ou bas prix des marchandises, lorsqu'il provient du prix nécessaire, est toujours de fort longue durée: mais quand il provient du prix courant seulement, il est toujours plus ou moins passager, à moins qu'un monopole ne le maintienne forcément à ce taux; et dans ce cas le haut prix seul est durable. En d'autres termes, les variations réelles sont rares et lentes; les variations accidentelles sont fréquentes et passageres.

3) Des variations nominales.

Toutes les fois que l'on compare la valeur d'une marchandise à celle d'une seule autre marchandise, fût-ce mème l'or ou l'argent, on risque de se faire une idée fausse de l'une des deux valeurs; car on n'est jamais sûr laquelle des deux a varié. L'or et l'argent, comme toutes les autres marchandises, peuvent subir et subissent en effet des variations de prix réelles et accidentelles: ainsi une marchandise dont le prix est exprimé en or ou en argent, lors même que ce prix ne varie point, paraît cependant hausser quand la valeur de ces métaux diminue, comme il paraît baisser lorsque le contraire arrive. Dans ce cas ses variations ne sont que nominales, car dans le fond elle n'en subit point du tout.

L'erreur est encore bien plus faeile lorsque les prix des marchandises, au lieu d'être exprimés en une quantité d'or ou d'argent fin, le sont en espèces monnayées. Celles-ci sont souvent dans le cas de perdre une portion du métal fin qu'elles contenaient dans l'origine; comme en achetant des marchandises avec de pareilles espèces dépréciées, il faut compenser par le nombre des pièces ce qu'elles ont perdu en valeur, le prix des marchandises paraît hausser, lors même qu'il ne varie point. Cette hausse est également une hausse nominale.

Quant aux effets des variations nominales, il n'en existe point, par la raison même que ces variations ne sont que nominales; les effets qu'elles paraissent avoir, sont ceux des variations dans la valeur du numéraire; ainsi il nous reste à considérer celles - ci.

La valeur des monnaies est exposée à varier par quatre causes dissérentes: 1°, par les variations inévitables que subit le prix des métaux précieux; 2°, par l'usure résultant du frottement que les monnaies subissent dans la circulation; 3°, par la cupidité des rogneurs d'espèces; et 4°, par les opérations monétaires du

gouvernement, lequel croit souvent trouver du profit à diminuer la quantité de métal fin contenue dans les monnaies en leur conservant les mêmes noms. La première de ces causes peut faire hausser ou baisser la valeur du numéraire; les autres le font toujours baisser.

Les effets de ces variations sont toujours plus ou moins nuisibles. La hausse et la baisse le sont également; car la première qualité requise dans le numéraire, c'est la stabilité de sa valeur. Un numéraire qui varie, soit qu'il hausse, soit qu'il baisse, jette de la confusion dans le rapport de toutes les valeurs échangeables, d'où résultent des gains et des pertes non-mérités, et les uns sont aussi pernicieux que les autres. Ce serait juger bien superficiellement de ces gains et de ces pertes, que de leur supposer un effet purement négatif pour la richesse nationale, pourvu qu'un citoyen gagne ce que son concitoyen a perdu. Sans doute de pareilles pertes n'appauvrissent pas directement la nation, comme de pareils gains ne l'enrichissent pas non plus; mais pour se convainere du mal positif et réel qu'ils occasionnent, il sussit d'observer que ce sont des déplacemens de fortune injustes, c'est-à-dire que ces gains ne sont point acquis par une plus grande activité de travail ou une supériorité de mérite, et que les pertes qu'ils entraînent ne sont point provoquées par une conduite imprudente ou vicieuse. Or personne de disconviendra que les pertes non-méritées ne soient un mal réel pour la société, et les gains non-mérités ne lui sont pas moins sunestes. Leur esset le plus commun est de faire contracter à ceux sur lesquels ils tombent des habitudes plus dispendienses, de les inviter à la dissipation, à l'oisiveté et aux vices qui vont à leur suite. Ainsi ces gains, directement si nuisibles aux mœurs, deviennent encore indirectement nuisibles à la richesse nationale.

Tels sont les essets généraux des variations dans la valeur du numéraire, soit qu'il hausse, soit qu'il baisse. La baisse du numéraire

est encore particulièrement nuisible à ceux des habitans du pays qui subsistent d'un revenu fixe, stipulé en numéraire; car dans ce cas leur revenu réel diminue en proportion de la baisse du numéraire, quoique leur revenu nominal reste le mème. Si cette baisse n'était que l'esset des variations dans le prix des métaux précieux, ces calamités seraient bien rares; mais comme elle a encore sa source dans la cupidité des hommes, cette circonstance la rend malheureusement trop fréquente.

Si les suites qui accompagnent les variations dans la valeur du numéraire sont déjà si nuisibles, qu'on juge à quel point elles doivent être funestes quand le numéraire n'est qu'un papier sans garantie, dont les variations journalières sont sans terme. Le commerce en est frappé de manière à devenir un jeu de hasard; les prêts sont découragés, le crédit en soufire et l'on perd l'envie d'accumuler; les gains et les pertes non-mérités se multiplient à l'infini; enfin la plupart de ceux qui subsistent d'un revenu fixe, stipulé en papier, se voient réduits à la misère. Encore ces calamités sont elles peu de chose en comparaison des désordres moraux qu'entraîne la chûte du papier-monnaie. Finalement, qu'on prenne le parti de l'éteindre ou de relever sa valeur, tonjours on est obligé de faire faire à la nation de nouveaux sacrifices, lesquels retombent souvent sur les individus mêmes qui ont le plus soufiert par sa dépréciation.

SUR L'ÉTAT ACTUEL DE L'ARPENTAGE EN RUSSIE.

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 10 Mars 1819.

Si l'Impératrine Cathérine II. n'avait acquis pendant son règne d'autres titres à la reconnaissance de ses sujets que celui d'avoir mis à exécution le projet d'arpentage, il suffiroit seul pour rendre son nom immortel.

Qu'on s'imagine un vaste Empire où l'étendue des terres de la Couronne, celle des proprietés particulières et surtout celle des biens appartenans aux différentes classes des paysans, n'avoit jamais été exactement déterminée; où les terres labourables avoient seuls quelque valeur et étoient vaguément désignées par le nombre de tschetwerts de sémailles; où quelques arbres, une grande pierre, un fossé, enfin les traditions transmises par les vieillards devoient suffire pour marquer les limites; où les bois, les lacs, les rivières, les paturages étoient considérés comme des biens de la Couronne dont l'ususuriit étoit commun à tous: et l'on pourra prévoir les plaintes innombrables qui doivent résulter de cet état indécis des choses par suite du manque des titres valables, de l'oppression du foible et de la possession paisible des terres d'autrui pendant une longue suite d'années: du moment où la population auroit augmentée, les habitations se seroient rapprochées et les bois et forets, les lacs, les rivières et les paturages auroient acquis une valeur considérable en raison des progrés de l'industrie manufacturière, du commerce qui devoit s'étendre d'avantage, de l'organisation de l'armée et de la flotte, enfin par des bésoins artificiels qui se multiplient à mésure que la richesse nationale augmente.

Cet état de choses tout inconcévable qu'il paroisse à celui qui habite un pays cultivé et organisé dépuis plusieurs siècles, est pourtant très naturel dans un Empire immense, où la population n'étoit nullement proportionnée au terrain et où la sùreté dans les campagnes ne date que du commencement du 17 me siècle; dans un Etat où des provinces entières étoient devastées par la guerre ou abandonnées par un faux système financier que l'on suivoit alors, où la famine êtoit assez frequente et où la peste s'étendoit quelquefois jusqu'aux contrées septentrionales.

Au commencement du 15^{me} siècle (en 1436) l'on voyoit encore dépuis Moscou jusqu'aux frontières de la Pologne un vaste désert parsemé de villages brulés, où le voyageur trouvoit à peine un gite au milieu des ruines; et l'état des choses n'avoit pas changé en 1483. En 1625 le pays situé entre Mos ou, Nowgorod et Plescou étoit même entièrement devasté et en 1561 il n'y avoit qu'un seul village entre Waesma et Mojaisk, e'est à dire sur une étendue de 130 werstes. La route depuis Smoleus's jusqu'à Moscon étoit dévenue dangereuse, non pas à cuise des voleurs de grand chemin, mais à cause des loups qui infesto ent cette contrée. Enfin depuis Kasań jusqu'à Astrachan l'on ne rencontroit plus d'habitations; mais ce qui paroit le plus étonnant, c'est qu'entre Wologda et Jaroslaw les habitans de 50 villages avoient abandonnés leurs cabanes pour vivre dans les bois comme des chasseurs, à cause des impôts exorbitants qu'ils étoient obligés de payer. La famine et la peste succedèrent naturellement à la devastation du pays, elle eut lieu en 1525, en 1601, en 1615, et Nowgorod perdit dans un hiver 18,000 habitans (').

Le climat temperé du milieu de la Russie, la fertilité du sol, les bésoins des, habitans ne suffisoient donc pas pour fairé cul-

⁽¹⁾ V. Aleiners das alte und neue Aufland.

tiver la terre et peupler le pays; ce sut l'avénement au trône de Russie de la maison Romanosf qui mit fin en 1013 aux troubles de l'intérieur et aména la paix avec les puissances étrangères; c'est ce gouvernement réstaurateur qui organisa, l'administration et qui fit connaître et respecter la Russie au dehors; en rétablissant la sureté dans les campagnes il donna une nouvelle valeur aux terres labourables, ranima l'industrie, fit fleurir le Commerce et assura par là les progrès de la population, qui augmenta d'une année à l'autre au point de rendre l'arpentage des terres nécessaire. -Mais pourquoi cet arpentage n'eut - il lieu qu'en 1765? Ce fut à cause de la non-valeur des bois et forèts dans le plus grand nombre des Gouvernemens et des difficultés qui se trouverent à son exécution et dissérent cette mésure jusqu'à ce qu'elle devint absolument indispensable. Tant que les bois furent considerés comme bien commun à tous, il fut impossible de fixer exactement les limites des terres. Mais la communeauté des bois en Russie est prouvée d'abord par la nature des choses, car ils n'eurent aucune valeur tant que la plupart des terres labourables ne furent pas cultivées et celles-ci ne purent l'être réguliérement, tant que la surcté ne sut pas rétablie dans les campagnes; cette communeauté est prouvée d'ailleurs par la législation de Pierre le grand sur les bois et forèts; elle l'est enfin par l'opinion que les paysans de la Couronne ont eu sur la possession de leurs bois. Pierre le grand ayant appris que quelques propriétaires de terres, situées vraisemblablement dans des provinces où les bois commençoient à avoir quelque valeur, désendoient à leurs voisins de le couper sur leur territoire, ou qu'ils leurs vendoient ce droit moyennant quelque somme d'argent; ordonna de couper en conséquence tout le bois nécessaire par des hommes réunis en troupes de 15 à 20, afin qu'ils puissent opposer quelque resistance à tous ceux qui voudroient les en empêcher; il menaça de la confiscation des biens, des travaux forcés dans les forteresses et même du Knout, ceux qui oseroient défendre à qui que ce sut de couper du bois sur-leurs terres (v. les Oukases du

11 Décembre 1719 et même du 18 Janvier, 20 Mars et 14 Avril 1720). Enfin lorsque Pierre le grand sentit la valeur des bois pour l'armée et la flotte, il defendit le 19 Juin 1719 sous les peincs les plus rigoureuses et pour toute l'étenduc de son Empire de couper les chèncs, les ormes, les parables, et quant aux sapins, ceux de plus de 12 pouces de diamètre au dessus de la coupe, lorsque ces arbres se trouveroient dans l'espace de 10 verstes autour des petites rivières navigables qui se dechargent dans les grandes, et de 50 verstes autour des grandes rivières. Il ne devoit, donc rester que très peu de ces bois libres en beaucoup d'endroits. Pierre le grand rendit cet Oukase sans distinguer les terres des particuliers de celles de la Couronne, même sans faire mention des bois appartenants aux particuliers. Un Empéreur aussi juste qui n'a jamais attaqué les proprietés particulières, n'auroit pas pris cette mésure, il auroit au moins cherché à la justifier en alleguant des circonstances impéricuses, si les bois n'avoient pas été communs à tous. C'est pour ce motif qu'on les nommoit общіе и вържие льса (bois dont tous jouissoient en commun) et qu'on les évalousit d'après une mésure usitée pour les routes, c'est à dire par verstes et non par une mésure agraire, qui n'étoit pas encore en usage en Russie. C'est pour cela enfin que les paysans de la Couronne répondirent encore en 1797 aux commissaires qui leurs demandoient à qui appartenoient ces bois: мы владьльцы (nous en sommes les possesseurs). Or si les bois et forèts qui certainement alors formoient plus de la moitié de la surface, puisqu'ils en forment encore actuellement plus d'un tiers, n'entroient pas en ligne de compte, comment étoit-il possible de fixer les limites des terres avec quelque exactitude?

Mais la population qui vers la fin du règne de Pierre le grand s'eleva à 12,900,000 habitans des deux sexes sans compter ceux des provinces nouvellement conquises, monta sous Elisabeth à 14;644,000 personnes et au commencement du règne de Cathérine II. à 17,303,000. Dix neuf établissemens nouveaux

vinrent grossir en 1723 le nombre des 50 manufactures, qua montèrent à 73 en 1736, elles étoient déja en 1762 au nombre de 408, enfin en 1765 il en éxistoit 502, dont les produits furent evalués pour cette dernière année à 2,790,110 roubles d'argent. Le commerce étranger sur la Baltique et sur la mer blanche devint considérable. Le nombre des batimens que les Hollandois envoyoient à Archangel étoit de 400; et les navires Anglois qui commerçoient avec St. Pétersbourg montoient à 1200. On comptoit en outre 100 batimens appartenans aux villes anséatiques et 100 autres des différentes nations. Un tableau sur l'exportation des manufactures russes en 1719 l'évalue à environ 500,000 roubles argent, mais un autre daté de 1733 porte précisement la somme à 402,561 roubles en argent formant le produit des objets exportés par les manufactures russes, dont 318,241 pour le compte de l'Angleterre.

La population et l'industrie faisant des progrès aussi considérables, la propriété territoriale qui sett de base à tout travail productif ne put rester plus long-tems indéterminée et c'est alors seulement que des difficultés sans nombre se presentèrent.

L'Impératrice Elisabeth conçut le projet d'arpentage. Les propriétaires fonciers devoient produire les titres en vertu desquels ils possedèrent leurs biens; les paysans de la Couronne devoient recevoir une portion de terre qui leur étoit assignée par la loi. Un arpentage basé sur ces principes, qui paroissent aujourd'hui si justes et si naturels, produisit alors le même effet qu'une loi agraire chez les Romains, car un tel arpentage supposoit la révision des titres des possesseurs, mésure qui devoit bouleverser un grand nombre de fortunes, et produire la réduction des terres superflues dont les paysans de la Couronne jouissoient en paix dépuis plusieurs siècles. Aussi le mécontentement devint si générat

que l'Impératrice renonça à l'exécution d'un projet salutaire et indispensable pour la sureté des propriétés territoriales.

L'Impératrice Cathérine II. le reprit, mais elle donna d'autres bases à l'arpentage. Il ne s'agissoit plus de la révision des titres des propriétaires, ni de la réduction des terres superflues des paysans de la Couronne, mais de la confirmation du status quo de 1765, année normale pour les biens fonds en Russie. Toutes les prétentions dont les titres n'avoient pas été produits avant cette année, devoient être annullées (voyez l'Instruction pour le Comptoirs d'argentage Chapitre 22. §. 1—2). Enfin elle accorda aux paysans de la Couronne une si grande pièce de terres, qu'il est presque douteux que l'on ait pu en donner autant dans plusieurs gouvernemens, savoir 32 dessetines par famille et même 60, si l'étendue du terrain le permettroit (v. l'Instruct. etc. Chap. 19. §. 2. Chap. 13. §. 5. Chap. 24. §. 1. Chap. 32. §. 39).

Ces bases de l'arpentage devoient tranquilliser les propiétaires fonciers et il n'est prouvé par aucun exemple qu'il y ait eu des plaintes de leur part. Elles devoient satisfaire les prétentions les plus exagerées des paysans de la Couronne; et cependant leur mécontentement éclata dans quelques gouvernemens. (voyez. l'Oukase du Septembre 1776).

La prudence avec laquelle cette grande Impératrice mit son projet en execution servira toujours de modèle aux Gouvernemens qui veulent exécuter un projet salutaire mais difficile. L'oukase du 20 Septembre 1765 est un chef-d'oeuvre dans son genre, par la sagesse, la bonté, et la dignité qui y règnent. C'est une grande Souveraine qui instruit son peuple de ses interêts les plus chers, c'est une mere qui parle à ses enfans encore en bas-age. Elle promet sa bienveillance et sa haute protection aux propriétaires fonciers qui faciliteroient l'ouvrage des arpenteurs, elle compte sur le gele des véritables fils, de la patrie, elle mênace par la même

Oukase, ceux qui entraveront cette mésure salutaire, de leurfaire encourir les peines prononcées par la loi, elle ordonne que l'arpentage des terres des paysans de la Couronne ne se fasse qu'en présence d'un Magistrat, qui devra leur expliquer pourquoi l'on fait cet arpentage et leur dire que c'est pour leur assurer la possession tranquille de leurs terres, enfin pour leur propre avantage et que les Tribunaux recevront leurs plaintes s'ils se croient leses (voy. Instruction Chap. 12. §. 29. et l'Oukase du - Septembre 1776). Elle engage le Clergé des campagnes d'instruire les paysans du but de l'arpentage, elle excuse même quelques exemples de désobéissance qui arrivoient par suite de l'ignorance des paysans malgré toutes les précautions que l'on avoit prises; elle les attribue à la négligence des Magistrats et des Ecclésiastiques qui ne leur avoient pas donné les instructions nécessaires. Le même esprit, les mêmes sentimens se développent dans l'Instruction donnée aux Arpenteurs; elle servira non seulement à assurer le bien d'un chacun, mais encore c'est une mésure d'état qui illustrera son règne en procurant la tranquillité à l'Empire. Elle leur préscrit la manière dont ils doivent mésurer et composer les plans, il leur est enjoint de disstinguer non seulement les terres labourables d'avec les prairies, les bois et les forêts, mais encore de faire des observations sur la nature du sol, de faire des rémarques économiques indispensables au Gouvernement, en se rappelant toutes fois que ces observations doivent être faites avec exactitude et jamais au hazard, puisque le manque d'exactitude pourroit induire le Gouvernement en erreur et qu'il vaudroit beaucoup mieux de manquer de données que d'en avoir de fausses. Il est surtout à rémarquer que la grande Impératrice fut la prémière Souveraine de Russie qui fixa une mésure agraire, savoir la dessetine de 18 toises de long sur 30 de large ou bien de 2400 toises et 3 archines carrées (Instruction, Chapitre 5. (. 1.)..

Ce sut donc avec raison qu'elle sit graver sur le sceau des Comptoirs, d'arpentage cette legende significative: Suum cuique.

Il y a maintenant 53 ans que l'arpentage continue en Russie, 24 gonvernemens autour de Moscou sont arpentés et l'on s'occupe aujourd'hui de 7 autres, sans parler des arpentages particuliers qui se font de tems à autre pour différentes causes; savoir pour les bois et forêts, les communications par eau, les grandes routes et le mines etc. Le centre de la Russie, les gouvernemens les mieux cultivés, habités presque tous par des Russes sont mesurés aujourd'hui. Quant-aux autres gouvernemens ils ont suivis ce grand exemple guidès par leur propre intérêt, de sorte qu'il n'y en a pas un seul qui ne soit arpenté d'une manière ou de l'autre, mais ces derniers le seront de nouveau de la part du Gonvernement lorsque leur tour viendra.

La marche que l'on suivit en faisant arpenter successivement les gouvernemens n'étoit pas depourvue de fondement, car il s'agissoit de faire réussir cette grande mésure chez les disserens peuples de la Russie et dans les gouvernemens les plus agricoles. La sagesse de l'Impératrice se montra encore dans le choix. Moscou devoit donner l'exemple, l'arpentage sut commencé le 13 Octobre 1765. Il dura 2 ans et 7 mois; la nouveauté de la chose, l'étendue des terres cultivées, le grand nombre de nobles qui vivoient dans leurs terres, rendoient un arpentage très soigné plus qu'indispensable. Nigegorod fut le second gouvernement qu'elle choisit, ear il est très agricole, forme le point central des gouvernemens situés sur le Wolga inférieur, et est habité de dissérens peuples; l'arpentage y commença le 7 de May 1763 et ne dura qu'une année. gouvernement de l'Oukraine, celui de Charkow, fut le troisième où l'arpentage commença le 7 de May 1769, il dura 3 ans et demi, mais dépuis cette époque on eut des succès plus rapides. Dans une année et demi, c'est-àdire dépuis le 13 Janvier jusqu'au 4 Juillet 1774, 4 gouvernemens russes furent arpentés, savoir ceux de Wladimir, de Jaroslaw, de Resan et de Kostroma; Pensa le sut ensuite dans l'espace de 9 mois, dépuis le 4 Juillet jusqu'en -

Avril 1775, époque où on commença l'arpentage de Tambow qui fut achevé en 8 mois. Suivirent en 1776 Toula, Kalouga, Smolensk et à la fin de l'année on commença la même opération à Woronesch. En 1777 Koursk et Orel furent arpentés, et le 19 Décembre l'on commença l'arpentage à Nowgorod qui fut achevé en 4 mois, car le 26 Avril 1778 l'on fut déja à même de s'occuper de Plescou.

Tous ces gouvernemens, à l'exception de Charkow et de Smolensk, sont originairement russes et ce n'est qu'après eux que 2 gouvernemens Polonois, Mohilew et Witebsk, furent arpentés à dater du 25 Janvier 4783. L'en entreprit ensuite l'arpentage des gouvernemens moins intéressans pour l'agriculture, ceux de St. Petersbourg, Olonetz et Wologda. Un gouvernement très intéressant pour l'agriculture mais qui l'est encore plus par ses bois de chène, celui de Kasan fut le dernier où l'arpentage eut lieu, vraisemblablement à cause des difficultés qu'on prévoyoit par rapport aux bois et forêts.

Voilà les 24 gouvernemens de la Russie européenne où l'arpentage a été terminé. Il s'opère aujourd'hui en vertu de l'Oukase du 25 Juin 1797 dans 7 autres gouvernemens savoir: Saratow, Simbirsk, Waetka, Jekatérinoslaw, Cherson, Orenbourg et la Tauride. La nation est faite à cette grande mésure qui ne rencontre plus de difficultés. C'est ainsi que la perséverance du Gouvernement surmonta tous les obstacles. Il faut espérer qu'il en sera de même de la Statistique de l'Empire, ouvrage qui ne rencontre pas moins de difficultés que l'arpentage, au point même que des personnes eclairées désespèrent du succès.

Quatre Gouvernemens Polonois sont arpentés d'après les mésures polonoises, savoir ceux de Wilna, de Grodno, de Minsk et de Kamenetz Podolsk, depuis aussi le district de Biclostok.

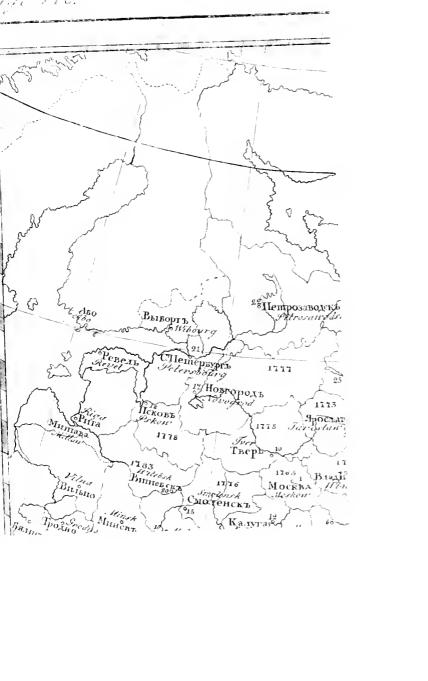
Il reste donc pour l'arpentage 11 gouvernemens: ceux sur la Baltique, l'Esthonie, la Livonie et la Courlande, puis Poltava,

la Volhynie, Archangel, Perme, Astrachan et la Caucasie; enfin les terres des Cosaques du Don.

Il n'existe point de donnée sur la manière dont on procédera à l'arpentage dans le Duché de Finlande, en Bessarabie, en Géorgie, en Iméretie et en Mingrélie, dans la province de Derbent, enfin dans le Royaume de Pologne. Un coup-d'œil jetté sur la carte sous N°. XX. rendra l'état actuel de l'arpentage plus sensible.

Il se trouve outre cela dans chaque gouvernement des Arpenteurs de gouvernement et de cercles qui sont aux ordres des Gouverneurs, d'autres sont attachés à des départemens particuliers envoyés dans les gouvernemeus pour mésurer les terres confiées à leur inspection. Mais il existe dans les endroits où l'arpentage se fait au nom du Sénat un comptoir – d'arpentage avec tous ses employés. Il est presque impossible d'évaluer la somme que cette entreprise a pu couter jusqu'aprésent à la Russie, on la fait monter à plus de 100 millons; en tous cas il est sûr qu'il a couté bien de millions. Pourtant jamais somme n'a été employée plus utilement, car l'arpentage à règlé d'une manière irrevocable les limites des propriétés territoriales et sans cette stabilité l'agriculture et les Manufactures ne pourront jamais faire de grands progrès.

L'arpentage a assuré la tranquillité de l'intérieur; mais quels sont les résultats statistiques qu'il a produit rélativement à la division des différens terrains qui en a été la suite dans les gouvernemens où cette opération est terminée? Cette question nous occupera dans les Mémoires suivans.





RECHERCHES STATISTIQUES SUR LA SEPTIÈME RÉVISION.

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 6 Octobre 1819.

La période depuis la sixième jusqu'à la septième Révision est la plus courte de toutes celles qui se sont passées entre ces denombremens en Russie, car elle ne comprend que les 4 années de 1812 à 1816. Le Manifeste pour la sixieme Révision est du 18 de Mai 1811, et fixe le terme pour la fin des tableaux de Révision dans les Gouvernemens européeus au 1 de Janvier 1812, et pour ceux de la Sibérie au 1 de Juillet de la même année. La septième Révision fut ordonnée par le Manifeste du 2 de Juin 1815, le terme étoit pour les Gouvernemens russes en Europe le 15 d'Août 1817, et pour ceux d'Asie le 15 d'Août 1817.

Mais cette période est une des plus memorables dans les Annales de la Russie par l'invasion de l'ennemi jusqu'au centre de l'Empire, par la nature de cette guerre meurtrière et ruineuse, par les efforts inouis de la Russie faits pour repousser l'ennemi hors des frontières, et puis pour le poursuivre jusque dans sa capitale et y donner la paix 'et la liberté à l'Europe dechirée par une guerre de vingt-cinq ans et subjugée par le conquérant le plus ambitieux.

Une période où la Russie combattoit pour son indépendance et pour celle des Ltats de l'Europe n'étoit pas faite pour faire fleurir l'industrie et pour augmenter la population. On deroit nécessairement s'attendre à des pertes et c'est pour constater leur grandeur que la septieme Révision fut ordannée.

Un premier travail sur un peuple immense, mis en mouvement par une guerre qu'on peut nommer nationale, dut avoir des grandes difficultés, car des milliers d'hommes s'étoient dispersés au loin et ne revenoient plus ou très lentement à leurs foyers. Les pertes faites en cette période dévoient donc paroître d'abord beaucoup plus grandes qu'elles ne l'étoient en effet, et c'est pour cela que le Gouvernement a ordonné un second travail pour vérifier les tableaux de la septième Révision.

Elle ne s'étend que sur la bourgeoisie et sur les paysans (sans compter lés femmes) puisqu'ils sont soumis aux impôts directs et au recrutement, excepté les marchands. Le Gouvernement avoit d'abord bésoin de constater la masse des contribuables en général et celle de ceux qui servent à completer l'armée en particulier. Ce sont parconséquent des états sur la population faits sous le point de vue financiel et militaire.

D'après les états de la population de ces deux classes il y avoit en 1816, 17,950,137 bourgeois et paysans, tandis que le résultat de la sixième Révision avoit donné pour ces mèmes classes en Janvier 1812 le nombre de 18,822,652 hommes.

D'après cela la Russie auroit perdu en 4 ans le nombre de 872,515 hommes de ces deux classes.

Cette perte a paru exagerée et c'est pour cela qu'un second travail fut ordonné en 1817 dont les résultats ne sont pas encore connus.

Mais considérant qu'on n'a pu se tromper de beaucoup dans les Gouvernemens qui n'ont pas été le théâtre de la guerre, (quoique tous dévoient en avoir ressenti plus ou moins les effets pernicieux) surtout à un travail qui se fait ordinairement avec beaucoup d'exactitude en Russie pour ces classes (*): il m'a toujours paru inté-

- Resan

18

152.

117

^(*) Je viens de recevoir les résultats des vérifications faites en cinq gouvernemens limi. troplies qui n'ont pas été devastés par l'ennemi. Ce second travail a commencé le 1 de Juillet 1818 et il a été terminé le 1 de Juillet 1819 et on a trouvé qu'il y avoit réellement quelques bourgeois et paysans de plus, comme suit : 344 bourg, 287 pays, à la Cour, 24 à différ, dép. 141 aux part, total 796 178 Woronesch 19 95 64 Tambow
Toula 297 **5**56 197 *5*3 69 19 43

ressant de comparer, en attendant les vérifications, le tableau général de la sixième Révision à celui de la septième tel qu'il est actuellement pour savoir quelles sont les classes où les différences sont les plus grandes et en quels Gouvernemens elles se trouvent.

Les derniers résultats sur l'état de la population pour les différentes classes de la bourgeoisie et des paysans sont d'après la sixième et d'après la septième Révision comme suit:

Вот	ırgeo	isie		P a	y s a	n s	
d'après la	mar- chands	bourgeois et artisans	à la Couronne	aux domaines	a différens départe- mèns	aux particuliers	paysans libres
6me Ré vision 7me Ré-	124,828	702,158	6,362,816	574,947	410,611	10,444,642	203,140
vision	moins:	744,561 plus:	1 1	moins:	mons:	9,815.490 moins :	98 074 moins:
[28,881	42,403	110,201	22,440	228,682	692,1 52	104,964

En déduisant le plus de 152,601 du moins de 1,042,119 reste le déficit de 872,515.

Le corps des marchands a diminué environ d'un tiers, tandis que celui des bourgeois et artisans a augmenté environ d'un seizième. La perte dans le premier corps est très forte et les progrès de l'autre n'en sont qu'une foible compensation, car le corps des marchands est la fleur de la bourgeoisie, tant pour ses capitaux que pour sa culture. Ces deux classes si intimement liées par leur industrie ont assurément fait des pertes sensibles, malgré que l'état de la bourgeoisie en général paroisse avoir été stationaire en cette périodé, car îl étoit d'après la 6^{me} Révision de 826,986 hommes, et d'après la 7^{me} de 830,508. Les progrès de la population de cette classe sont très peu signifians, car ils ne font que $\frac{1}{131}$. — Il paroit que la plupart des marchands ruinés se sont faits inscrire dans la classe des simples bourgeois, puisque cette dernière a gagnée à - peu - près ce que la première a perdue; la différence de

3,522 hommes n'est pas si considérable, et provient de la classe des paysans.

On pourrait croire que la diminution du corps des marchands prouve la diminution des fonds employés au commerce et que les pertes que quelques classes de paysans ont fait auroient entrainé la diminution des produits agricoles, en un mot que la richesse nationale auroit diminuée en proportion de la population. Pour constater ce fait, nous consulterons les tableaux sur le commerce étranger de la Russie pendant les années 1813, 1814 et 1815.

Annees	Importation	Exportation	Transit
1813	121,508,505r.	132,427,079	1,379,360
1814	113,354,883	194,056,631	2,160,188
1815	113,870,456	219,449,455	1,445,654

L'importation de l'année 1813 étoit vraisemblablement si forte puisqu'elle n'avait été en 1812 que de 76,365,560 r. Les chaînes du système continental étoient tombées en 1813 et la demande des marchandises étrangères étoit forte; pendant les années 1814 et 1815 elle revint à son taux ordinaire.

L'exportation augmente sensiblement pendant ces années et bien loin qu'on apperçoive ici des pertes il paroissoit qu'elle alloit doubler en centinuant d'augmenter de la même manière.

Le Transit est sujet à des changemens considérables.

Ce ne sont pas les bleds et autres articles qui servent pour la nouvriture des hommes qui ont fait monter l'exportation, car elle étoit assez constante pour ces articles:

mais c'était plutôt celle des métaux et demi-métaux qui montoit en ces

trois années de 5 millions et demi a $11\frac{\tau}{2}$ et enfin presque à treize millions. Il y avoit des grandes quantités de fer accumulées pendant les années précédentes.

Les lins et les chanvres parmi les premières Matiéres pour les Manufactures, montoient de 42 millions et demi à 53 et demi et enfin à 58 et demi.

Les toiles avec les autres Manufactures russes alloient de 5 millions a 12 et puis à 16.

L'exportation des bestiaux qui étoit presque nulle en 1813, car elle n'étoit que de la valeur de 150,391 roubles, montoit en 1814 à 5,548,810 et en 1815 à 6,607,487.

Surtont l'exportation des Articles compris sous le titre de diverses marchandises a plus que doublèe, elle étoit en 1813 de 44 millions et demi, en 1814 de 78 et demi, en 1815 de 91,605,138.

Les principaux articles de l'importation étoient dans les années:

1813 1314 1815

• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •					
Marchandises qui servent pour		r	o u b l	c s	
la nourriture de l'homme	62 mil	llions	5 4,900	,000	59,4
Pour la médécine -	1,800	,000	2,t		1,1
Metanx et demi - métaux -	3,5		1,9		3,3
Premières matières pour les manufact.	28,3		22,9		22,7
Manufactures	7,s		10,4		7,5
Diverses marchandises -	16,7		20,4		18,9-

L'article des marchandises pour la nourriture des hommes es^t le plus fort, ce sont les marchandises coloniales, les vins et autres boissons, suit celui des matieres brutes pour nos manufactures, enfin celui des diverses marchandises qui sont pourtant aussi pour la plùpart des manufactures etrangeres. Il ne résulte nullement de ce tableau que la consommation de marchandises dans l'intérieur ait diminuée.

Quant au Transit il est peu signifiant; il consistoit en provisions de bouche qui étoient en 1813 de la valeur de 125,801 roubles, montoient en 1814 à 964,963 et baissoient en 1815 à 83,753; en manufactures pour 869,667 roubles en 1813, pour 327,470 en 1814, et en 1815 pour 654,775, enfin en diverses marchandises pour 383,899 roubles en 1813, pour 613,660 en 1814 et pour 694,806 en 1815. Outre ces articles ordinaires du commerce de transit il y avoit encore en 1814 pour 936 roubles de médécine et des premières matières pour les manufactures dans la même année pour 253,159, et en 1815 pour 13,320 roubles.

Nous terminerons cet aperçu de l'état du commerce russe pendant ces trois années par le tableau du commerce de St. Pétersbourg, comme point central du commerce étranger.

Années	Importation	Exportation
1813	75,799,838	53,634,495
1814	64,440,375	91,795,342
1815	65,573,193	107,355,470

Ce tableau est de même très consolant, l'exportation fait des progrès rapides, tandis que l'importation tombe à son taux ordinaire Les principaux articles de l'importation consistoient en

	13	13		1814	1814
en provisions de bouche, pour	381	nillions	300,000	33,4	33,7 -
Médécine	1,		4 —	1,6.	741,820
Métaux et demi - métaux	2,		2	778,433	2,5
Premières matières pour les	3				
manufactures .	21	_ —	5 —	12,9	15
Manufactures	$2\frac{1}{2}$			2,8	8-48,730
Diverses marchandises	10	-		13,7	$12\frac{1}{2}$.

Ceux de l'exportation étoient pour ces mêmes années:

		1813	1814	1815
Provisions de bouche	2. ♦	4,8 —	4,9	3,4
Métaux et demi - métaux	•	676,193	2,8	5,7
premières matières pour les ma	anufaetures	25,1	29,1	34,3
Manufactures .		2,4 —	9	1 1,3
Diverses marchandises .	•	20,3 —	45,5	5 1,6

Et c'est ainsi que nous avons deux faits contradictoires à conciller: la diminution du corps des marchands pendant les années 1813, 1814, 1815 et l'augmentation de son commerce étranger qui prouve en même tems celle du commerce de l'intérieur qu'il vivifie et dont il exporte le surplus.

Si l'agriculture n'a pas gagnée pendant ces années pour l'exportation du bled, elle a considérablement gagnée pour la culture des lins et des chanvres, puis pour l'éducation des bestiaux et enfin pour les travaux aux mines. La classe des paysans n'avoit au moins rien perdue dans les principales branches de son industrie.

Les Manufactures ont de même considérablement gagnées, surtout les toiles et toileries et les diverses marchandises. — Ces objets manufacturés font vivre les artisans, parconsèquent l'industrie des simples bourgeois ne pouvoit pas baisser.

Done si les pertes de la population de ces classes existoient réellement, elles ne provennoient pas de la décadence des différentes branches de l'industrie nationale, qui pendant ces années à jamais mémorables s'est soutenue et doit mème avoir fait des progrès, puisqu'il y avoit un plus grand surplus à exporter. Et comme l'importation s'est d'abord aerne et puis soutenue au mème taux, il falloit bien que les marchandises étrangères cussent trouvé des consommateurs en état de les payer, ce qui prouve que la richesse nationale n'a pas éprouvée les mèmes pertes que la population. — Ce fait saute encore plus aux yeux si l'on considère que ni la consommation des vins, des eaux de vie étrangères et des

marchandises coloniales a diminuée, donc l'aisance de la classe des consommateurs, la consommation parmi les gens riches n'a pas diminuée; ni des premieres matières étrangères qui vivifient nos manufactures à baissée: parconséquent l'industrie à ces établissemens n'a rien perdue; enfin quelle quantité de diverses marchandises n'a pas été exportée!

Il est donc vraisemblable que si la clesse des Marchands a effectivement baissée aussi considérablement, les fonds pour le commerce auront été concentres dans les mains d'un plus petit nombre de marchands qui se sont soutenus et ont été augmentés par la part active que les simples bourgeois et même des paysans ont pris au commerce. Il y a donc une diminution dans le nombre de ceux qui portent le nom des marchands et la Couroune y perd pour ses revenus du capital accusé par ce corps, mais il n'y a pas eu de perte réelle pour les fonds du commerce et aux différentes branches de l'industrie, au contraire la richesse nationale n'a fait qu'augmenter.

Et comme les progrès de la population dépendent de l'état de la richesse nationale, les pertes que la Russie auroit faite en hommes, même si elles étoient réellement aussi considérables que le tableau sur la septième Révision l'indique, seront reparées en très peu de tems.

Nous ajoutons les états detaillés sur la population de la bourgeoisie et des paysans d'après la sixième et la septième Révision selon le premier travail.



de eptième en 1816.

R	u s	sie	europ	e p t	iem e	R e v i	s i o n		
						рау			
Pla- teaux		G	ouvern	paysans libres	à la couronne	aux domaines	a différens établisse- mens	aux particuliers	total
		1)	Archan	-	58.221	19.499		128	82.204
Nord	Ì	2)	Olonetz	6.3	86.782	892		5.737	98.202
Ž	- 1	3)	Wologo	809	172.402	26.119	611	\$ 9.660	298.496
Plateau du		4)	Waetka	-	460.860	47.563	3.631	10.499	531.255
=		5)	Perme	79	282.780	8.079	13.861	168.495	484.190
tea	j	6)	Ancieni	ans les	tableaux	sur la	Révi	sion	
Pla		7)	St. Péte	98	32.737	2.257	19.252	121.408	196.176
I.		8)	Novgo	479	116.779	20.298	659	171.837	324.240
				1.528	1.208.511	124.707	38.014	567.764	2.009.763
VIau	υJ	9)	l'Estlar		1.863			94.865	105.405
IA	lone		•	630	1.139.088	3.994	3.285	2.195.357	3.552.776
	1	45)	la Tay	357	53.188	18	lames and the second se	9.588	81.314
des		46)	d'Astra	*****	9.338	_		4.283	19.293
1		47)	la Ca		44.965		-	4.994	51.589
Plateau	Steppes	$T\epsilon$	rres de						
late	teb		du Doi	-	447	-		78.544	78.99 I
11	$\bar{\mathbf{x}}$	Te	rres de						
VII.			de la	de					
				357	107.938	1.8	_	97.409	231.187
						AND THE RESERVE	150 A - 1- 10-		
		48)	Tobol		225.22		23	1.713	236.527
teau	63	49)) Toms	-	187.137			826	202.623
. Plate	Sibe	50)) Irkon		239.984	-	140	259	247.220
H	de				652.345	-	169	2.793	686.370
>			Gı	22.670	0 6.473.017	551.807	181.929	2.815.490	17.950.825

\mathbf{C}

		I. Pla	rie		-	_	Step	pe s	10		long	ation	dr dr	9 C	la p	thes		s ba	35 4	- (e r)	32)		2.	IV.	rtie	6 28) H	eid	ent	22 33	22)	1.	22 13 E E	rtie	5 J	ntale	de 25	l. Pla Flévoi a la W	olga	_E	Plate	ne 93	I.	7	~ ~	ن پ	2 (2)		Go Co
Grand total	тыа	50) Irkontzk .	Tobolsk . Tomsk .		total	la mer noire	es des Cosaques	٠.		Taunde 1	Cherson .	Jekathermoslaw	Poduhe	Charkow .	Poliawa .	Techemicow	had	Muisk .	rodno .	Mohilew .	Witebsk .	Grand total	lotal	Woronege	Koursk	Racsan	Foods	Masca	Which is .	Jaroslaw	tulal	Saratow . Orenbourg	Pensa .	Simbirsk . Trimbow	Kasan	total	Smolensk	Twer	total	Condande	io.	Hart Para		Perme	Waetka .	Olonetz .		uvenens
124.826	1.616	-11	400		2.798	C s	İ		1.7.33	4 I S	1.105	1.7	5000	798	1.081		2 1881	308	# 612 12	733		10,	53,0351	2 020	50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 50 5	3.951	5 131	17 134	1.246	3.1 28	25.154	0.070	1373	2.0 15	2.552	12 367	2.967	0.07	3 525	1.722	0.87	3.258	5.200	850	002	083	value de alla	Treat hands
702.398	29 5 82	8619	9.292		19.176	n d m	1	00.	ь ж ж	71 9 517	10.056		33765	7.051	5.331	. 2			19.457	31.342	19.301	so to	~1	6.330	23,395	12.957	21.560	25.925	\$ 0.23a	13.352	08.741	15.102	J.158	3.1 = 1 1 = 1	10.002	40 606	13.80×	19.09	31 355	13,133	3.7.18	11.00.	12,999	10.3	3 10 3 1	4 4	sto ogmon	
1.302.510	320 411	13160	6 1.7708		101 80	3 d a	1	1 C	9.301	300 070	95.589	148.418	115 190	273.282	347.07	51 411	256.673	23.499	123.034	9 8 10	70.438	2550,	1.120.662	357.140	163.832	110.302	65.938	121.723	112.138	86,000	430.837	187,333	133.937	189.019	302.499	251.344	30 426	153.439	125 08,	50.272	0.501	118.448	33,128	92 510	179,682	92.894	a la commune	
574.247	1 33/	4 5	19 1	z: c		□ s	1		1	£		24.3	1	1.485	1.097		2 377		1	50%	1 10 8	on Cu is ≥u L- <u>i</u>	145.254	i, i	27.725	2.07 E	5 1 5 1	18 302	56.957	1.900	70 3 50	100.705	30 120	30 750	E1 888	98 986	55 55 55 55 55 55 55 55 55 55 55 55 55	- A			1 20 0.3	21.409	2.381	7.390	26.612	953	dan anes	
10,444,04	277	218	₩ 8 - 3.	s s	91 /11	G o n	76.791	4 50	4.076	10 2 3	96.449	117.801	345.519	profes.	331 802	488.438	1 421 015	341.783	225.926	358.081	100 5	4.440,	2.934.308	219.063	356364	G.	400.812	C .	290.510	25 1.462	3 3 3 3 5 3 5 3 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	2 19.658	232.721	23.1.580	83.929	022 08.	216.750 373.277	.32.05	910.01	204 778	90.82	177 (0)	ayat nae 125.678	105 12	94 116	6 12 3	Para and	
3/203.1.11	185.281	8 % bullion	32.905	- e	400	V 0 T	ı		ط ا ا -		1,0	1	1	N					1	1	0.4	2. *	3.580	11.054	- 50		3 <u>14</u>		220	2.010			,	33-	1 5		1 29			1	1 9/3		Admini de		470		Jahren Jahren	
410.611	8 1 1 8	1 : 3	84.198			3	I	1	1 !	10	1	1.197	1	1		1.248				1 1	100	30.7	49.100	28.50	ł	19.737	-2	13.475	1	3.018		1	2.607	1	19.424	1	1 1				1 124 11	63	stration 19.551	203.801	i	1 1	a manerona erablisaca anons	· · I.H.L.
18.822.652	631.330	230.614	193,530	12 5	210 811	ווו פּ או וֹ	76.791	45 412	19.250	3 7 3 7	203 86.	20 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10	494 575	47 1.100	502.381	503.700	1 -04 875	391 100	9.	401.041	3 6 2 4 11 6	7.090,	4 453.292	071.320	\$69.000	508.446	493.019	502.100	421.310	391.405	150 850	481.944	411.925	405.557	453.025	1.320.201	319.947	533.031	570 875	270.210	108.000	332.59	particultere	480.080	310.182	80.760 105.131	1013	
85.947			237	1	5 5 5	-	i	30.5	· = :		-	os 1.	12	0.39	6.752			7 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7	147	258	2 5 6	54,	10.941	2022	5913	2.900	3.350	12.170	969	3 3 5 5	1.303	3.261	823	1.151	1.001	7.22)	58 56 - 1 ±	4 538	755	1.601	780	20 -1	ne se	# 10 c	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	£26	chands	
9 1.30 1	24 816	0 2 2 0	0.280	b b	23.57	T	1	1 321	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	78. th	23.420	14021	53,1-6	7 062	34.72	27.817	70	13.926	6.176	23.332	1 1 8	12 2 3	5.803	7.035	24 554	12.054	21.927	8.982	10.135	2000	5 23.2	19.937	5.427	3.810	3.581	43.245	5,179	21 297	30.341	14.83L	3.775	2 34+	trouve 16.39	10.470	8 0 0 5	4.223	bourgeois	
75,403		1	1	u e	1=			1	1 1	12:		0 % 0	1.999	1		525	7.405	1.942	3.930			1	1		1	1 1	1	1 1		1 1	1	1	1 1	1 .			1 1	1	1.519	1.170	4.477	1	pas	1 1		1 1	libres	
2.6700	1	1	11		357		1	1	0.00					611		1	0.0	1 1	-	10	-!		6.7331	370	1 ~1	12 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13	å <u>4</u>	9.6	484	807	-		10 00 10 00 10		573	o l c	251	259		1	1 528				h 0.8	0, 1	hibres	
.473.017	652.3-15	230.98	22 · 22 · 687.137		107.038		4-	44.900	9.335	130 088	97.90%	149,984	13.338	208.520	330.373	43.820	120.024	20.702	40.093	8.060	515.701	C4 C	02.029	53.800	45.47	11.64	05.76	108.001	59,605	52.504		191.818	132.329	187.845	72.673 356.718	243.337	23.820	150.817	93.118	40.201	1.80.	116.779	tableanx	282,780	10	80.782	соцентие	
551.807,1	1	1			2.1		1	1	1	3,944		1.26	1		2 S	- 3	2.3			367	922	رداد	130.092	5.962	25.962	1.996	150	17.655	Era	1 / 0 . 8 . 3 =	.1_	23.053	28.722	r., _		92.6	50 463	9.1	1	ı	124.767	20.208	sur la	8 0 7 9	26.11		S trending	
		40	23		1		1	١	1 1	3.285	1	1.120	30 5 4	1		1.0.52	1	1 1	1		283	109,	58.169	8,495	1.407	19.927	740			51.110	22.120	1 1			19.282	1	1			1	38.01.	659	Revi	3.031	511		i iblisse.	
2.815.490 17.950.8	2 798	259	1.713 826		97.409		78.544	4.994	10 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 0	0.895.3571	95.95	110.22	378.865	182.395	310.803	450 277	1.189.347	255.660	205.483	287.266	240.001	h 4		218.358	332.153	339.692	376.024	276.177	280.489	0.476.329	59.645	251.550	304.080	231.943	314,448	850.603	203.536	325,348	109.277	209.191		171.837	sion lov	10.499	\$9.666	5 7 3 7	sadhers anx	
7.950.826	686.370	247.220	202.623		231.187		78.991		19.293	81.314	218.837	283.515	448.42	455.671	597.452 659.34 1	523.733	1.468.261	300.630	315 829	319 299	300.107	7,	l . i				468,499			10.	346.630	490.313	619.585	461.623	444.140	1.243 834	304.956	521.680	181.610	276.994	9.7	324 240		531.255 484.190	298.496	82.204	t 0 t a 1	

IV. SECTION D'HISTOIRE ET DE PHILOLOGIE.



EXAMEN CRITIQUE DE LÀ FABLE D'HERCULE, COMMENTÉE PAR DUPUIS.

Mémoire présenté par S. E. Mr. le Président le 17 Nov. 1819.

Non me cuiquam mancipavi; nullius nomen fero-Senec. Epist. XLV.

Depuis long - tems, on avait essayé de trouver dans l'astronomie, la solution de la plupart des difficultés qu'offre le système réligieux des anciens; mais ces tentatives isolées n'avoient présenté aucun résultat satisfaisant. À l'exemple de plusieurs mythographes, Court de Gebelin, pour ne parler que de ceux qui ont eerit en france, plaça les travaux d'Hercule dans le passage du soleil par le Zodiaque en les appliquant plus particulièrement à l'agriculture; mais Dupuis en marchant sur ses traces réduisit ces hypothèses en un système complet, dans lequel il fit refluer toutes les connaissances réligieuses et philosophiques des hommes. Ce système, fruit d'un long travail et d'une érudition peu commune, est un phénoméne assez singulier dans l'histoire des lettres, pour mériter une grande attention.

Nous laissons aux habiles l'examen de l'ouvrage entier de Dupuis; nous ne nous engageons point à le suivre dans l'immense labyrinthe qu'il s'est tracé; mais tout système repose sur quelques bases principales. Nous examinerons l'une de ces bases, celle peut-ètre qu'il croyoit la plus solide:

Qu'il nous soit permis d'écarter de cette dissertation tout ce qui a rapport aux opinions personnelles de l'auteur. Les principes qu'il s'était faits et les conséquences qu'il en tire, pourraient devenir le sujet d'un autre écrit, dont les résultats ne tourneraient pas a la gloire de l'esprit humain. Ici, nous ne considérons dans Dupuis que le Mythographe.

Hercule est le soleil; voilà la proposition de Court de Gebelin, voilà l'axiòme de Dupuis. Les douze travaux d'Hercule correspondent aux douze signes du Zodiaque.

La principale assise du système de Dupuis est de supposer dans l'histoire de la Grèce, une époque qu'il transporte à 1600 ans avant Homère: époque qu'il appèle l'âge d'or de la poésie. La, il place les chants du soleil, l'Héraclèide, ou poéme sacré sur le calendrier dont il ne reste plus que le canevas, et dont les débris forment l'amas confus des ruines mythologiques (pag. 354). Delà, il suppose une époque d'ignorance et de barbarie jusqu'a Homère et Hésiode, et il ajoute: "Le fil sacré une fois rompu, ne "fut plus renoué par les Grecs: et nous mèmes, dit-il, ne l'avons "retrouvé que dans les sanctuaires de l'Egypte."

On voit bien que jusqu'à présent, il n'y a pas encore matière à discussion. Un raisonnement que l'on croit historique et qui est appuyé sur une supposition de faits est un cercle vicieux dans lequel on tourne sans succès. Il faut seulement observer qu'il était asséz adroit de révoquer en doute l'autorité d'Homère, d'Hésiode, et des anciens poétes, en disant que le fil de l'allégorie ne s'était retrouvé que chez les Egyptiens. En admettant ce principe une fois, on donne gain de cause aux autorités postérieures des Pythagoriciens, des Platoniciens et de tous ceux qui voulurent régulariser a posteriori le grand amas des traditions mythologiques. Voilà précisément le côté faible de tout l'échafaudage de Dupuis.

La discussion de la partie astronomique n'est pas de notre ressort. En tout cas elle influe peu sur les objections que nous avons à présenter. Nous nous bornerons à observer que l'embar-

dans l'explication du premier travail, où il est obligé de distinguer le premier Hercule, ou le Dieu-Soleil, de deux autres Hercules placés dans les constellations, mais d'un ordre inférieur au grand Dieu-Soleil (1). Pour appuyer cette assertion, l'auteur fait violence à un passage d'Hérodote dans lequel celui-ci loue les Grees d'avoir établi de la différence entre le culte qu'ils rendaient à Hercule-Olympien, dieu immortel, et celui qu'ils rendaient à un autre Hercule qui n'etait que dans la classe des héros; certes Herodote ne faisait point ici allusion au Dieu-Soleil, ni à l'Hercule Ingeniculus mais bien à cette double nature d'un héros déifié qu'Homère a distingué le premier, comme nous le verrons par la suite (2).

Plusieurs antres endroits du calendrier comparé ne sont pas non plus à l'abri de tout reproche. Dans le quatrième travail, Dupuis a été obligé de se servir des sphéres Arabes pour y trouver une biche qui put correspondre à celle que prend Hercule. Dans le sixième travail, il n'est guères possible de comprendre l'analogie, qu'il veut établir entre l'entrée du Soleil dans le signe du Capricorne et Hercule nettoyant les étables d'Augias.

Enfin l'esprit de parti a tellement aveuglé Dupuis dans son commentaire astronomique, que le Dicu des Chretiens, (ce sont ses expressions) n'est lui-même à ses yeux que le Soleil, excepté qu'au lieu des douze travaux, ce sont les douze apôtres qui sont l'office des douze grands Dieux.

Retournons à l'explication philologique: L'examen des autorités est sans contre dit le procédé le plus simple pour éprouver la solidité du système qu'elles supportent. Dupuis savait trop bien que loin de trouver dans Homère, dans Hésiode, dans les tragiques, dans Hérodote, quelque chose qui fut favorable à son opinion, tout ce qui y était consigné était au contraire diamétralement opposé à son système. Il ne pouvait attaquer la valeur de ces

sources; nous avons vû avec quelle adresse il les écarte de la discussion, mais cette adresse est vaine; quiconque s'est livré à l'étude de cette branche des connaissanses humaines, reconnait que c'est dans ces sources seules que l'on peut découvrir la clef du sanctuaire de l'antiquité; c'est à l'aide de ces grandes et nobles autorités que nous verrons se dissoudre tout ce amas d'hypothéses hazardées et de notices indigestes.

La première autorité que cite Dupuis, est celle de Nonnus; personne n'ignore que ce savant poéte vivait à une époque où les traditions mythologiques avaient cessé d'exister, et où on ne pouvait arriver à elles, qu'à travers le dédale des systèmes éclectiques. Nonnus, né dans le cinquième ou sixième siècle de l'Ere chrétienne, trahit visiblement le dessein de donner un sens plus grave aux annales du Polythéisme. Profondément versé dans la connaissance du système religieux de tous les peuples anciens, le poéte de Panople, tantôt compilateur et tantôt homme de génie, avait fait de tous ces matériaux divers, un amalgame bizarre: et comme un grand nombre de ses contemporains, il s'obstinait à ramener à un ensemble rationnel les formes capricieuses de l'imagination mythologique (3),

Nonnus dans son invocation à Hercule accumule les dénominations et les épithètes :

Βήλος ἐπ' Εὐφεήταο, Λιβύς κεκλημένος "Αμμων,
"Απις ἔφυς Ναλῶςς, "Αραψ Κρόνος, 'Ασσύριος Ζέυς,
Εἴτε Σάραπις ἔφυς, Αἰγύπτιος ἀννέφελος Ζέυς,
Εἰ Χρόνος, κὰ Φαέθων πολυώνυμος, ἄτε σῦ Μίθρης
'Ἡέλιος Βαβυλῶνος, ἐν Ἑλλάδι Δελφὸς 'Απόλλων.

Tout ce morceau souvent eité, ne présente qu'un assemblage de notices hétérogènes, recueillies avec beaucoup d'érudition, mais

⁽¹⁾ L. XXXX. v. 1038. -

parfaitement opposées aux anciennes notions Grecques; et comme notre dessein n'est pas de combattre l'hypothèse adoptée par Dupuis mais seulement de montrer qu'elle a été faite après coup, et que le Polytheïsme à son origine n'offrait aucune trace de l'identité d'Hercule et du Soleil, la comparaison de ce morceau avec les sources primitives, en déterminera la valeur.

Continuons l'examen des principales autorités rapportées par Dupuis: "Les Egyptiens, dit Plutarque, pensent qu'Hercule assis "dans le char du Soleil, fait le tour du monde avec lui" (²). Les objections contre le témoignage de Nonnus peuvent s'appliquer en partie à Plutarque très attaché au Syncrétisme, et qui écrivait tard, sur des mémoires étrangers, et dans un siècle où le goût de l'analyse avait gagné tous les esprits; mais il est une objection bien plus solide, et la voici: Plutarque nous dit que les Egyptiens plaçaient Hercule dans le char du Soleil; quel est l'Hercule Egyptien? Quel était son nom? son culte? son origine?

La Mythologie Egyptienne n'a jamais été bien connue. Les seules notions que l'on en ait possédées, ont été transmises par les grecs; et l'on sait comment ils se rendaient compte de ce qui se trouvait hors de l'enceinte de la Grece. S'ils voyaient la réprésentation d'un Dieu qui avait quelque ressemblance avec Hercule, ils le nommaient Hercule, et ne poussaient pas leurs recherches plus loin. Ils négligérent de recueillir les noms Egyptiens, parcequ'ils dédaignaient en général toutes les langues étrangères (4). La Grèce avait presque tout reçu de l'Egypte: mais dépositaire infie dèle, elle avait oublié jusqu'aux noms de ses bienfaiteurs (5). Les traditions orientales qui avaient traversé l'Egypte, s'étaient naturalisées en Grèce, et la marche du tems dérobait de plus en plus les formes primitives. Les Grecs n'avaient aucune idée positive de l'Egypte. Ils en ignoraient la langue et l'histoire. Quelques philo-

⁽²⁾ De Is. et Osir. p. 367.

sophes essayérent de soulever le voile qui les convrait; mais ils allérent en Egypte plutôt pour donner une sanction respectable à leurs opinions, que pour étudier celles des Egyptiens. On ne sait rien des voyages de Pythagore et de Solon. Hérodote se borna à conserver avec les prêtres. Platon lui-même ne s'est point expliqué sur son séjour en Egypte; et quand l'école d'Alexandrie se li-vra à l'étude des antiquités Egyptiennes, les sources originales étaient oubliées, et la langue sacrée perdue depuis longtems.

L'Egypte elle même s'opposait par sa constitution à étre mieux connue des Grecs. Tout contribuait à ne leur en donner que des notions superficielles; et si quelques uns d'entr'eux plus curieux ou plus éclairés, allaient interroger les gràves oracles de la sagesse Egyptienne elle leur répondait comme le prêtre de Saïs au législateur Athénien: "O Solon, Solon, vous autres Grecs, vous "êtes encore des enfans! Il n'est pas un seul vieillard en Grèce; "car vous ne possédez pas une seule discipline qui soit an20 cienne." (3).

Il s'ensuit que toutes les notions des anciens sur l'Egypte, sont très suspectes d'hellenisme. L'assertion de Plutarque n'en est pas exempte. Elle peut être au moins révoquée en doute, 1° parcequ'il ne nous a pas transmis le nom Egyptien de la divinité qu'il appele Hercule (6). 2° Parceque lui-mème était déja atteint dans ses opinions philosophiques de la manie du Syncrétisme moderne. 3° Parcequ'il est très probable que les Egyptiens n'ont jamais connu l'Hércule Grec (7). 4° Enfin parcequ'aucun autre écrivain ne confirme le témoignage du philosophe de Cheronée.

Apres l'autorité de Plutarque, la plus considérable parmi celles que cite Dupuis est l'autorité des hymnes Orphiques. On sait

⁽³⁾ Plat. Tim. 3. Ed. Bipont. pag. 290. Cyrill. contra Jul. I. p. 15. Ed. Spanheimii. Clem. Strom. T. I. p. 356. Ed. Potteri. La dernière phrase n'est pas rapportée par Platon mais par Clément d'Alexandrie. Dans S. Cyrille tout le discours est amplifié.

maintenant que ces hymnes sont très postérieurs à l'époque où on les plaçait autrefois. Cette discussion polémique est épuisée. Il en résulte que tout ce que nous avons sous le nom d'Orphée, nou seulement n'offre rien de lui, mais encore que c'est un assemblage informe de productions distérentes recueillies et compilées à une époque voisine des derniers systèmes du Polytheïsme.

Dupuis cite plusieurs fois avec complaisance l'autorité de Porphyre (4) qui parle de l'identité d'Hercule et du Soleil, comme d'une ancienne tradition, savoir que la fable des douze grands travaux a pour bàse la division des douze signes du Zodiaque, et qu'Hercule n'est que le Soleil qui parcourt tous les ans cette carrière, dont l'entrée était fixée au point solsticial occupé autrefois par le lion céleste, attribut caractéristique du Soleil arrivé au lieu le plus élevé du ciel. Ici, il suffit de rappeler que Porphyre, ennemi déclaré du Christianisme, se trouvait l'un des chefs les plus illustres de cette grande conspiration qui voulait empêcher la chûte du Polytheisme. Nous avons essayé de montrer dans un autre écrit (5) l'extension de ce système d'opposition et son influence. Nous reviendrons encore à cette époque mémorable. Le témoignage de Porphyre est absolument à rejetter lei, d'autant plus qu'il ne s'appuye que d'une tradition vague et peu connue.

Gèné par un passage de Diodore de Sieile (5) qui, en parlant de l'histoire d'Hercule, dit qu'elle présente de grandes difficultés et qu'on aurait tort de l'assujettir aux régles de la critique ordinaire, Dupuis déclare que l'erreur publique a obligé Diodore de composer avec elle.

Outre les passages que nous avons discutes, Dupuis cite encore Macrobe, Servius sur l'Enéide, le commentaire de Jean Diacre

⁽⁴⁾ Euseb. pracp. Evang. L. III. c. 11.

⁽⁵⁾ Essai sur les Mysteres d'Eleusis, troisième édition. Paris 1816, de l'Imprimérie Royale.

⁽⁶⁾ L. IV. c. VIII.

sur Hésiode, Arnobe, Martianus Capella, et quelques astronomes modernes (8).

Pour donner une bâse spécieuse à son système, Dupuis aurait sans doute desiré trouver une autorité ancienne quelconque, au moyen de la quelle il eût pû prouver que dès l'origine du Polythéisme, Hercule avait été confondu avec le soleil; malheureusement pour son système, de toutes les autorités qu'il entasse, pas une n'est antérieure à l'Ere Chrétienne (9).

De toutes les règles de la critique, soit historique, soit littéraire, la plus vulgaire et la plus utile, est celle de classer ehronologiquement (quelque soit là dessus l'avis de mon savant ami Mr. Creützer) les témoignages cités, mais Dupuis ne s'y est pas astreint. S'il avait été de bonne soi, ou plutôt s'il n'avait pas été entrainé par l'esprit de parti, il se serait persuadé lui-même de l'impossibilité réelle de réduire tout le système mythologique à une seule base. vant la marche historique de la mythologie Grecque, en classant les. époques et d'après elles les autorités, il aurait vu que ce léger et brillant tissu de symboles, de traditions générales, d'allégories, de faits historiques, de notions locales, de connaissances naturelles, présentait à chaque siécle, dans chaque pays, dans chaque ville, des variétés infinies, des faces différentes, des contradictions inexplicables. Ce qui ne pouvait manquer d'arriver, prisque ce vaste ensemble s'était formé successivement, non sur un plan arrêté, mais à mesure que la marche de l'esprit-humain faisait naître de nouveaux besoins ou de nouvelles inspirations. Loin de suivre une méthode aussi simple, Dupuis semble avoir établi à dessein la plus grande confusion dans son ouvrage, tant dans la discussion de son système que dans l'emploi des autorités citées, confusion très propre à éblouir les demi-savans et à rendre difficile l'analyse d'un ouvrage scientifique.

Pour en revenir avec plus de précision au point de la question, jettons un coup-d'œil sur la marche du système mythologique en Grèce. Il date d'Homère. Que ses poëmes soyent effectivement des productions originales, ou qu'ils soyent un recueil de poëmes détachés, dont le canevas seul appartient au siècle d'Homère, ici peu importe. Les écrits d'Homère furent non seulement la source de la poësie des Grecs, mais encore le principe de leur théologie. Le témoignage d'Hérodote est positif (7).

Le premier âge connu de la mythologie grecque est donc la mythologie Homérique. À cette époque, les notions religieuses n'avaient encore qu'une forme très simple, et même très vague. La vie civile n'existait pas.

Homère ne fait quelques détails sur Hercule que dans un seul endroit de l'Odyssée, chant XI. v. 601 - 636. Ce morceau est extrémement remarquable; Ulysse raconte son voyage dans le pays des Cimmériens et son arrivée à l'endroit par où les manes descendent aux enfers. Après les sacrifices prescrits il voit apparaître successivement les ombres des héros: "Alors je reconnus l'er-" cule, dit-il, ce n'était qu'une ombre: Lui-même assiste aux ban-" quets des Dieux immortels, et possède la beile Hébé (S). Tels " qu'une nuée d'oiseaux, les morts esfrayés se pressaient en foule , autour de lui : mais Hercule, semblable à la nuit épaisse, tenait " son arc et sa flèche qu'il agitait d'un air terrible, et qu'il pa-" raissait vouloir décocher. Un baudrier retentissait sur sa poi-"trine; le cuir en était revêtu d'or; et l'on avait retracé dessus " avec un art merveilleux des ours, des sangliers faronches et des ", lions aux regards étincelans (°), des combats homicides, le meur-", tre et le carnage. L'artiste qui avait fabriqué ce baudrier n'en " avait jamais fait de semblable et ne pourrait pas le recommen-" cer. Herenle me reconnut après m'avoir envisagé, et en soupi-", rant, il m'adressa ces paroles: "Fils de Laërte, ingénieux Ulysse,

⁽⁷⁾ Herodot, L. II. c. 53.

⁽⁸⁾ Dans l'original; καλλίσφυρον, aux belles chevilles du pied.

⁽⁹⁾ Dans l'original: χxgoποί. On l'interprête par fulvi.

" seriez vous aussi poursuivi par le sort qui me persécuta tant que " j'ai vu la lumière du solcil! J'étais fils de Jupiter. et pourtant , mes manx furent inouis, car je fus soumis à un homme qui va-, lait beaucoup moins que moi, et qui me commanda de pénibles , uravaux. Il m'envoya dans les enfers pour emmener le chien qui , les garde, ne croyant pas qu'il fut un combat plus terrible. Je , le vainquis, et le trainai hors des enfers avec l'aide de Minerve , aux yeux bleus." Lorsqu'Hercule eut parlé ainsi il rentra dans ... la demeure fatale. "

Minerve fait allusion à ce combat d'Hereule contre-Cerbère et à la protection qu'elle lui accorda, par l'ordre de Jupiter, dans un passage de l'Iliade, Chant VIII. v. 362 — 372. Hercule est encore nommé dans un autre endroit de l'Odyssée, Chant XXI. v. 24 — 30, où le poéte l'appèle μεγάλων ἐπίιτοςα ἔξγων et le fait contemporain de la jeunesse d'Ulysse. Il est fait mention d'Hercule dans quelques autres endroits des poémes d'Homère, mais ces passages n'ont rien de caractéristique. On les trouve notés à la fin de la plupart des éditions d'Homère. (10).

Voilà donc ce qu'Homère nous apprend d'Hercule. Y estil question du Dieu-Soleil? Y a-t-il un scul mot qui puisse s'appliquer à cette idée abstraite de la force du principe actif? la moindre allusion à cette idée?

La mythologie d'Homère est en général fort éloignée des abstractions métaphysiques. Il serait absurde de chercher un germe d'unité réligieuse à une époque où l'homme gouverné par ses sensations et fier du développement de ses forces individuelles ne s'élevait pas à la hauteur du principe divin, mais abaissait les Dieux a sa portée. Le tableau que le poéte fait d'Hercule est absolument physique. En comparant ces passages d'Homère avec le passage que nous avons déjà cité de Nonnus, on pourra joindre d'un coup - d'œil les deux extrêmités de la mythologie greeque.

Mésiode chercha à régulariser le système théogonique. D'anciennes traditions, des opinions vulgaires, quelques notions générales de physique furent le canevas sur lequel il s'exerça. Sa généalogie des Dieux est vague et même obscure en plusieurs endroits (10). On sent que le fil lui échappe, et qu'il a peine à suivre la marche irrégulière des traditions et des allégories (11).

L'immense influence d'Homère sur tous les siècles est trop connue pour avoir besoin de l'appuyer de preuves. Tous les genres de littérature puisérent à cette source sacrée. L'épopée surtout resta son domaine exclusif, et ses nombreux imitateurs copiérent servilement la partie technique de sa langue, et de sa versification dans leurs moindres détails. Les Grees croyaient avec quelque vraisemblance, la tragédie et la comédie, nées des poémes d'Homère.

Les poétes tragiques et lyriques, forment la seconde époque de la poésie Greeque. Ils décélent déjà un état plus mûr de la société civile et politique. Les tragiques chercherent leurs sujets dans un cercle de traditions dont la plupart étaient originaires des écrits d'Homere. Sophoele a fait sur Hercule la tragédie des Trachiniennes. Il y a suivi l'opinion commune en Grèce qui en faisait un héros. Rien n'y décèle le Dieu-Soleil; il y est même quéstion du Soleil (11) comme d'une divinité supérieure et protectrice.

À cette époque d'éclat qui dura long-tems et su l'apogée de la gloire littéraire de la Grèce, succéda une époque différente où la philosophie, née dans l'orient, chercha à s'emparer de toutes les branches des connaissances humaines. Elle parvint à leur donner une direction nouvelle. La Poësie lui soumit ses brillans écarts. Les mythographes commencérent à s'occuper des traditions orienta-

⁽¹⁰⁾ Voyez sur Hesiode et sa Théogonie une dissertation très importante de Hermann:

de Alythologia Graecorum antiquissima. Il est impossible de montrer des apaperques plus mgénieux et plus de sagacité.

⁽¹¹⁾ Chor. v. 96 et passim.

les, à fouiller dans les antiquités, à remonter jusqu'aux sources; la frivolité apparente du Polythéisme faisait rougir les Philosophes. On essaya de soulever le voile qui le couvrait pour découvrir le dépôt mystérieux qu'il renfermait dans son sein. Les Stoïciens se distinguérent par leur constance à chercher le seus allegorique des fables (12).

A cette direction de l'esprit public se joignit par la suite la crainte qu'inspira un culte nouveau d'autant plus formidable qu'il était simple et qu'il reveillait dans le cœur de l'homme la pensée engourdie de sa dignité morale. Le Polythéisme attaqué dans ses sanctuaires, appela la philosophie à son secours. Une réligion qui croulait de toutes parts, offrait peu de moyens de défense. Alors parût le Platonisme d'Alexandrie.

Convaineus de la faiblesse interne du culte ancien, les éclectiques combinérent un système très étendu. Pour le fonder, il fallut chercher dans les décombres du Polythéisme le fil de quelques doctrines mystérieuses qui n'y étaient plus. Il fallut dire : "Le "Polytheïsme n'est pas un culte sans morale, sans but, sans dignité. "Le peuple a été trompé; mais les sages de tous les tems et de "tous les lieux, ont su que sous cette enveloppe frivole était déposé "un noyau, un trésor de lumières, dont le vulgaire devait ignorer "l'existence. Ce trésor avait été perdu; nous l'avons retrouvé."

Tels furent les principes d'après les quels on commenta la mythologie ancienne. Pour donner de l'unité au Polythéisme, on voulut tout ramener a une seule base; pour lui prêter un caractère intéllectuel, on che cha une intention morale dans chacun de ses symboles; on fit violence aux autorités les plus respectables; on feur en substitua de nouvelles tronvées dans les débris des temples de l'Egypte. D'anciennes doctrines furent rajeunies; d'obscures traditions tirées de la poussière. Tout le vaste édifice de la Théologie Grecque fut reconstruit à neuf.

⁽¹²⁾ Cicer. de Natura Deor. passim.

Les Platoniciens les plus fameux: Plotin, Proclus, Jamblique, l'Empereur Julien et ses sophistes favoris, travaillérent avec ardeur au nouveau Polythéisme. Tous procéderent a posteriori.

C'est à cette époque qui embrasse un assez grand espace de tems qu'il faut rapporter la plupart des explications métaphysiques des dogmes du Polytheisme; explications consignées dans les écrits des Platoniciens, et des Pères de l'église. Delà, date aussi l'hypotlièse de l'identité d'Hercule et du Soleil. Le témoignage d'Eusébe est sans replique. Il consacre le troisième livre de sa préparation Evangélique à combattre le sens allégorique que les adhérans du Polythéisme prétaient alors aux fables de la mythologie. Il dit ausujet de celle d'Hercule: "Mais pour ne m'occuper que d'un exem-" ple isolé, n'ont ils pas osé faire du Soleil seul plusieurs dieux? ", n'est il pas pour eux à la fois Apollon, Hercule, Bacchus, Escu-" lape? mais comment le même personnage sera-t-il père et fils, 2, Apollon et Esculape? comment se trouve - t - il métamorphosé en: "Hereule, né d'une mère mortelle? comment le Soleil en fureur "égorge - t - il ses ensaus? Il est vrai qu'ils disent que les douze , travaux d'Hercule représentent la course du Soleil à travers les-25 douze signes du Zodiaque; mais que féront-ils d'Eurystée qui ", ordonne au Soleil ou à Hercule d'executer ces travaux? De .,, quelle manière appliqueront-ils au Soleil la chemise funeste teinte " du sang miect du Centaure?"

Il est évident que cette hypothèse célèbre de l'identité d'Hereule et du Soleil se trouvait au nombre des moyens de défense employés par les partisans de l'ancienne réligion. Ils n'en négligeaient aucun. Le Platoniciens déployérent toutes les ressources de la mystagogie; ils essayéront de ressusciter le magisme. Aussi de toutes les hypothèses sur la doctrine secrete du Polythéisme, celle qu'ils favorisérent le plus est un culte universel du Soleil, comme principe actif de l'univers; hypothèse indiquée par quelques écri-

vains antérieurs; mais que les Platoniciens adoptérent, et dont Dupuis de nos jours, se constitua l'inventeur.

Si les adhérans de son système mythologique voulaient soutenir que l'identité d'Hereule et du Soleil était un dogme de la doctrine secréte du Polytheïsme, on pourrait répondre que c'est éluder la quéstion, que de la transporter sur un terrein tout à fait conjectural. Il est très vraisemblable d'ailleurs que la doctrine secréte du Polytheïsme, rensermait des vérités d'un ordre supérieur et des faits beaucoup plus importans que ne l'est au fond l'identité d'Hercule et du Soleil. Il serait nécessaire d'ailleurs qu'il y eut eu d'avance quelqu'analogie entre l'idée que les anciens se formaient d'Hercule, et celle qu'ils se formaient du Soleil, comme principe vivillant de la nature. Nous avons vù qu'à la premiere époque connue du Polytheïsme, Hercule était considéré comme un héros déifié. Homère plaçait son ombre dans les enfers avec celle d'Achille et d'Agamemnon. Nous avons vû que cette tradition subsista long tems sous cette forme; et fut en vigueur pendant les plus beaux siecles de la Grèce. Certaines divinités telles que Cerès, Baechus, Rhéa on Cybéle, eurent des l'origine un caractère mystique. D'autres par la suite furent considerées sous les rapports de l'allégorie; mais l'Hercule grec ne fut jamais dans le culte populaire qu'un personnage historique (12), et les preuves de cette assertion, se trouvent dans tous les écrivains antérieurs à l'Ere chrétienne.

Il est évident que le Soleil a été l'un des premiers symboles de la Divnité; mais le culte du Soleil, culte très éténdu, était d'origine étrangère; il était né, il s'était développé dans l'orient, et outre la disproportion des objets, on a peine à concevoir l'alliance bizarre d'une réligion orientale et d'un héros absolument grèc. Cette dernière réflexion me conduit à renouveller iei une protestation que-j'ai déja faite ailleurs, mais que les connaisseurs me pardouneront de répéter encore une fois. Il s'est introduit depuis quelque tems dans l'étude de l'antiquité, une manière absolument défectueuse et

qu'il est important de signaler: trop long-tems on s'était borné à ne considérer le vaste ensemble de la Mythologie prise dans la plus haute acception du mot, que sous des faces absolument isolées; les graves défauts de ce système, se sont fait assez sentir par le vuide et l'incohérence de toutes les théories qu'il a fait naître. Depuis que par une heureuse révolution dans la science on a reconnu unanimement les vastes et nombreux rapports qui établissent une liaison intime entre toutes les parties des traditions religieuses de l'antiquité, on s'est vù entraîné dans l'excès contraire. C'est surtout en Allemagne, ou l'étude de l'antiquité a fait de si belles conquêtes et des progrès si immenses, que cette nouvelle manière trouve maintenant des sectateurs passionnés. "Personne n'admire plus que moi, ai - je dit dans un autre écrit (13), l'hypothèse qui place dans l'orient le berceau de toutes les idées réligieuses et philosophiques; mais tout en reconnaissant la beauté de cette hypothèse et la rigoureuse justesse des appereus qui en résultent, je dois dire avec franchise qu'il me paraît tout à fait absurde de ne vouloir pas faire la moindre part à l'esprit des Grees. Il est incontestable que le Polythéisme est issu de l'Orient; mais il ne s'ensuit pas que les Grecs n'ayent été sous ce rapport si important que des imitateurs serviles et sans invention. Est il vraisemblable en effet que le vif génie, que l'imagination brillante de ce peuple qui se fraya partout des routes nouvelles n'eut à offrir rien d'original, rien de national sous le rapport de ses idées religieuses. c'est à dire, sous le rapport de la source préciouse de son caractère historique et de sa gloire littéraire? (13)"

mmmmmmm

⁽¹³⁾ Nonnos von Panopolis, der Dichter. St. Petersburg, 1816. 4.

474

NOTES.

- (1) "On ne peut pas toujours expliquer par le Soleil seulement quelques fables d'Hercule qui semblent avoir principalement pour objet son image céleste ou la constellation qui le représente. C'est une distinction qui n'est pas à négliger. " Origine de tous les cultes. T. 1. page 318.
- (2) Lucien de Samosate, s'est fort agréablement moqué de cette double nature d'Hercule dans son XVI^{eme} dialogue des morts. Ce morceau est une preuve de plus, que même à l'époque de Lucien, les anciennes traditions sur Hercule étaient généralement suivies et n'avaient pas fait place aux nouvelles explications.
- (3) Nonnus ne pouvait manquer d'être influencé par l'esprit de son siécle, à une époque ou le Platonisme avait fait les plus grands progrès. Il est vraisemblable d'ailleurs que les commentateurs modernes ont souvent pris le change sur ses écrits; souvent, ils ont converti en découvertes nouvelles et profondes les brillans écarts de son imagination. Son abondance d'idées poëtiques, et son penchant pour les étymologies tendent des piéges à ses lecteurs sans qu'ils s'en doutent: Il faut un tact singulièrement exercé pour distinguer le Poete d'avec le Mythographe. Tout ce qui regarde Nonnus et son siècle a été discuté dans un ouvrage que jai publié sous le titre de Nonnos von Panopolis, der Dichter. St. Pétersbourg 1816. 1. v. 4°.
- (4) Il y a encore à ce sujet une observation générale à faire: La terminologie étrangère copiée par les Grées, ne peut inspirer aucune confiance; nous en voyons la preuve dans les fragmens de Sanchoniaton conscrvés par Eusèbe. Les Romains à leur tour, s'appropriérent la terminologie Greeque d'une manière fort infidele; de

sorte que les noms Grecs correspondent mal avec les noms Orientaux, et les noms Romains assez mal avec les noms Grecs.

- (5) Le savant Cumberland, en parlant des rapports qui subsistérent entre l'Egypte et la Grèce à l'époque la plus reculée, remarque que ces rapports furent par la suite interrompus pendant long-tems. Cumberland, Sanchoniato's Phénician history. London 1720. pag. 79.
- (6) On trouve dans l'Etymologicum magnum que les Egyptiens donnaient à leur Hercule le nom de Chon, τὸν Ἡξακλῆν Φασὶ κατὰ τὴν Αἰγυπτίων διάλεκτων Χῶνα λέγεθαι. Court de Gebelin assure que ce mot dans la langue copte signific force, puissance, vertu efficace (Monde primitif. T. I. p. 182). Mais on ne trouve nulle part que les Egyptiens ayent placé leur Dieu Chon dans le char du Soleil; ils ne donnaient de char ni à Osiris, ni à Horus. L'idée du char est visiblement Greeque.
 - (7) Je sais que l'on comptait non seulement un Hercule Egyptien (Hérodot. L. H. c. 43). Mais encore un Hercule Indien; Cicéron le dit expressement (De natur. Deorum L. III. c. 16) Arrien l'atteste également (hist. Ind. p. 319); mais il me paraît evident que l'Hercule Egyptien comme l'Indien étaient des divinités nationales qui n'avaient d'autres rapports avec l'Hercule Grec que quelque ressemblance accidentelle, soit dans leurs attributs, soit dans la manière de les représenter, et dans le culte extérieur. Les savans auteurs des recherches Asiatiques, croyent reconnaître dans l'Hercule Indien que Cicéron nomme Belus, Bala ou Balas, le frere de Crischna, communément appelé Bala-rama, ou Bala-deva (T. IX. pag. 33) Mais les antiquités Indiennes étaient encore plus mal connues des anciens que les antiquités Egyptiennes. Hercule me semble un personnage tout à fait Grec, un Héros populaire idealisé d'après le quel on a nommé mal à propos plusieurs divintés étran-

gères, et que par un système contraire on a voulu regarder ensuite comme la copie d'autres Dieux étrangers, dont la signification et l'emploi, correspondaient aux fonctions et à la physionomie d'Hercule. Cicéron cite aussi un Hercule Phrygien, un du Mont-Ida, un de Tyr. Les Celtes adoraient un Dieu que l'on a aussi nommé Hercule (Voss. de Idololatr. L. 1. c. 35.) L'Hercule Phénicien mérite une attention particulière.

(8) Bryant, que Dupuis semble n'avoir pas connu, a inséré dans son intéressant ouvrage (A New System or analysis of ancient mythology. London 1775 in 4°.) une dissertation particulière, par laquelle il tàche de prouver que vù l'extrême légereté des Grecs, leur négligence et leur orgueil national, les meilleures autorités sont les témoignages des écrivains postérieurs, et de ceux qui n'étaient pas nés proprement en Grèce. Parmi les poétes, il cite Lycophron, Callimaque, Appollonius de Rhodes, Nonnus, les commentateurs des poétes anciens; parmi les philosophes, Porphyre, Proclus, et les autres Platoniciens; parmi les Pères, Théophile, Tatien, Origène, Clément d'Alexandrie etc. ce raisonnement est plus spécieux qu'il n'est juste: Le témoignage des anciens Poëtes grees, ne saurait être admis qu'avec la plus grande circonspection, toutes les fois qu'il s'agit de vérités historiques quelconques. Mais sous le rapport mythologique les poétes sont une source irrécusable précisement parcequ'ils offrent le type des opinions et des connaissances de leur siécle. Ainsi il ne s'agit pas de peser la valeur d'un passage d'Homère, ni de découvrir ce qu'il pensait de tel ou tel dogme du Polythéisme, mais bien de déterminer ce que l'on en savait en général de son tems. Voilà sous le rapport mythologique, l'usage que l'en doit faire des poètes. Une étude combinée des Peres et des Platoniciens, est sans contredit l'une des bases de l'étude de l'Antiquité; mais on ne peut s'y livrer qu'avec la plus grande précaution. Les Pères, dont les écrits sont si precieux, ne mirent dans leurs recherches sur l'ancienne théologie grecque, gueres plus de critique que les Platoniciens. Comme ils s'appliquaient à cette étude principalement dans l'intention de combattre le Polythéisme, ils se servaient à dessein de différentes sources: et plus ils confondaient les époques et les notices, plus ils donnaient une apparence absurde et incohérente au système dont ils avaient résolu de sapper les fondemens. Bryant reduit à son tour presque toutes les pratiques du Polythéisme à un culte primitif du Soleil, mais il ne se hasarde pas comme Dupuis à ramener immédiatement à la même source toutes les divagations de ce fleuve immense. Mr. Bailly dans ses lettres sur l'atlantide, a déclaré que l'on ne pouvait douter qu'Hercule ne fut un embleme da Soleil, p. 124.125. Les hypothèses de Mr. Bailly sont assez décréditées maintenant, pour qu'il ne soit plus nécessaire de les combattre sérieusement.

⁽⁹⁾ Toutes les autorités citées par Dupuis à l'appui de son système sur Hercule, sont postérieures à l'Ere Chrétienne. Cet argument est sans replique; cependant nous irons plus loin: si l'on trouvait par hazard dans un écrivain antérieur au Christianisme un passage qui favorisat l'hypothèse de l'identité d'Hercule et du Soleil, on aurait tort de s'en prévaloir. Le Polytheisme reposait sur une liberté de penser et d'enseigner indéfinie. Le fait est que cette identité n'a jamais été qu'une idec moderne (si l'on peut s'exprimer ainsi) systèmatiquement introduite dans l'antiquité; et voila ce que nous croyons avoir suffisamment démontré.

⁽¹⁰⁾ Dans les hymnes homériques se trouve le fragment d'un hymne adresse à *Hercule cœur - de - Lion*; nous le rapporterons ici pour constater le caractère que les anciens lui donnaient, d'autant plus que les hymnes homériques appartenant à une époque postérieure, peuvent figurer en quelque sorte le second âge de la mythologie Greçque.

Είς Ἡρακλέα Λεουτό-θυμου. Ἡρακλέα, Διὸς ὑιὰν ἀκισομα, ὁν μέγ' ἀριστον γκινατ' ἐπιχθονίων, Θήθης ἔνι καλλιχόροισιν, ᾿Ακμήνη, μιχθώσα κελαινεφέι Κροιίωνι: "Ος πρὶν μεν κατὰ γαῖαν ἀθέςφατον ἡθὲ θάλασσαν πλαζόμειος, πομπήσιν ὑπ' Ἐυρυθήος ἀνακτος, πολαὰ μὲν αὐτὰς ἔρεξεν ἀτάσθαλα, πολλὰ δ' ἀνέτλη. Νῦν δ'ἤθη κατὰ καλὸν ἕθος νιφόεντος 'Ολύμπου ναία τερπόμενος, καὶ ἔχα καλλίσφυρον Ἡβην. Χαῖρε, ἀναξ, Διὰς υἱέ, δίδου δ'ἀρετήν τε καὶ ἄλβον.

"Je chanterai le fils de Jupiter, Hercule, le plus grand des "humains qu'Alemène aimée du Jupiter aux nuages noirs, mit "au monde à Thébes (dans l'original: aux belles danses) Er"rant sur la terre et les mers, par ordre du Roi Eurysthée,
"Hercule causa de grands maux à ses enuemis et en souffrit
"beaucoup lui-même. Maintenant il habite plein de joye, la
"brillante demeure de l'Olympe couvert de neiges, et il pos"séde la belle Hebé. Salut, ô Roi, fils de Jupiter, accorde
"nous la vertu et le bonheur."

Ce morceau donne une nouvelle force aux savantes objections de l'évêque de Cesarée. Le grand prix que les peuples anciens mettaient à la force du corps, qu'ils regardaient comme un don particulier de la divinité, pourrait fournir une explication de la fable d'Hercule plus vraisemblable et plus analogue à la nature de l'esprit humain, que les paradoxes ingénieux des Platoniciens.

(11) Hésiode nous a laissé un fragment connu sous le nom de Bouclier d'Hercule. Ce seul morceau suffirait pour determiner irrévoeablement le caractère du Mythe d'Hercule. La description du Bouclier est liée au recit du combat d'Hercule contre Mars, et contre son fils Cygnus. L'idée qu'Héside donne d'Hercule, est parfaitement conforme au tabléau d'Homère. Aucune circonstance par-

ticulière n'y décèle la moindre intention métaphysique. Non seulement Hercule y est représenté comme le fils de Jupiter et d'Alcmène, comme un Héros soumis à de cruelles épreuves, mais il y est même plusieurs fois question d'Apollon, et de la protection qu'il accorde à Hercule; voici les passages les plus remarquables:

'Αλλά οἱ (Κύκνω) εὐχωλέων οὐκ ἔκλυε Φοῖβος ᾿Απόλλων' αὐτὸς γάς οἱ ἔπωςσε βἰην Ἡςακληκήν, πᾶν δ'ἄλσος καὰ βῶμος ᾿Απόλλωνος Παγασαίου λάμπεν ὑπαὶ δειιοῖο Θεοῦ τευχέων τε καὶ αὐτοῦ. V. 67.
. . . Ἐν δ'ἄςα μέσσω ἱμεςσεν κιθάςιζεν Αητοῦς καὶ Διὸς ὑιὸς κρυσκή Φόρμιγγι V. 201.
. V. 476.

(12) En disant qu'Hercule est un personnage historique, nous ne nous engageons pas à prouver qu'il ait effectivement existé. Nous disons seulement que les traditions en faisoient un homme doué d'une force merveilleuse, soumis pendant sa vie à des épreuves très dures, et placé dans le ciel après sa mort. Diodore de Sieile, dont Dupuis a voula en vain atténuer l'autorité, nous a conservé l'ensemble des traditions sur Hercule (L. IV. c. 151). On croirait au reste que le Mythe d'Hercule a été d'avance destiné à être torturé de toutes les facons possibles. Outre les écrivains qui en ont fait le Soleil, le savant Leclerc (Bibl. univ. T. I. p. 245.) en a fait un négociant Phénicien; Banier, un véritable Héros (Myth. T. VII. L. III); Pluche, une enseigne où Horus était peint une massue à la main (hist. du Ciel, T. I. p. 255). Bryant croit reconnaître dans le récit des exploits d'Hercule, l'histoire des couquêtes d'une nation entière (Tom. II. p. 73.). Bergier n'a vu dans ce Héros qu'une digue de terre bien battue, et dans ses travaux que des ruisseaux et des marécages de l'Argolide enlevés par des goufres profonds, ou tournés par des bergers ou desséchés par des canaux (Orig. des Dieux T. II. passim) M. Hüllmann Professeur à Königsberg a énoncé récemment dans un ouvrage publié sous le titre de principes de l'histoire de la Grèce (Anfänge der Griechischen Geschichte. 1814) son opinion sur Hercale, qu'il envisage comme la dénomination collective de plusieurs colonies Phéniciennes et Carthaginoises. Les détails du Mythe d'Hercule, représentent d'après cette hypothèse qui semble appartenir à la fois à le Clerc et à Bryant, les combats, entreprises, établissemens de ces colonies le long de la Méditerranée. Quot capita, tot sensus.

(13) Voyez sur ce sujet dans la troisieme lettre de Hermann a Creutzer (Briefe über Homer und Hesiodus, Heidelberg. 1818, pag. 64) une observation trés importante et qui donne un grand poids à la mienne. L'opinion de ces deux savans sur le mulhe d'Hercule ne s'accorde pas avec mes idées; mais ce serait mal connaître les interêts de la Science que de ne pas émettre avec franchise ce que l'on croit la vérité. La dissérence consiste principalement en ce qu'ils mettent au commencement du Mythe, le sens allégorique que je voudrais placer à la fin. Ils supposent que l'on a été du composé au simple; tandis que je tiens la marche inverse pour la seule vraisemblable. J'ai peine à croire, je l'avone, qu'une croyance populaire, formée comme celle des Grees, ait eu pour élémens des combinaisons d'une aussi haute metaphysique. Hercule a commencé par etre un héros deifié; il a fini par etre le Dieu-Soleil. Comment admettre une marche opposée? - Au reste la publication de la correspondance de MM. Hermann et Creützer est un service signalé rendu à la Litterature et aux reclierches mythologiques. Je me suis d'ailleurs expliqué sur le mérite de cet excellent ouvrage dans l'ecrit intitulé: Ueber das Vorhomerische Zeitalter, St. Petersburg, 1819.

EPITAPHIUM CUFICUM MELITENSE ANNI P. C. N. MCLXXIV..

C. M. FRAEHN
INTERPRETATUS EST.

Consessui Acad. Imp. Scient. d. xxiii Sept. a. MDcccxviii proposuit.

In compluvio domus cujusdam de amplissimis Melitae civibus insertus muro cernitur lapis cum longà inscriptione magnis characteribus Arabicis exaratà, monumentum Arabum quondam Melitae dominantium superstes. Exempla ab hac inscriptione expressa docti hospites complures secum abstulerunt; at operam lusisse videntur. Celeberrimo Assemanio proposita est; at non constat, quo interpretationis successu usus sit. Celeberrimum etiam Camillum Falconetum de cà consuluerunt; atque is quidem asseruit, in medio lapide legi epitaphium filiae cujusdam Arabis nobilis, nomine Hassan; quae autem a tribus partibus circumjecta cernantur, esse sententias de communi hominum fatali sorte, e Korano petitas. Sed hace universe et laxius, nec omnia recte quidem dicta. Multi deinceps alii vivi doctrinae excellentis interpretationem hujus inscriptionis tentarunt, sed irrito successu (1).

Post tot irrita conamina qui multis illis magnisque, quae sane objiciuntur, difficultatibus nil territus fortiter aggrederetur arduum opus, est vir in omnibus virtutibus excellentissimus Andreas Jacobides Italinsky, Eques, Augustissimo Russ. Imperatori a consiliis areanis ejusdemque ad Osmanidarum Sultanum antea, jam vero ad Pontificem maximum Romanum Legatus. Tantà in nobilitate at-

⁽¹⁾ V. Fundgr. des Orients. Vol. I. p. 393.

que luce quis non miretur tetricae Minervae singularem amorem? at vero studium in ipso argumento, quod non nisi hominis chartis impallescentis esse videbatur, illustrando positum quis est, obsecro, qui mecum non stupcat etiam? Habet sane Russiae Musa Asiatica, quod s bi gratuletur talem in ipsis magnatibus fautorem et cultorem intelligentem. Vir illustrissimus hujus epitaphii interpretationem novam et talem, quae ad singula atque omnia descendat, accuratâ ipsius cippi imagine et animadversionibus philologicis auctam, libri egregii Viennensis modo laudati Volumini primo (²) inseruit.

Operi enique incipienti favendum; quia maxima difficultatis pars in aggrediendo negotio sita Hoc si arduum est, quis primus tentans non hie illie pedem in eo offendat, quis non aberret a vià? Συγγιωμη πρωτοπαρα, et شمال ما بين السهل والعزل Atque in hoc qui dem epitaphio, bone deus, quot salebrae asperrimae ubique impedium! Character Arabicus ad Karmaticum, quod vulgo dieunt, genus accedit, ductibus mire et absque ulla norma intricatis et inflexis, obrutus ornamentis superfluis, quae saepe ab ipsis litteris aegre distinguas, idemque, quod molestissimum est, mirandum in modum vagus et inconstans; unde fit, ut primo intuens non possis non exclamare (cum Plauto): haec praeter Sibyllam leget nemo! Jam adde maximam elogii partem, non Koranicis, ut alias plerumque, constantem sententiis, sed a cippi auctore forte profeetis iisque sublimiore atque poëtico conceptis stylo, id quod divinandi et interpretandi difficultatem magnopere augeat necessum est. Quid igitur, obsecro, mirum, si qui primus hoc volvere saxum forti brachio et multà vi aggressus fuit, prius, quam totum evolvisset, deficeret. Ego quidem neutiquam miror; et mihi fidem habeatis oportet, si modo verum est, quod dieunt المطلى بالنار اعلم بعره.

Nimirum et ipse rem tentaham, sed idem ipse deficieham, et quidem integer defatigato quasi succedens.

⁽²⁾ p. 393 - 397.

Etenim anno MDCCCXI nactus primum Fodinarum Or. Volumen quum in illà epitaphii Melitensis interpretatione, utut omnibus numeris absoluta a el. Editore dicta sit (3), racemandum aliquid relictum animadvertissem, quae racematus eram, ut rectone incederem tramite docerer, communicabam illi viro, quo vix subactior alter in hac palaestrà palaeographicà exstitit, Olao Gerhardo Tychsenio, tunc incl. Universitatis Rostochiensis Procancellario et LL. OO. Professori meritissimo, nunc eheu rebus humanis erepto. Erant autem fere haec: in No. 1 omnia fere jam codem, quo nunc lego, modo legenda videbnm; in N°. 2 legebam على pro على pro على pro على pro على in N° 3 نخر pro نخر; in N°.. 4 recte jam tunc legebam versum انظر بعينيك عل في الأرض من بات او دافع الموب او للموت من primum: versus etiam secundi initium recte quidem transcribebam , sed adeo dubitanter, ut alias simul proponerem conjecturas. In iis, quae proxime sequuntur, misere hallucinabar. Et ultimum versum tune temporis transcribebam hunc in

Male. وفي مدرن وهباعن لما تدمت من عمل معمى على وما خلفه باتيا : Male

Senex grandaevus, quo me meaque studia amplectebatur favore singulari, ita ad posita a me rescripsit sub finem anni MDCCCXIII:
"Ich ersehe zu meiner innigsten Freude aus ihrer Kritik des Tran"seripts und der Uebersetzung der Malthesischen Cufischen Grab"schrift in dem Th. I. p. 393 f. der Fundgruben des Orients,
"dafs Sie auf dem geraden Wege der glücklichen Entzitferung der
"alten Arabischen Denkmähler und ein Meister in der Kunst sind;
"weil Sie sich genau an den Buchstaben halten, und nicht zu leicht
"nubem pro Junone ergreifen. Als ich im Jahr 1810 das obge"dachte Volumen der Fundgr. erhielt: so bemerkte ich freilich alle
"die Versehn in der Area figurata, die Sie auch gefunden haben,

^{(3) 1.} é. p. 393 ., Vessuno riuscì mai a darne una traduzione ragionevole e com piuta. Alla fine noi abbiamo il vantaggio di averla attualmente, eccet.

" und welche die zum Theil sehr gekünstelten und veränderlichen " Buchstaben - Figuren leicht veranlassen konnten."

Addebat, se a. MDCCCXII, quo cel. Hartmannum, Professorem Rostochiensem, et cl. Migistrum Sjöbring, Suecum, in legendis marmoribus Cuficis exercuerit, hujus epitaphii interpretationem perscripsisse, eamque licet in re-non una parum sibimet ipsi satisfacere professus ad me transmisit.

Ego vero leetà, quae ab hoc etiam tanto viro prosecta erat, interpretatione, animo (quid negem?) cadere, spem perdere, consiliu n abjicere hujus aenigmatis Oedipaei unquam a me solvendi. Attamen intervallo sat longo interjecto denuo sorte id perlustranti mihi aliquantum plus lucis videbatur assulgere. Observata a me, etsi nondum omnes numeros habeant, in medium proserre non dubitavi, siquedem ut sat trito dicto utar) אַבעל אַל פֿגעל פּגעל אַל פֿגעל אַל פֿגעל אַל פֿגעל אַל פֿגעל פּגעל بسب الله الرَّ الله الرَّ الله الرَّ الله الرَّ الله الرَّ الله الرَّ الله الرَّ الله الرَّ الله على النَّبِي مُحَمَّد وعلى النَّبِي مُحَمَّد وعلى الله وسُلَّمُ تُسْلِماً لله وسُلَّمُ تُسْلِماً لله

العزّة وُالبُقَا وَالبقى با] وعلى خُلفه كُتب الْنَنا وَالبنى با] وعلى خُلفه كُتب الْنَنا وَالننى با] وُلكُمْ في رَسُولِ الله إَسُوةٌ حُسْنَةٌ مُذَا قُبْرُ مُيْمُونَةُ بَنْتَ حُسَّانَ بَنِ عُلَيّ الْهُذَالِيّ [الهدابن بيراهدابن عَسَّانَ بَنِ عُلَيّ الْهُذَالِيّ [الهدابن بيراهدابن عَسَّانَ بيراه وليد بير وليد بير وليد بير وليد من الله وعابها بيرا يُومُ الْخَبيسِ تُوفِيّتُ رَحْمُةُ اللّه عُليْهَا [نور ويرحه الله وعابها بيرا يُومُ الْخَبيسِ السَّادِسَ مَنْ شَهْرِ شَعْبَانَ الْكَانِ [الكابر بيرا] مِنْ سَنَة تِسْعٍ وُسِتِينَ عُشَر مِنْ شَهْرِ شَعْبَانَ الْكَانِ [الكابر بيرا] مِنْ سَنَة تِسْعٍ وُسِتِينَ وَمَنْ مَنْ شَهْرِ شَعْبَانَ الْكَانِ [الكابر بيرا] مِنْ سَنَة تِسْعٍ وُسِتِينَ وَمُشَمَّانِةً

وُهِيْ تُشْهُدُ أَنَّ لاَ إِلَّهُ اللَّهُ وَحْدُهُ لاَ شَرِيكُ لهُ

i. e.

In nomine Dei, miseratoris, misericordis; et bene precetur Deus Prophetae Mu'hammedi atque

genti ejus et salutem impertiat omnigenam. Dei est potentia et aeternitas, sed creaturis ejus sancita est caducitas. Vobis autem in Apostolo Dei exemplum est egregium. Hoc est sepulcrum.

Maimunae filiae 'Hassani, filii 'Aj, Huseilitae, Praefecti (vel Frumentarii Susae [/t: Ali Elhud, filii Susani. Tychs: Ali Elhud, filii Welidi, Susani].

Animam reddidit illa, cui gratia divina contingat, [Ital. Che iddio lo illumini e gli sia benigno. Essa cessò di vivere (4)] ferià quintá (s. die Jovis) sexto

decimo mensis Scha'ban, qui est [It: "magni" (5)] anni quingentesimi sexagesimi noni (6).

Testabatur autem non esse Deum praeter Auah, unum, aequali carentem.

Ital.

O tu che miri la tomba! in essa sono io tratta quale sposa; porto le ciglie ingombre di polverc; il sonno della morte mi ha chiusi gli occhi (7).

Tychs.

"O is, qui videt hoc sepulcrum, quod equidem dudum exstruxi, "et mausoleum excelsum, quod me tegit et angulos in cubili meo,"

⁽⁴⁾ i e. "quem Deus illuminet et benignus respiciat! Desiit ea vivere."

⁽⁵⁾ del gran mese di Sch.

⁽⁶⁾ I. e. d. 21. Mart. a. 1174 p. Christ. nat.

⁽⁷⁾ i. e. 5, O tu, qui contucris hoc sepulchrum! tracta in id sum tanquam sponsa, su22 percilia gero oppleta pulvere; mortis somnus meos occlusit oculos."

Fr.

O tu, qui vides (hoc) sepulchrum, en ego abscondita in eo delitesco, puivere inquinante pulpebras meas et rhanteres meos in (hoc) meo recubitorio.

 N° . 3.

ُومُفَّامِي فِي الْبَلَآءُ عبر وُ فِي نُشُورِي

وَجُنَّةً [وجنّة Tychs. ودين الله

Ital.

Però questo stato di prova è transitorio; nell' ora della resurrezione, quando il Creatore mi restituirà alla vita, rivedrò piena di gioja i mici congiunti, e felice ne riporterò la mercede 8).

⁽⁸⁾ i. e. "Attamen hic status tentammis transibit; die resurrectionis, quum Creator me "revocaverit in vitam, lactitus plena denuo videbo cognatione mihi junctos coque "felix mercedem reportabo."

Tychs.

"Et statum in tentamine, exemplum capiat! Sed in meà re-"surrectione, quum me vivificaverit creator meus ad gloriam et pa-"radisum,

Fr.

At commoratio mea in tentamine non diuturna est; atque in resurrectione meâ, ubi impertiar sorte meâ, nanciscar gloriam et paradisum.

 N° . 4.

Ital.

الطب ننسك ملّ في الارض من نافي او دافع الموت اوللموت مرزاء في

الموت اجر جنى قصرافيا استا لم يتحير ماه القانى واعلافى ضرّ وتب مهيا بما مرقد من عمل محصا علا وما خلفه باقياه

Il genio del tuo animo risplendette quì in terra nella tua condotta in una maniera discordante: or nel procurar di rispingere la morte, or nella sollecitudine di rendertera vantaggiosa. La morte è dessa che fa passare allo stato della celeste rimunerazione, ove si gode il soggiorno dei beati tra il rezzo dei campi ameni ed il mormorar dei ruscelli d'acque perenni. Risorgeranno però dannati a soffrire pene atroci, aspersi dalle acque soporifere, li perfidi ma'fattori i quali non hanno dietro loro lasciata nel mondo accuna opera buona (').

⁽⁹⁾ i. e. "Indoles animae tuae hîc in terrà se manifestat modis inter sese repugnantibus, vel "mortem repellendi studio vel commodum ex ea capiundi conatu. Mors ipsa est "; qual perduch an statum remunerationis coelestis, ubi beati facti commorantur in-

Tychs.

أنظر بعيني مل في الأرض من باقى او دافع الموت او للموت من راب في

الموت اجر عُبّى فضلا فى اسافى لُمُّ يتحيّر مُنَّة القرانى واعلى فى طرب وهَناء رُبّها قدمت منْ عُمُل محصّ على وما خلفه باقيًا

"Oculis meis contemplabor (10), num sit in terra perennis aut mortem propellens (11), aut respectu mortis quis vidit in

"Morte praemium amoris mei (in Deum), lucrum pro moerore moo? Restitutio in integrum seliget beneficium constellationis meae et summum.

, In hilaritate et voluptate saepe praestitit praxi examinationis meae et ei adhaerescentibus bonis operibus. "

أَنْظُرْ بِعَيْنِيْكَ مُلْ فَي الْأَرْضِ مِنْ بَاقِ أَوْ دَاْفِعِ الْمُوْتِ أَوْ لِلْمَوْتِ مَنْ رَاقِي مَنْ راقِي الْمُوْتُ أَضْرَجْنَى قُصْرًا وَيَا أَسْغَى لُمْ تُهُجِّنَى مِنْهُ أَبُوابِي وَأَغَلَاقِي

.

^{,,} ter camporum amocnorum umbras et rivotum peremium murmura. At Damnati ,, ad subeunda sapplicia acerba resurgent, aqua adspersi soporifera, impii seclerati, ,, qui bonorum operum muil in mundo post se reliquerunt.

التينير legendum est, ut nunc video, non vero بعيني. Inde jam pro apodosi hace habens, verto: Tu (spectator) contemplare.

⁽¹¹⁾ Vide me supra pag. 483.

وُصِرِتُ رَعْناً بِمَا قُكَّمْتُ مِنْ عَمُلٍ مُحْضَرِ عَلَى وَمَا خُلْفَهُ بِاقِي

Oculos attolle et vide, sitne in terrà, qui perennet, aut qui repellat mortem, aut mortem qui magicis ai erruncet artibus.

Mors me sustulit violenter, nec eheu! me miseran salvare potuerunt portae meae neque serae meae.

Jam oppignerata teneor cum pro iis, quae (in alteram vitam) praemisi, operibus ibi mihi repraesentandis, tum pro eo, quod retro reliqui (12).

Jam agedum ad singula a nobis eruderata, quae egere videntur, testimoniis corroboranda accingamur, caussas etiam addentes eas, quae, quominus idem cum Duumviris laudatis sentiamus, impediunt.

ad No. 1.

⁽¹²⁾ Pressius converti, metu ne circumscribendo Arabica vel consuetudini Latinae magica accommodando alieni quid immiscerem.

⁽¹³⁾ Vid. Abulf. Annal. op. Reisk. T. I. p. 126.

⁽¹⁴⁾ Quod in numo Seldschukidico apud Adlerum in Mus. Cuf. Borg. Tom. II. No. LVIII. بسم أمير الروشين deprehendatur, quum tamen hîe المنابع scribendum fuisset, id jam olim miratus sum, in L. de num. Bulgh. p. 45. Et reete me offendit insolita ratio. Nam deinceps hîc loci in Bibliotheca Imperiali publica numum vidi Adleriano simillimum, ex quo intellexi ven. Adlerum in

illam, quae litterae; altius (ut item solet in hac formula) ascendenti praefixa est, pro ornamento habere, quali passim in hoc epitaphio litteras praeter morem modumque auctas videre est, veluti أسنى in أسنى أ etc.

operarum errori adscribendum arbitror. Quem enim fugerit usus tritae illius formulae faustae apprecationis, soli nomini Mu'hammedis prophetae (15) apponi solitae: صلى الله عليه وسلم, et mos eidem insuper haud raro, عليه عليه وسلم seu ad vim augendam, adjiciendi المناكيد — Ceterum in مان (6) illo absolute posito observo subintelligendum عليه, quod modo praecessit, scilicet: et dicat ei: es-salam aleik. Talem ellipsin usus fert Arabicus, e. c. Hist. X Vezir. ed. Knös pag. 87: تضيا مارينها و نحزا . 405: المنابع وساوي ; et, qui inprimis apposite ad nostram caussam facit, locus est in praefat. 'Alii ben Sultan Mu'hammed Herawi ad Commentar. suum in Banet So'ad وشرفاه كرمه وشرفه كياه كالمنابع وساوي الله عليه وسام وشرف وكرم بيان الله عليه وسام وشرف وكرم المناك الله عليه وسام وشرف وكرم المناك المناك الله عليه وسام وكرم الله عليه وسام وكرم الله عليه وسام وكرم المناك الله عليه وسام وكرم المناك المناك المناك الله عليه وسام وكرم المناك الله عليه وسام وكرم المناك الله عليه وسام وكرم المناك الله عليه وسام وكرم المناك الله عليه وسام وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك الله عليه وكرم المناك المناك المناك الله عليه وكرم المناك المناك المناك المناك المناك المناك المناك المناك المناك المناك المناك المناك المناك المناك

legendà hac voce erràsse. Nimirum non إسم, sed أقسم legenda est. Vide meos Beiträge zur Muhammedanischen Münzkunde p. 50.

Exstat de hoc argumento tractans libr Arabicus, (vid. Herbel. art. Delail et Giozuli) isque nuper Musco Academiae Asiatico accessit. Inscriptus est دلايل الخيرات وشوارت الأنوار في ذكر الصلاة على النبي المغمار لابي النجرولي. Hie codex agit de faustae, quae Mu"ham nedi Pr. fit, apprecationis rirtutibus et de variis haic Prophetae prospera precandi modis. (Eide n Mapto, etiam insunt: nom ia seu epitheta Prophetae CCI numero, et imago الروضة المبارك s. Mu'hammedis sepulcrum, quod Medinae est, repraesentans.)

bet; quem errorem miror non correctum esse ab aliis viris doctis VI chaelem citantibus. — Contra equal egere, quam en mallem Abulf. Ann. T. III. 614, ubi textus sic habet:

graphicum esse pro والبقال, vix est quod moneam. Neque vero ipsum والبقال recte haberet. In archetypo video l in fine voeis, nempe والبقال recte haberet. In archetypo video l in fine voeis, nempe والبقال , idque ipsum تانية seu rhythmus in على والبقال obvius requirit. — Utor opportunitate oblatà annotandi, verbum بقى cum suis derivatis etsi plerumque de aeterná duratione ideoque fere de Deo, ut hoc ipso loeo, adhiberi amet, — unde البادى seu immortantate gaudere negant; (12) — tamen et hominibus fausta apprecantes, ut fere modum execdunt Orientales, passim eodem utuntur, ut pro: Deus te salvum conservet in serum aevum; atque sic quoque in Inscriptione Turris Diarbekrensis, in Niebuhr. Itiner. T. II Tab. XLIX, legendum vialo pro i quod O. G. Tychsen. in Elem. Arab. p. 01 dedit.

prae se ferre videatur, malui tamen النناء, Elif ultimum ob spatii angustiam decurtatum

⁽¹⁷⁾ Veluti Elmacin. pag. 74. الابقا اللانسان, et alius poēta apud eundem p. 48: مناسب بالباقى, nec non p. 263: اعلم بانك لا بقالك (sic leg.), item Ibaer-Rumi apud Reisk. ad Abulf. Ann. T. H. not. 446: وليس ببانى ولا خالك (Mutenebbi in Reisk. monum. med. p. 78: منا ابقى

esse censens, quemadmodum etiam in J του δ in Epit. Panorm. in Rosarii Gregorio Rerum Arab. Sic. Collect. p. 146 observare est. Την δμοιοπτωσιν ita bene habere, jam antea momui (18). Neque vero conveniret البَقَاعُ. nec cum البَقَاعُ. nec cum

in Korani lecis in Fod. Or. اسوة (وكام في رسول الله اسوة هسنة citatis, ubi cadem formula legitur, exemplum quod imiteris propositum denotat. Qui sensus quum mihi parum aptus videatur in hoc aliisque, ubi occurrit, epitaphiis, أسوة intelligo de exemplo, quod ad tristem solandum adhibetur, dum seil, aliorum illi exempla recenses, quemadmodum bene explicuit Pocock ad Togr. 197. verbo nempe (et consolandi potestas inest, unde Lexicographi ipsum solamen etiam interpretantur. Usum a Pocockio ad-وال علائم من دوني : Tograï v. 46 علائم من دوني المعالم ductum probabunt hacc exempla . Ibn-Dorcidi Poem. v. 193 ed. فلا عبب لي اسوة بانحطاط الشبس عن زهل Scheid: في خطوب الناس للناس اسي , Abulf. Annal. T. II. p. 84. لم بشنة اذا طيف بالراس منه : ct poët. ib. T. IV, 588 ولنا بما تبلنا اسوة Perbene hace faciunt ad nostrum illustrandum locum ejusque hunc sensum probandum: hand mirandam esse communem hominum fatalem sortem, quum vel ipse Murhammed Apostolus divinus eam non effugerit; imo ex ejus tanti viri exemplo sou onsolationem capiundam esse (19). Adjicere expediet ש الناس إعلىوا ال الموت: παραινεσιν ex Chutbå aliquà Kasanensi ايها الناس إعلىوا

et النناء و distincte cernuntur, veluti in Puteolane apud Ros. Gregorio I.c. p 152., et in Alessanio ib. pag. 106 initio versus Cufici secundi, quod, ab Interprete non captum, ipsum الفناء و est.

⁽¹⁹⁾ Recte me assequenum hujus sententiae sensum, Petropoli copiam Collectionis a Rosario Gregorio editae nacius intellexi; nam ibi oul cum el solamen conjunctum occurri pagg. 152. 155. 166. quod, quae vis priori vocabulo tribuenda, diluonde docet.

معقود بنواصم (20) لا بد من ذوته لكل امير ووزير وكل صغير و كبير وكل مسكين ونتير ما نجى من الموت ادم صغى الله وما نجى من الموت نوع نبى الله وما نجى من الموت عيسى روع الساعيل ذايع الله وما نجى من الموت عوسى كليم الله وما نجى من الموت عيسى روع الله و ما نجى من الموت عيس الموت و بملوكم الله و ما نجى من الموت عيد حبيب الله يا توم الموت كل ننس ذابتة الموت و بملوكم الله و ما نجى من الموت عيس و الموت و بملوكم الله و ما نجى من الموت عيس و الموت و بملوكم الله و ما نجى من الموت عيس و الموت و بملوكم الله و ما نجى من الموت عيس و الموت و بملوكم الموت و بملوكم الموت و بملوكم الموت و بملوكم الموت و

Ceterum sententia, quà cum maxime occupamur, passim in elogiis sepulchralibus occurrit, verum ab interpretibus parum animadversa videtur. Sic in titulo Cufico Columnae l'apideae, quae Musei Societatis Antiquit. Londin. est, felicius quidem ab O. G. Tychscnio quam ab omnibus, qui ante eum tentaverant, explicato (Rostoch. 1789), neutiquam tamen ad liquidum jam perducto, versibus 3-5 exstat. Sed vir doctissimus quod in legendum erat, minus recte legit idque vertit: decessit, e vità nempe; quasi hoc verbum etiam (quemadmodum in cue all. obtinet) de mortis itinere usurparetur. Non ita est. idae a suis diremtum et ad proxime sequentia tractum pro titulo habuit defuncti Jusufi. Attamen in Tab. adjectà, nec non pag. 9, ipse dubitans

[.] بنواصیکم Leg. (20)

⁽²¹⁾ Quod in MS. est يَا دُومِ المُوتُ mihi non arridet.

maluit legere السفر , quod ex archetypi characteribus manifeste السفر exhibentibus neutiquam clicueris. Vertit autem: ora. At orandi vis huic verbo non inest. Imposuit viro doctissimo Castelli Heptaglotton, in quo phrasis اسفروا بالنجر (est ea autem ex 'Hadis desumta) liberalius conversa est: orate multo mane. Verteris potius: surgite cum prima aurora; sed quia ibi de precatione agitur, potuit utique reddi per صاوا مسنوس

Occurrit item in epitaphio, quod in turri ruinos à Lily-baei (Marsalae) cernitur apud Rosar. Gregor. l. c. p. 155, at perperam lectum — أسنرعن هذا تبر et perperam versum: ipsique Apostolo dei (scil. adscriptus est interitus.) Ora apud hoc sepulcrum — coll. b. Tychs. in Elem. Ar. p. 64. qui item أو (vel p. 146. أف decessit) et أسنرعن ألله السنرعن ألله السنرعن ألله السنرعن ألله السرة وعزاء in legato dei — exemplum, quod animos erigat, et solamen est.

Etiam in Epitaphio Puteolano apud Relandium in Diss. de Marm. Arab. Put. pag. 5. et apud Rosar. Gregor. 1. 1. pag. 152, quae Relandus النبوة وعدا legit vertitque: impleat deus praedictiones prophetae suo factas, Abbas autem de Longuerue non addità transcriptione ita reddidit: persolvit totum debitum istud Apostolus. Supplicate ei (Deo); nam misericors est, — ipsam illam sententiam paullo pleniorem sistunt oid cuello lugato ejus exemplum, quod vos erigat, et solumen habetis.

Porro eadem sententia in Cippi Messanii apud Rosar. Greg. L. c. p. 166 fragmento deprehenditur; nam posterior ejus versus, quem b. Tychsen. non cepit, hunc in modum legendus est: النتاء وني رسول الله اسوة وعزاء عذا تبدايي بكر i. e. (creaturis sancita est) caducitas. Sed in legato dei exemplum animos erigens et solamen est. Hoc est sepulchrum Abu-Bekri—

المسان المورد ا

Accipe, quae, quominus (بن على الهذلي والي [مارز] السوسة in iis, quae in Fodin. Or. et apud Tychsenium exstant, acquiescat, animum impediunt. Nomen proprium على الهد auribus Arabicis insolitum plane esse judico; unde admittere dubitaverim. Quod proxime sequitur Cr. potius, quam Cr. legendum foret. Videtur duetus ille, qui per connexas superne litteras s et s trajectus est, pro ا habitus esse, hujus rationis patrocinio forte petito a الشرك الله in ultimo hujus N. versu, quod eadem in caussa versari videtur, nisi I male excidisse in apographo statuere may.s. At monco, hunc ductum in hoc epitaphio solummodo ornaudi caussa passim adjectum esse, nt in ابن et عمل ; deinde ابن si legeris, admitti, quod linguae، legibus non satis conveniat. Je, non Jel, scribendum, quum praecedit nomen proprium simulque sequitur nomen patris, caque conigi- و constituunt. جملة السبية constituunt. جملة السبية tur legendum foret. Quamquam hoc non uigeo, quatenus tam in libris quam in monumentis passim contra hanc regulam grammaticalem peccatum est. Neque ad hoc ipsum approbandum facile inducor. Litteram b initialem altius productam desendere utcunque posset initio epitaphii et بسر apud Rosar. Greg 1. c. p. 106 in fine alterius versus Cufici, alia exempla ut taceam. Verum tamen nostro loco neque b initialis, nec, quae sequitur littera, n finalis esse videtur; imo quisquis accuratius adspexeris, vix poteris, facere, quin pro-

habeas (22), coll. على No. 1. 1. 5. et لماتى No. 2. Quo conjuncto cum praecedenti insolito الوذلي, habebis الوذلي i. e. Huseilites. oriundus ex Huseil, celebri illà tribu Arabica. Idque posui - At enimvero vocem proxime sequentem, hujus versus penultimam, unam de difficillimis et maxime ambiguis totius elogii pronuntiare non du-Exc. Italinsky transcripsit; quamquam ipse sibi diffidens in versione exprimere veritus est. Estque sane nomen insolens, licet a ductibus archetypi non abhorreat. Equidem aliquando, vocem praecedentem الرزلي legens , hanc والك (pater) suspicabar transcribendam; sed quod alieno loco posita, nec usitata tali in caussà est, item quod ultimam litteram vix pro d habeas, damnabam. Tychsenius legit وليك Walid s. Welid. Nomen proprium autem, quale Welid est, licet, si vocabulum antecedens ce legendum foret, optime huc quadraret: tamen, ut de hujus er fide non constat; ita in hanc et ipsain lectionem وليك notandum est, d a consuetà figurà in hoc epitaphio alias usitatà nimis abhorrere, atque potius n vel s (i) vel r finalem esse videri. Hanc igitur lectionem recipere veritus, dedi الهذلى والى (ماسر vel) السوسة, licet mihi ipsi nondum satisfaciens et meliora circumspiciens. Scilicet nec mea nullum dubitationi relinquunt locum. Si والى legeris, / quidem sequenti litterae junctum tuetur رسول الله quod supra legitur; sed hanc, quae cernitur, o finalis figuram quo tuear non invenio nisi forte in primi versus Columnae prope Monasterium S. Georgii in Ros. Greg. Coll. p. 143; licet illam summa, in quà hujus ipsius litterae ductum finalem versari hoc epitaphium probat, varietas excusare queat. Numquid igitur مامر legere praestat? Unice verum pronuntiarem, nisi negotium facesseret haec vox hie tanquam muneris appellatio adhibita. Quod autem السوسة legerim pro السوسى, id tueatur litterae 4 finalis negligentius exarandae consuetudo. Susa,

⁽²²⁾ Etiam Tych senius id non negavit, ita quidem sentiens in responso ad me dato:
,, Es kann freilich, was unmittelbar auf folgt, gelesen werden; allein da.
,, durch werden die folgenden Namen ungeniesbar.

cujus iste Hassan sive Wali i. e. praeseetus, gubernator, sive Mair i. e. sive Mair i. e. sive mentarius s. rei sive magister surit, est urbs s. Maghrebi medii, C. mill. Arabicis a Tuneto in littore maris mediterranei sita, ex quâ egressi Arabes Siciliam expugnărunt. (23)

Erit post me (spero), qui unius illius vocabuli, quod in ea, quae hujus clogii esse deprehenditur, characterum inconstantia, oluctum, ebu etiam, imo vel oluctum est et ilegi possit, demonstret veram lectionem; quo facto et de praecedente proxime et de proxime sequente certius constabit.

Ad ca, quae horum loco in Fodin. Or. leguntur, liceat in hi hace observare. in faustis apprecandis defuncto adhibetur quidem, neque tamen, quod sciam, sine ad-ضريعه vel ، مرقله بره , vel نور الله قبره , vel ضريعه all. Postremi exemplum habes in Vitá Saladini, ed. Schult. p. 15. Quale nomen quum hic non sit adjectum, saltim in نور exspectaveris. At haec lectio suffixum ad posterius verbum rejicit, atque post idem verbum ponit vocabulum ul priori verbo postponendum; id quod ferri nequit. Nec minus admitti potest illud يرمه Constat Arabibus praeteritum vices optatīvi supplere, cujus usus caussus expositas lege sis apud Pocock. in Spec. Histor. Arab. p. 56 sq. et Schultens. ad Johum p. 496. Memini quidem mihi aliquando unum alterumve exemplum, quod eandem vim etiam aoristo inesse probare videbatur, occurrisse; sed vel in vitio cubabat locus, vel alià interpretationis ratione expediri poterat; unde annotare supersedi. Nostro autem loco ne haec quidem exceptio admitti posset ob positum practeritum verbi praecedentis iec. Porro guod transcriptum est ويرحبه cum pronomine scilicet personae mas-

⁽²³⁾ Vid. Abulf. Africa ed. Eichh. p. 24 (coll. p. 6.). Edrisi apud L.M. Hartmann in Eichh. Bibl. T. IV, p. 609. Kurzmann, in Paul. Memorabil. T. III. p. 30. not. etc.

culinae, quod versio ad patrem defunctae referre videtur, jam ideo probari haud potest, quod haec fausta comprecatio post interjecta plura aliorum nomina patri neutiquam competere existimanda est: nec vel ad defunctam, cui quidem competit, ita posita trahi potest. Omnino dicendum fuisset: رهمهم الله اجمعين — Quod sequitur, legendum, in Fodinis Or. transcriptum est عليها, figurà ante obvià pro , habità, quum tamen unum de illis ornamentis sit, quae lithurgus inepto consilio passim interspersit. Atque hoc quidem ا وغايرا l. l., ut ex versione patet, idem valere censetur ac: mors autem ejus fuit vel accidit. Quid? quod nota etiam addita usum hunc firmare studet. Habet autem ita: "Possedo un manuscritto nel quale trovasi in varj lochi il verbo غاب unito al verbo ولما مات quasi per rinforzar la significazione dell'ultimo, e. g. راما مات ed ecco un passo in eui il sustantivo عاب ha la medesima significazione che ha in questo epitafio: واوصت الى عبل الله إخيرا با .Si tratto ـــ اوصى اليها عمر وبصلة تصاقت بها بمال وتفه بالغابة quì di Hassan una delle mogli di Maometto, la quale morendo raccomanda a suo fratello ciò che suo padre Omer le avea raccomandato, fra altre cose la distribuzione delle limosine prese dai fondi da lui a questo fine morendo consacrate." Ad haec non possum non observare, eam, quae verbo inesse dicitur, potestatem, quà conjunctum cum observare hujus vim intendat, mihi valde dubiam esse. Equidem non memini me deprehendere hune usum. Nam etsi de Hakimi illius famosi fine in Drusorum libris et alibi occurrat verbum غاب, id explicandum ex historià hujus principis, quem supra naturam in divorum numerum referebant sectatores; nec vertendum: mortuus est, sed vero: disparuit, oculis hominum subductus est, εξα τροπων ήθοντοθος quo eodem sensu etiam Masdar hujus verbi eusurpatum, e. c. Eichh. Repert. T. XV. p. 277 et alibi. Pronius ad fidem foret, in loco priori in Notà laudato de sepultura intelligere. Nimiram Wan - kuli sub artic. - (locus latentior, profundior, fun-

dus putei etc.) adduxit formulam loquendi: عَيْبُكُ عَيْابِكُ (lego: عَيْبُكُ عَيْابِكُ i. e. abdidit eum locus latens ipsius seu serobs ipsius), adjectà interpretatione : ان دفن في قبره i. e. conditus est sepulchro suo. (24) Hoc ipsum autem غياب est unum de Masdaris verbi عياب, non Hoc, uti et 4/16, ejus forma singularis, in altero loco notae adducta, neque cam, quae in Fodin. ipsi tribuitur, neque eam, quam in in inesse probavi, significationem habet. densiorem denotat, لانّها تغيّب ما فيها s. quia abscondat quod in illà est, uti Ibn-el-Asir observat apud Pocock. ad Togr. p. 97. Pleni sunt hujus usus libri Arabum, inprimis Poëtarum. Quod autem attinet ad locum paullo antea memoratum, ex MS. nescio quo adductum ad probandam protestatem mortis vocabulo غاب (imo dest) inesse, ille plane aliud quid vult. Equidem eum verterem hune in modum: Illa testamento assignavit fratri suo 'Abdullaho idem, quod sibi olim assignaverat 'Omar, simul et quidquid opum sacro titulo s. piis usibus ab ipsa legatarum in Ghaba eleemosynae nomine possidebat. Num Je recte habeat, neseio.

⁽١٠٠٠) Numquid ex hoc Dscheuharii loco originem traxit, quod Castellus ad Spec. Hdam habet: "abdidit, recondidit eum sepulchro, cega."? Legitne Golius أَوْمَا لَهُ عَمَّا اللهُ وَعَمِّ اللهُ وَعَمَّ اللهُ وَعَمِّ اللهُ وَعَمَّ اللهُ وَعَمِّ اللهُ وَعَمَّ اللهُ وَعَمِّ اللهُ وَعَمَّ اللهُ وَعَمِّ اللهُ وَاللهُ وَ

Mallem الله . An vero excidit يعنى ? Etiam in nomine 'Hassan, filià 'Omari et unà de Mu'hammedis uxoribus, de quà hic sermo esse dicitur, offendo. Neque حسن vel مساك nomen mulierum est, neque tale nomen alicui uxorum Prophetae fuit. Haud dubie de مند 'Hafsa agitur, quam, 'Omari filiam, a Mu'hammede in matrimonium ductam memorant auctores; vide sis Abulf. Annal. T. I. p. 194. Mas'ud. in Vat. et Rink. Leseb. p. 110. پيرعلى وصيتى (ed. Kasan.) pag. 21 et al. - Ghaba autem, hic articulo praefixo ad peculiarem notionem restrictum الغابة, est nomen loci, haud dubie sylvosi, haud procul a Medinà versus Syriam, vid. 'Abd-ul-Hakk apud Koehl. ad Excerpt. ex Ibn-cl-Wardi pag. 170 not. 10 (ubi the ex Cod. Lugdunensi restituit Editor, licet Dresdensis, addo, et Lundinensis, nec non Kasanensis, dent (عانة). De adi etiam Ibn - Kotaib. in Repertor. T. XIV. p. 110 sq. Abulf. Ann. T. I. p. 114. (ubi Reiskius, minus recte pro nomine appellativo habuit) et Wan - kuli, qui: وغابهه موضَّك اسمى در عبارده Sed haec sufficient.

Quam ego dedi lectionem tueri supersedeo; adeo cippi characteres ei exacte respondent, adeo legibus usuique linguae consectanea est, adeo nemo non cognitam habet phrasin in libris et epitaphiis tritissimam: مرفيت رمية الله عليه mortua est, gratia divina beanda, proprie: Morti, Angelo mortis, Deo, quasi debita, soluta est vel cessit illa, super qua misericordia dei sit. Scil. وَفَى forma quinta activa verbi وفي (completus fuit etc.) propria sua vi denotat: factus est vel fuit talis, cui integrum solveretur i. e. debitum sibi ab aliquo accepit, indeque mortalem, quasi debitum sibi, recepit Angelus Mortis, Mors, Deus (-5). Unde passiva hujus formae potestas: mortuus est (26).

⁽²⁵⁾ Nempe (ut cum Tarafa loquar) ما الآيام الأعارة vita nostra non est nisi mutuo nobis data (coll. Vit. Timur. T. II, 86.), quam igitur fas est a nobis resutui Deo, qui credidit, vel angclo mortis, qui ejus nomine recipit. Conf. Sche-

In Fodin. Or. typothetae culpâ impressum وعشرين) In Fodin. Or. الكابر , il gran mese di Schaban. " — Addunt quidem Mu'hammedani passim mensium suorum nominibus epitheta honorifica (27), e. c. رشهر الله الأحمّ (vocatur et رجب المرجب المرجب (وفعال الماركم ومضال الماركم

refed-din T. I, p. 335: Elle rendit à l'Ange Israel [l. Israel] la vie, qu'elle n'a. voit qu'en depot; et Chondemir in 'Habib-es-Sijar T. III. f. m. 589 vers. المان أبواع تسليم نمود.

⁽²⁶⁾ Occurrit haec verbi forma, sensu moriendi, haud raro in libris scripta active scilicet; item in Castelliano certe Heptaglotto haec eaden vis Activo tributa legitur; atque adeo ipse S. de Sacy, auctor in rebus ctiam grammaticis gravissimus, active phthongisat ributa legitur; atque adeo ipse S. de Sacy, auctor in rebus ctiam grammaticis gravissimus, active phthongisat ributal equipate professivo hac, de quà agitur, potestate praeditum (vid. e. c. ejus Gramm. T. II, p. 270. 295.) Attamen in solo Passivo hanc vim obtinere et ributal professivo hanc vide se se ributal professivo hanc vim obtinere et ributal professivo hanc vim obtinere et ributal professivo hanc vim obtinere et ributal professivo hanc vim obtinere et ributal professivo hanc vim obtinere et ributal professivo hanc vim obtinere et ributal professivo hanc vim obtinere et ributal professivo hanc vim obtinere et ributal professivo hanc vim obtinere professivo hanc vide se ributal professivo hanc vide se ributal professivo hanc v

⁽²⁷⁾ De quo more vide sis M. T. Beckium ad Ephemerides Persarum p. 7. et Voyages de Chardin, ed. Langl. II. p. 104.

ipsum cippi ductibus non minus conveniens, i. e. existens, qui est, fuit, quod vocabulum Arabes passim inter mensis et anni notam pleonastice interponunt, cujus usus exempla adducere supersedeo (26).

الرستين) In Autographo copula abesse videtur (ut ca sane in aliis etiam monumentis inter ipsa numeralia haud raro male omissa est), nisi forte circulo cum subjectà lineolà hic quidem eam repraesentari vis. Similiter Elif conjunctionis paullo post sequentis Ul excidisse statuas oportet, nisi illud in duetu per conjunctas superne litteras et in voce تشهد transacto latere mavis.

⁽²⁸⁾ Id vero nune notare juvat, in Monumentis Cuf. Siculis apud Rosarium Greg. p. 118 càdem plane vià crratum esse. Transcripta ibi sunt: من شور فى القعلة الحرم من سنة sed tu ita corrige: القعلة الحرم من سنة admodum jam cel S. Assemani in Mus. Cuf. Nan posuit. — Etiam ib. p. 155 mensis Rabi male auctus est epitheto

xit: Moribundis vestris suggerite testationem, non esse deum, nisi Aliah. ($^{\circ}$)

ad No. 2.

In hoc N., uti et in NN 3 et 4, sepulta ipsa loquens inducitur, raro exemplo, quod sciam, in Muhammedanorum epitaphiis, sed frequentissimo in Romanorum, quibus Allocutio ad viatorem in hac caussà magnopere adamata fuit.

mihi ita insolitum accidit, ut ريا من را القبر اني diu, admitterem nec ne, incertus haererem. Attamen postquam in omnes partes characteres hos vertendo, quod magis arrideret, non potuissem elicere, admisi, quia et in poëmate 'Akila dieto apud ill. L. Baron. S. de Sacy, tam in Extrait du Tome VIIIe des ·Notices et Extr. p. 143, quam in Mémoire sur la litterat. des Arabes p. 180, coll. notà, item in nomine urbis Irakensis eundem scribendi modum deprehendebam. Sed سرمن ران pro سامرا vide, quisquis post me hoc idem elogium aggressurus es, lateatne in hoc versu aliud quid. Conjicicham aliquando : يا من ران اقترابي vel يا من ران لعبراتي Certe ante المتبر . . Certe ante demonstrativum منا desidero. Displicet etiam h. quidem loco ال غبت) Olim legendum censebam بليت , duplicem admittens interpretationem. بليت si pronuntiaveris, sensus exiret hie: jam corrupta sum in co (septilchro), jam putrida evaserunt in co ossa Habes hoc sensu بلى Abulf. Ann. T. III. p. 396. Mutenebb. ed. Reisk. pag. 78 et 89. Satis commode haec jungi posse cum proxime sequentibus videbantur. Sin vero protuleris بليت

⁽²⁹⁾ Vide Muradg. d'Ohsson Allg. Schild. des Osm. R. 1, 389. Vita Saladin. ed. Schult. p. 276. al. La Vie de Timur. Bec par Cherefed. din T. IV, p. 228. Historia prior, regum Persar. ex Mirchonde p. 70.

apte praemitti. Jam vero lego: اتى تر فيست به apte praemitti. Jam vero lego: اتى تر فيست به ecce ego in eo (sepulchro) abscondita delitesco, scil. quemadmodum olim in gynaeceo latebam. In memoriam revoces velim, lector, أُخَبُّهُ , de puellà domisedà e gynaeceo in publicum non prodeunte, verecundiae et modestiae caussà, dici solitum, vid. Mutenebbi ed. Reisk. p. 86. et conf. proverbium الفبى من مغياة in Meidanii Prov. op. posth. Schult. p. 243. In figurà litterae in noli offendere; habes eam ipsam in voce مسئة ir N°. 1. l. 6.

pulverem, arenam denotat, e. c. Meidan. Prov. op. p. Schult. p. 208, peculiariter autem tumuli, tellurem tumulo aggestam, veluti Bord. vers. 58. ad quem Scholiastes Heratensis: الترب بعنى التربة أو النرايب (pro ult. voc. legend. التراب), Muten. ed. Reisk. pag. 77. Poët. alius apud Reisk. in Act. Erudit. 1749. Jan. p... et passim alibi.

inquinavit pulvere, ab exc. Italinskyo recepi. Antea legebam على, quia status praescns et cum maxime vigens mihi visus erat hic requiri, eujus nota praepositio على est; quae praeterea, crebra in vestitu particula, hic in tegumento etiam aptum locum oecuparet. Sed غير recte habet tueturque eam lectionem أعبر in N°. 3.

apud Wan - kulium, non, ut vulgo explicant, cilia (Augenwimper) quae turcice كرنتهاغى (tatar.) audiunt.

tatar. νείτει, unde pl. امانی, est oculi angulus ad nasum, ταταν. νείτεις, graece κανθος et, quia inde lacrymae stillant, βαν-

THO dictus. Sic Scholiastes ad Hamas in Vat. et R. Les. p. 146: موت هو طوف العين الذب يلى الأنف وهو مغرج الدمع , cf. etiam Scholiast. ad Harir. Mekam. XIV. I. c. pag. 140. ubi ad explicandum مدامع adhibetur. Inde, ut hoc ipsum مدامع, non quidem de oculo in genere, sed de oculo lacrymante, lacrymis tumente, usurpatur haec vox, quae fere styli sublimioris et poëtici est, v. c. 'Hamas, l. c. Poët. in Abulf. Ann. T. III, p. 270. S. de Sacy Chr. Ar. p. 256. et loco ex Anthologia laudato ab exc. Italinskyo. Hic autem teneri velim primam ejus et propriam significationem. Notus est foeminarum Orientalium mos, collyrio Jedicto oculos suos denigrandi, vid. Arvieux Sitten der Beduinen, p. 112: "Den Rand ihrer Augenlieder schwärzen sie mit einem schwarzen Pulver von Bleyerz, das sie Kohel nennen, und ziehen eine Linie von gleicher Farbe nach dem Augenwinkel, damit die Augen größer scheinen sollen, " quibus adde quae ex aliis itinerariis ad h. l. not. 35 attulit celeberr. Rosenmuellerus. Ad hunc morem hîc alludi suspicor, quasi dicat defuncta: ego quae quondam palpebras, imo cilia, rhanteresque colhyrio denigrare solebam, jam utrumque pulvere foedatum habeo in hoc meo recubitorio. Comparandus omnino est Mutenebbi 1. c. ubi Reiske inter وكم عين مقبلة النواهي كعيل بالجنادل والرماد: p. 89: alia: "Mit dem Augenpulver, mit dem die Morgenländer ihre Augen bestreuen und färben, vergleicht der Diehter den Sand, den Staub, die Kieselsteine, unter welche die Leiche verscharrt ward."

Proprie locum recubitis, recubitorium, lectum, torum genialem denotat; deinde ad sepulchralem domum, quietum sepulchrum transfertur, veluti in egregio illo epicedio in Ma'anum in Schultensii 'Hamasa: فيا قبر معن انت اول هنرة من الأرض خطت للسامة فضيعا, (unde ct ضيع pro sepulto cum altero habes in poëseos specimine praeclaro in Abulf. Ann. T. IV, p. 562.) Similis metaphora obtinet in مرقال cubili, deinde cubili sepulchrali e. c. Koran. xxxv1.

v. 52. Cf. Slapigravi, pro sepulchro, apud Lipsium in Epistad Belg. Cent. III. p. 52 et Owenii Epigr. p. 52:

Angli Bed lectum vocitant, Cambrique sepulchrum; Lectus enim tumuli, mortis imago sopor.

Jam cur ab iis, qui ante me hujus epitaphii interpretationem aggressi sunt, hic etiam in nonnullis recedere coactus fuerim, si cognoscere vis, hace habe. Versum secundum legere utique cum exc. Italinskyo et b. Tychsenio liceret: انی قل بنیت به , verun neutrius versionem usus linguae tuetur. Italinskyus vertit: "in essa (la tomba) sono io tratta quale sposa." - Dicunt Arabes vel, (quod, etsi improbetur Dscheuhario, tamen longe usitatissimum est,) אול יושל , quod proprie sonat: אול יושל , quod proprie sonat: per vel eum sponsa construxit seil. سية Kubbam seu tentorium fornicatá formá, quod solus cum solà sponsus ingrediatur, indeque idem valet atque: n'aptias cum aliqua celebravit. Sie Mas'udi 1. c p. 109. تزوجها وهن بنت سنين وبنى بها بعد الهجرة بسَبعة اشهر et Abn-Sacarja in Eichh. Repert. T. VII, p. 138. Quo eodem sensu et endem . ست سنین تم بنی بها وهی بنت تسع سنین cum ellipsi non solum forma hujus verbi octava utuntur (e. c. Ibnet Elmac. p. تروهیا وابتنی بها ۱46: بیل et Elmac. p. osed etiam verbo دخل بها بنت العسى , ut ابننى ببوران بنت العسى , proprie: intravit (sponsus) cum ed tentorium nuptiale (30). Ad ellipsin illam quod attinet, conferas velim Abulf. Ann. T. I. p. 210: Ex exemplis autem hisce, quae وضرب له قبة وطيبها بالبعور واجنم بها facili negotio augere possem, patebit, L. hoc sensu de sponso dici, non vera de sponsa; et licet in Hist. X Fesir. ed. Knös V. Cl. p. 89 legatur: انها دخات على ابن الملك وحبات منه, id vitium esse judico, Arabismo recentiori corrupto tribuendum, cui simile quid in sextum a Fugà saeculum vix ceciderit. Non potui igitur hanc amplecti lectionem.

⁽³⁷⁾ Moneo as èv مرومان , in Nocte CLXIII adjectà Richards. Grammar of the Arab. lang. pag. 206 legendum فافرا دخلت بها

Qui sequitur versus tertius et quartus, în Fodin. Or. recté lectus versusque est; sed qui ex Anthologia aliqua ad الترب laudatur versus, non erat afferendus, si quid video. In eo enim non الترب legendum, sed الترب , qui, plur. عربة , tymbos, tumulos significat. Verto: Tymbi comprehendunt decus formae pulcherrimi cujusque mortalis.

In ultimo hujus N.-vocabulo, quod θ invitis characterum ductibus lectum est, non immoror.

In alia omnia autem abiit Tychsenius of μαμαριτης. Conjungenda ipsi visa est haec areola lateralis cum initio sequentis, Numero 3 insignitae. Verum enim vero in ejus interpretatione quominus acquiescas, inter alia impediunt haec. بنيت به pro: exstruxi id, ab usu linguae respuitur, quippe qui aedificium, quod exstruis, in accusandi casu poni flagitat. Porro الترب علية non significaret: mausoleum excelsum, sed: mausolea sunt excelsa. Addit quidem tumulus excelsus القرَب على ; , vere ut dicam, adest القرَب على vel supra me; تُرُبُّ tamen usu frequentius est." Sed nec hac vià barbarismum fugeris. Neque enim ترب Arabes unquam, quod sciam, significatione tu- تربة pro ترب pro على significatione tumuli sumere liceat, الترب على mausoleum excelsum significare potest, sed: mausoleum est excelsum. — Verba ultima واماني في مضجعي legendi ratio viro beato mecum convenit, non vero intelligendi. Vertens: et (qui videt) angulos in cubili meo, quid intenderit, non intellexeris, nisi ex notà addità: "Forte cubiculum, inquit, in quo sarculus positus, octogonum erat." Scilicet seni grandaevo imposuit Lexicorum angulus oculi, quod alios etiam quoscunque angulus designare existimavit, quod non ita est. Videtur etiam cubile et cubiculum promiscue habuisse. - Haec cum aliis, quae taceo, sunt,

quae hanc viri pie defuncti interpretationem neutiquam admittendam probant.

ad No. 3.

Sed commoratio mea in tentamine est

transitus (عبر), non diuturna est. Sic ego, praeeunte exc. Italinskyo: però questo stato di prova è transitorio. Sed moneo, de = 1/2 mihi dubia oboriri. Significat quidem haec vox tentationem, peculiariter divinitus immissam, sumiturque sive in bonam, sive in malam partem, praecipue tamen in malam; unde passim denotat afflictionem, calamitatem, miseriam, quà homo hoe in mundo probatur quasi, veluti Koran. II, v. 46. coll. Scholiast. ad 'Harir. Mekam. XIV, p. 134. et Glosså Korani Petropolita-, البلاء على ثلاثة اوجه نعمة والهتيار وهكروه : 4 no - Kasanensis pag. 194; ubi pro نعمة legendum est اختيار, idque rectius منعمة anteponendum erat. Verum an eadem vox etiam de سوال القبر seu de transactae vitae examine post mortem in sepulchro a Munkir et Nekir angelis instituendo, aut de statu hominis inter mortem et resurrectionem intermedio adhiberi possit, ambigo. Liceret quidem quodammodo huc trahere Koran. XXI, v. 36. كل نفس ذائلة الموت sed ordinem sermonis, ut passim , sed ordinem sermonis, ut passim in Korano, ita hoe quoque loco turbatum esse potius crediderim. عذاب النبر) Accedit, quod afflictiones illae in sepulchro jam subeundae quoc. conf. Judaeorum חברט הקבר) in solos improbos cadunt. Quae in Fodin. Or. ad البلاء addueta sunt. non faciunt ad illam_notionem illustrandam. — Item عبر mihi in dubium venit, quia hoc sensu praeditum vix probari defendique posse videtur, nisi forte a ! عَلَى Estne forte legendum عبرالناس زمانا ينعلون كذا وكذا et منزلة status, ut منزلة, de dignitate intelligendum? quasi dixerit defuncta: sed dignitas mea in hoc tentamine alta est, i. e. proba-Cf. de hominis probi tentamine sepulchrali Jahja apud Maraec, ad Koran. T. II, p. 378. - Beat. Tychsenius

interpretatus: exemplum capiat, primae hujus verbi formae tribuit, quae octavae est, significationem. Nec, si haec illi etiam inesset vis, praeteritum aoristi, qui hic adhibendus fuisse videtur, vices pensare posse censeo.

اذا ما عبيت غَلَاتى Exc. Italinskyus et b. Tychsenius: اذا ما عبيت غَلَاتى دست Creator mens me ad vitam revocaverit. عيانى فلاتى ويانى ويانى فلاتى ويانى وي

Vità Timuri adductum secundae formae attribuit, quum quartae debuisset. Tychsenius haud scio an difficultatis quid in hac le-

unde in Pass. recte dicere licet مُبِيتُ خلاتى accepi portionem meam:

donavit; vide exempla in Meidanii prov. op. p. Schult. p. 80. et 'Harir. Mek. XIV. l. c. p. 433. Construitur cum gem. acc.

enim insuper profero, non غَلاَتَى. (Tychsenio etiam in notà paullo ante laudatâ id obversatum esse vidisti.) غَلاث autem est sors, portio boni, pecul. in vitâ futurâ accipienda, vid. Koran. II, v. 96: عا له في الاخرة من خلات et III, v. 71: ما له في الاخرة من خلات قي الاخرة عن خلات على الله فرة الله في الاخرة الله في الله خرة الله في الله خرة الله في الله خرة

Pro his non spoponderim. Violenter fatcor factum, intrudere textui integram litteram I; ausus tamen sum, tum quod Elif cum limbo sinistro facile poterat commisceri et confluere, tum quod, id nisi factum est, in ipsà illà figurà, quac in versus ultimi initio cernitur et alibi tantum ornandi caussà adjecta est, forte latet hujus litterae eo trajectae residuum. Accusativo autem egebam propter فنحر. Quod ad أحبى, noli offendere in litterà ultimà, quae potius figuram s prae se ferre videtur; attamen ab in vocabulo

quodammodo defenditur. — قريك a b. Tychsenio mutuum sumsi. Ad figuram 700 g quod attinet, conferenda sunt vocabula

et خبنت. Nec ambiguam habeas velim vocem hanc, articulo quippe destitutam. Vel absque articulo de Paradiso nonnunquam adhibetur, veluti Koran. sur. LXXVI, v. 12. In Fodin. Or. haec transcripta sunt hunc in modum: امى فنذ ودس atque ita reddita: rivedrò piena di gioja i mici congiunti, e felice ne riporterò la mercede. Ego quidem fateor, me non capere, quì ex illis vel hic vel alius sensus commodus elici possit. In مرابع المرابع Porro فعن designat quidem familiam minorem, proximam alicujus cognationem et familiam; at, si quid video, non hoc vocabulo, sed اهل potius usus suisset Arabs. — Denique اهل nec ex istis ductibus archetypi elicueris, nec commode hoc impertieris sensu. — Beatus Tychsenius legit

ficaverit ad gloriam et paradisum — Apodosis ipsi est initium sequentis N°. 4. Verum nee latere potest in primà voce versus penultimi; manifesta apparet littera ; neque apte sane haec ab illis, quae in N°. 4 sequentur, continuari videntur.

ad No. 4.

Hucusque non solummodo eruderata a me argumentis, quibus opus erat, tueri conatus sum, sed simul etiam singula atque omnia, quae in Transcriptionibus ante me tentatis minus probari posse videbantur, recensui, nec quaecunque eorum fidem imminuere censebam silui. Ipsemet etiamsi forte non omnibus difficultatibus tollendis par deprehensis fuero, vel indicasse eas tamen proderit. لو لم المنظر الله ما يشكك في اعتقادك الموروث كلني بذك ننعا فان من لم يكن في هذه الالغاظ الا ما يشكك في اعتقادك الموروث كلني بذك ننعا فان من لم يكن في العلمي والحيرة . Fas est porro ctiam a me transcripta auctoritatum fide probare et corroborare. Fas esset, caussas etiam, ob quas a Duumvirorum, qui ante me in hanc palaestram descenderunt, placitis recesserim, exponere et demonstrare. Sed in immensum exspatiandum foret. in alia omnia jam a me abitur, quoad lectionem, quoad interpretationem. Cum utràque Transcriptione et Versione supra adductà meam ibidem in medium prolatam si contuleris, ficri non potest, quin aliud prorsus elogium exc. Italinskyo, aliud b. Tychsenio, aliud tandem mihi ante oculos positum fuisse suspiceris; quamquam unum idemque est. Sufficiat itaque, observare ab utroque transcripta stare non posse, et non nisi a me prolata idoneis testimoniis tueri, quibus tamen parum egere videantur, quum vel per se intelligenti probatum iri (sine invidit dixerim) spes me tenet et fiducia.

انظر بعينيك) Additamentum: oculis tuis ambobus vide, energiae inservit. Similiter Latini: hisce oculis vidi.

(هل في الأرض من بائ او دافع المرت Ad haec forte haud abs

phthongisavi, quoniam ita Koranus loco statim laudando, quamquam nec مُاتى male haberet. مُاتى autem scripsi pro اغلاتى من تانية versus sequentis. Verbo autem رقى inest etiam vis immurmuratis magicis formulis, vel adhibito amuleto magico, prohibendi noxam. Hace in epitaphio nostro obtinet, cujus auctor id ex Koran. LXXV, v. 27 hausisse videtur, ubi haec leguntur: اذا بلغت التراقى وتيل منْ رَات i. e. ubi (spiritus, anima, النفس) pervenit ad fauces, et clamant: quis est, qui incantando me tueatur, vel a me avertat, scilicet mortem (32)? Habes in Makfurá Ibn - Doreidi v. 175 ed. Scheid. eandem fere sententiam: الردى اذا اتاه لا يداوى بالرقى, item apud poët. in Abulf. Ann. I, p. 376: وإذا المنية انشبت اظفارها النيت -Nimirum کل تمیمة لا تنفع, quod Reiske minus recte vertit pretiosum, significat amuletum magicum. Ceterum conf. Sa'adi Gülist. Lib. VI, c. 1, fin. ibique Olear. item Schult. Comment. in Prov. X, p. 91 sq. ad quem Scheidius I. c. lectores able-

⁽³¹⁾ In Gram. II, p. 193. add. I, p. 365,

¹⁶¹ بلغت العلقوم Vempe locutio illa , اذا بلغت التراقى vii similes Koranicae اذا بلغت العلوب العناجر العناجر العناجر العناجر العناجر العناجر العناجر العناجر العناجر indigitant, quando nempe prae anxietae spiritus jam in faucibus haeret Cf. Turcarum جانى اعزنه كاك

gat, quem ipse quidem consulere nequeo, quia mihi libri hujus copia non est.

mente suppleo ולכי ושׁנים בישׁתוֹ mente suppleo ולכי ושׁנים בישׁתוֹ mente suppleo ולכי ושׁנים בישׁתוֹ mente suppleo בישׁתוֹ הבין הביש mente suppleo בישׁתוֹ הבין הבין mente suppleo בישׁתוֹ per via, quae ellipsis non durior videatur. Habet illud etiam poëta in Abulf. Ann. T. IV, pag. 600, ubi Reiske mutandum in בישׁתוֹ substituere in voce, cui et littera בי inest, vid. ill. S. de Sacy Chr. Ar. T. II. p. 564.

يا اسفى Dolentis formula, e. c. Koran. XII, v. 84. Apud Mutenebbium inveni والسفا codem sensu. Cf. etiam يا لهغى.

inter alia ex Koran. II, v. 40. 47. A verbo أَخُ derivandum esse, vix operae pretium videatur monere, nisi vel arabice doctos nonnunquam in ejusmodi minutiis errare deprehendissem. Habes hujus ipsius verbi exemplum notatum a me in Comment. de Arabicorum etiam auctor. libris vulgatis crisi poscentibus emaculari pag. 16.

Horum mens, nisi fallor, hace est: jam pignoris nomine obtigata Deo teneor, pro vità a me sive bene sive male institută; repignerabor, ubi approbata fuerit; sin minus, committar, i. e. prout merita fuero, sive praemio sive poenà afficiar. In cundem sensum poëta in Abulf. Ann. T. IV. p. 12: אל וסנת או לוסנת
derim; nec nostro loco id patiuntur, quae sequuntur proxime. Ceterum pignoris imago, qua dura necessitas pingitur, poëtis Arabic's perquam adamata est. Sic in Elmac. p. 48. والمنايا مرته المنايا والمنايا
auidquid praemisi operis. Est et ipsa (ما قلمت من عمل signata in Korano phrasis. Ex sensu Korani, quidquid homo vivus hoc in mundo patrat sive boni sive mali, quasi praecurrit ipsi in mundum alterum, ibique ei repraesentabitur, a deo vel remunerandum vel puniendum. Plerumque de bone factis adhibetur, veluti Kor. Sur. II. v. 222. الله , Ibn - Dor. Makatque , وللنشي من ماله ما قدمت يداه قبل موته لا ما اقتس . 170 , atque ما تقل موا لأنفسكم من خير تجلوه : sic diserte Koranus Sur. II, v. 104 Non minus tamen frequens male facta innuit, ut Koran. II. v. 89: ولن يتمنوه (يعنى الموس) ابل عا قلمت ايليهم et III, v. 178: لبش ما قلمت .et Sur. V, v. 83 فوقوا عذاب العريق ذلك با قلمت ايديكم و et Sur. V, v. 83 برش ما قلمت ايديكم با تلمت ايديكم با تلمت ايديكم بالنسيم بالمتابع , nec non lbn - Zeiduni Risal. ed. Reisk. pag. 8. - Atque magis diserte Lok . ذلك بها قدمت يد كن لتذوت وبال امرك man. Fab. XIX: الذنوب التي قدمت ايديم ac Histor. X. Fesiror. ed. Knös. p. 05: الظلم . In utraingue etiam parteni adhibent, velui Kor. LIX, v. 19: يا الذين : et LXXVIII, v. 41 أمنوا اتقوا الله ولمنظر نفس ما قدمت لغلم واتقوا الله يوم ينظر المر ما قلمت يداه, atque sic poëta paullo ante laudatus ex Abulf. Ann. T. IV, p. 12. In nostro autem epitaphio in priorem sensum accipiendum videtur propter وما فانه بان. Quod restat, conferas velim similem usum vigentem in verbo اسلن.

sistendi, die judicii. Ex Korano, qui Sur. III, v. 38: بوم تجل و وما على بالله و المعالى و الله الله و الل

et pro eo, quod post illud (a me praemissum) restat. Nimirum وما فلنه باقى est pro وما وما فلنه باقى , quae ellipsis non est insolita, quod uno ex multis probetur exemplis: Temimi in Vat. et Rink.

et Sur. XLVIII, 2. ليغنو كل الله ما تقدم من ذنبك وما تاخر Ceterum ليغنو كل الله ما تقدم من ذنبك وما تاخر per licentiam poëticam pro بأتي scripsi, ut nempe rhythmus constet.

Tantum.

Hoc autem quidquid est mearum in hoc epitaphium curarum ne quis in iniquam interpretetur partem! ne quis autumet me Tychesenii, qui ad silentium sedes abiit, silentio, quod (cheu) nunc est, male usum, ejus manibus proterve illudere voluisse hac edità scriptiunculà! Deus id non sinat! اعوذ بالله ال اكول من الطالين. Necsane is sum, qui clavam extorqueam Hercuit vel mortuo. Nequettalinskyo, viro excellentissimo, ausim detrahere

haerentem capiti multa cum laude coronam.
Unice veritatis indagandae inveniendaequae studio ductus protuli has curas meas, et prolatas cui judici magis idoneo subnuttam dijudi-

candas, quam ipsi nobilissimo et eruditissimo primarum curarum auctori, non habeo. Cujus et ipsius secundis curis, cujus ingenii et doctrinac face, spes me tenet futurum, ut tum duo illa vocabula, quae in N° . 1. notavi ambigua, tum quaecunque in N° . 2. praecipue autem in N° . 3. minus certa adhuc relicta sunt, illustrentur et ad eandem fidem manifestam, nullis argumentis revincendam, ad quam reliqua tantum non omnia hae meae curae perduxerunt, perducantur. Scripsi a. MDCCCXV.

ONYX CUFICUS SORANO - NEAPOLITANUS

INTERPRETE

C. M. FRAEHNIO

in Consessu Acad. Imp. Scient. d. 111 Mart. 2. MDcccxix habito.

Abhine annes complures ad Soram, oppidum Calabriae, onyx titulo insignitus Cufico a terram molientibus repertus atque Augustissimo Regi Neapolitano oblatus est. Vella, Abbas ille, qui nomini suo aeternam falsarii notam inussit, hane etiam gemmam falso interpretando Regem suum fallere ausus, perhibuit, se ex inscriptione cognoscere, Rogerum Normanum, regni Siculi conditorem, hane gemmam in nuptiarum suarum solemnia sculpi jussisse. Quod Rex quum audiisset, tanto hujus onychis amore teneri coepisse dicitur, ut diu annulum gestaret in digito ejusque ectypa vitrea facta inter eos, qui ipsius gratià florebant, distribueret.

Celeberrimus Hager, dum Vellae fraudes alias longe graviores detegeret et falsario personam detraheret (1), hac quoque in gemmà qualia Vella legi dictitaverat, inveniri primus negavit. Abstinuit quidem vir doctissimus ab ipso rectius interpretandae periculo; attamen aliis doctis gratissimum fecit eo, quod gemmae imaginem libro suo modo laudato pag. 26 (vel vers. Gall. p. 31) adjungi curaret. Copia enim nune aliis quoque interpretationis hujus tituli tentandae data erat; nec frustra data. Mox alii viri docti rectiorem illi substituendi periculum fecere. Uno fere tempore, a. MDCCXCIX in hanc metam animum contendebant ven. Adler et magnus Sylve-

⁽¹⁾ Vid. Io. Hagers Nachricht von einer merkwürd litterär. Betrügerei. Erlangen, 1799, vel Relation d'une insigne imposture littéraire, par Mr. Hagen ib.

ster de Sacy; etiam Berolinensis nescio quis ausus est; deine de paucis interjectis annis O. G. Tychsen, nunc piorum sedem consequutus, nodum hunc expedire tentavit. Sed tantum abest, ut harum interpretationum ulla omnibus numeris absoluta dici queat, ut etiam singulae notam suspectae fidei prae se ferant. Igitur non ab re esse duxi periculum, quod et ipse feci, hujus inscriptionis enucleandae viris doctis proponere. Propono tamen (non diffiteor) paullo timidior, quamvis me rectiora, quam alii, (absit invidia verbo) vidisse confidam.

Quod in tam paucis vocibus, iisque linguà conceptis Arabicà notà, et in gemmà illaesà atque integrà obviis hic titulus tantum negotii facessiverit viris doctissmis, quod me quoque, qui post varia aliorum conamina aggressus sum, etiamnunc paullulum ambigentem relinquat, quod ejus explicationes inter se cum verbis tum sensu ita discrepent, ut saepe ne vestigium quidem mutuae convenientiae deprehendas et induci possis ad suspicandum, interpretes alios alium titulum ante oculos habuisse, — id non mirabitur, quisquis ligatà compositum esse oratione et Cufico charactere exaratum cogitaverit.

Constat hanc scripturam Arabicam priscam esse, paullo ante Muhammedem ex prisca Syrotum scripturà Estrangelo dictà originem traxisse, Cuficae nomen a Cufa, Irakae Arabicae urbe celebri ad Euphratem sità, ubi a grammaticis et Korani lectoribus scribisque mutata
a'iquantum et emendata videtur, adeptam esse et per sacculorum trium
decursum in libris, per octo fere et quod excurrit in monumentis publicis,
numis et similibus, licet non solam et intemeratam, obtinuisse. Ea autem
est in hac scripturà litterarum multarum, quas, quippe sono diversissimas, scriptura recentior bene distinxit, figurae similitudo, ea a
defectu, non dico vocalium (Arabs et Arabicae linguae probe peritus eas plerumque parum desiderat), sed punctorum diacriticorum
orta ambiguitas, ut haud raro multas magnasque interpreti objic at
difficultates Accedit, quod hace scriptura diverso tempore, diversis terris, diversis sculptoribus fere diversa esse solet.

Quod in gemmâ ea, de quà agitur, deprehenditur scripturae Cuficae genus, nullis quidem ornamentis, quibus temporis decursu hanc scripturam obruere coeperunt, auctum est, quid? quod antiquam ejus naturam redolet, nec adeo longe abest ab illà, quam in antiquissimorum praesertim numorum Umaijadicorum elogiis aliisque nonnullis monumentis admiramur, simplicitate et elegantià. (2) Nihilosecius multis magnisque hic titulus obstructus est difficultatibus. Nimirum inscriptio non, ut vulgo solet, merum nomen possessoris, vel versiculum aliquem Koranicum, sed sententiam aliquam fortasse a poëtà nescio quo mutuam sumtam comprehendit. Ligata oratio quum in quavis fere lingua, ut ut scriptura, quà exarata est, quam maxime distincta et perspicua sit, majores quam soluta, lectori objicere soleat difficultates tum a verborum structurà, tum a vocabulis, raris illis saepe et in oratione pedestri insolitis (alias caussas ut taceam), duplo majores objiciat oportet in scripturà adeo ambiguà, qualem Cuficam esse novimus. Inde fit, ut qui Cufica interpretandi leges religiose observet, hunc nodum difficulter expediat. et licet probabiliorem, quam alii ante ipsum, deprehendisse sibi videatur interpretationem, eam dubitet unice veram praedicare.

Ea autem primaria lex titulorum Cuficorum interpreti tenenda est, ut quam tenacissime inhaereat ductibus antiquis eosque singulos solvat transferatque in recentiores il e. Neschicos, a vocabulis sibi quidem notioribus exordiens. Id ut rite facere queat, non sapiat e solis tabulis, in quibus nonnulli viri docti Alphabeta Cufica repraesentàrunt. Sunt ea fere ex Korani exemplis, vel etiam ex numis petita nec adeo multis nec quà aetate, quà patrià satis distinctis. Imo vero ipsorum monumentorum, quotquot hujus generis oculis usurpare datum est, accurato studio, et characteris Cufici diuturno usu subactus sit oportet, ejusque indolem pro variis temporibus,

⁽²⁾ Ea vero hujus characteris indoles est, ut hanc gemmam quae patria, quae actas tulerit, definire difficile sit. Puto tamen cam sacculo a Fuga quinto posteriorem non esse.

terris, civitatibus variam respiciat. Est ea sane passim ita comparata, ut non possit non in oculos cadere. Exempla sunto character Siculus saec. XII aer. Christ., qualis in Pallio Imper. German. et in pluribus aliis monumentis a cel. Rosario Gregorio (3) vulgatis cernitur, et Bulgharicus in Epitaphiis saec. XIV aer. Chr. obvius, item numi Chalifarum et numi Cufici Dschudschidarum, inscriptiones saec. IV. H. quae a princip bus Buidicis profectae in Tschihil - Menar leguntur et specimen Cuficum saec. nescio cujus, quod Muradgea d'Ohsson exhibuit videndum in Tab. IV. libri Allgem. Schilder. des Othom. Reichs. Tom. I. (1) Adeo nonnunquam ejus indoles distincta est et ad certam aliquam civitatem restricta, ut tituli alicujus, vel omni loci notatione carentis, patriam primo obtutu cognoscas; quà in caussà c. c. character Cuficus Choresmicus versatur. - Licentiarum denique rationem habeat, quas sibi alias alii sculptores sumserunt in litteris vel ornandis, vel contra orthographiae normam jungendis, vel disjungendis quas junctas scribi opertebat, et quae id genus alia sunt. Sic, ut hanc rem paucis exemplis illustrem, inventi sunt, qui litteram initialem » ductu augerent, quo ad similitudinem 700 / accedat, vel litterae / pedem ad sinistram ita inflecterent, ut fere lam finale referat (veluti in will amu-

Leti Bylariensis et الغائد Epit. Messanii (apud Ros. Greg. p. 43.)), vel ductui litterae alicujus in altum extenso alterum similem, quem facile pro I habeas, adjicerent, vel litteras I, al. sequenti litterae conjungerent etc. Pauca quidem numero, si cum Graccis Romanisque conferas, hucusque in vulgus edita sunt monumenta

⁽³⁾ In Rerum Arabicarum, quae ad historiam Siculam spectant, ampla Collectione.

⁽⁴⁾ Hoe specimen, in quo ut animum ad singularem litterae d figuram advertas velim, quum forte sint qui non satis capiant, non a proposito alienum crit, id in characte-

res recentiores transcribere. Continet autem hace: ——— ألعوام كالووام ماليوام العلم نقل هات شهيدا — عمد سيد الكونين والثقلين هات في هات شهيدا — عمد سيد الكونين والثقلين Mémoires de l'Acad. T. i II.

Cufica, neque tamen vel hace pauca frustra consuluntur et in usum convertuntur. Ne igitur ea negligat interpres, cui corum copia est. Equidem gaudeo mihi contigisse, ut monumentorum Cuficorum, tum, quae ab ipsis auctoribus profecta tum quae ex archetypis arte chalcographicà expressa sunt, haud contemnendum numerum oculis usurparem.

Interpres, ubi ductus Cuficos diligenti curà in Neschicos i. e. Arabicos recentiores transtulit, eosque punctis diacriticis, vocalibus et signis orthographicis, quae convenire censet, et quibus mortuas quasi litterarum figuras animet, instruxit, videat et expendat, an translata Arabica recte habeant quoad linguam, puta, an usui et legibus Arabismi congruant aptumque fundant sensum. Vocabulo inusitato, ut Ulio pro con (ornamentum), vel compositione in Gram-

maticae canonem aliquem offendente, veluti pro amor meus), in transcriptis a se deprehensà, dissidat sibi, nec talia insolita in linguam invehere studeat. Deprehenduntur quidem nonnunquam in Cuficis etiam inscriptionibus peccata non solum in orthographiam, sed in ipsum linguae genium commissa a sculptoris ignoranțià: deprehenduntur alia, quorum culpa in ejusdem oscitantià, alia quorum culpa in spatii angustià. Disserui hoc super argumento in Libr. II. de numorum Bulgharicor. f. antiq. pagg. 109-117, ibi quidem solos numos spectans, quare hic ex nonnullis aliis antiquae memoriae monumentis paucula exempla subjiciantur. Veluti in Inscriptione Caucasica, cujus apographon ill. Adelung meeum communicavit, inveni معل pro المل , سباتا pro الليل pro المل , سباتا Item in Titulo turris Diarbekrensis apud Niebuhr. Reisebeschr. H. Tab. XLIX. A. الحال pro الحال cernitur. Sed talia vitia a describente profecta esse ne quis forte suspicetur, ipsum archetypon simili in caussà versan's producere expediet. Est penes me lampas antiqui operis in Bylariae ruderibus nuper inventa, cujus egregius titulus Cuficus السرور habet pro السرور pro المامية quorum prius a negli ntià sculptoris, alterum a loci angustià esse

suo tempore probabo. Est in Mus. Asiat. Petrop. theca Koranica Kasimowiensis, in quà nunc syllabam be vocabuli be omisit, nunc bis posuit artificis incuria. Verum enim vero prius quam ejusmodi vitia locum habere putes, ctiam atque etiam te obtestor, ut omnes alias expediundi vias circumspicias nihilque non tentatum relinquas. Notam autem sibi inuret et malo maetabitur, quicunque et palaeographiae et linguae Arabicae usu parum exercitatus Cufica aggreditur: qui perperam a se transcripta pro veris vendit ne suspicans quidem eorum pravitatem: qui distinguere nescit quid al-Arabe proficisci possit, quid non: qui denique perperam a se transcriptis sensum intrudit, quo carent. Videbimus in hujus onyclis tana eruendà scripturà quam lectione animandà vertendaque varie erratum esse ab iis, qui ei operam suam impenderunt.

Equidem in monumentis Cuficis tractandis id semper curae habui, primo ut quam arctissime premerem singulos duetus Cuficos inque tales Neschicos transferrem, quibus vere cos respondere diaturno hujus characteris usu edoctus sum; deinde ut quae in scripturam vulgarem transcripseram cum linguae consuetudine conveniant, denique ut sententia ipsa transcriptorum a genio populi, a quo profecta est, ne abhorreat. Atque, ut in Cippo Melitensi supra illustrato, ita in hujus gemmae titulo explicando, non solum rationes, cur virorum doctorum corum, quos ego proxime sequutus sum, interpretationes mihi minus probentur, ad singula fere annotare ea, quà decet, erga tantos viros reverentià non neglexi, sed ctiam mea singula atque omnia cum aliorum monumentorum Culicorum tum. scriptorum Arabicorum auctoritate firmanda censui. Volui cnim, ut ii quoque, qui in hac palacographiae palaestrà minus versati sunt, magis intelligant et dijudicare ipsi queant; volui ctiam harum rerum studiosis nondum satis exercitatis specimina quasi yelprywytae ad Cuficos titulos rite solvendos exhibere; volui denique ut iidem, quum ex hujus annuli titulo ipso pro historia nihil fructus capere liceat.

ex ejus certe interpretatione palaeographico philologico criticà hoe illud nullus non momenti discant. Scio, alios non ita rem gesse, sed in discendi cupidorum damnum, quin in suum ipsorum etam. Nuda fere posuerunt a se transcripta, vel maxime insolitis nulla exemplorum Cuficorum et auctorum Arabicorum fide firmatis; quo fit, ut alius, quem latent, quae illis ante oculos fortasse versabantur, exempla similia caussam ipsorum tuentia, aut in verba magistri jurare cogatur aut temere inducatur ad fidem interpretationis cujusdam suspectam habendam. Quis mihi v. g. fidem habiturus esset asserenti, versus prioris vocabulum secundum "legi posse, n'si simili figurà litterae "J finalis ex alio monumento, ubi dubitationi locus non est relictus, allatà probàssem? Fuisset forte etiam,

Haec praesati الآن نشرع في المتصود بعول اللك العبود , et examinatis antea , quae ante nos tentatae sunt , hujus inscriptionis interpretationibus nostram subjiciamus.

qui in , meo offendisset, nisi item et ductus Cuficos et sensum

usumque vocis exemplis firmassem.

§. 2

Primo ponamus loco interpretationem eam, quae viro maximi in Palaeographia Cuiica nominis, meritissimo Musei Cuiici Borgiani interpreti, s. ven. Adlero, Episcopo Slesvicensi debetur. Edita legitur tum in W. Ouseley's Oriental Collections Vol. II, pag. 425 sq. tum in Klaproth's Asiatisch. Magazin Part I. p. 90 sq. aucta utrobique ipsius gemmae imagine a secunda manu repetità; sed monco, quanto Berolinensis elegantior et accuratior est, tanto Londinensem rudiorem et in nonnullis Hagerianae dissimiliorem esse. Solvit autem vir doctissimus titulum ita in characteres Neschicos:

يسير الحق من الفار كل من راى ذلا عدر quae vertit:

"Wahrheit und Recht kommt von Gott;

"Jeder, der das wahrnimmt, irrt sicher nicht,"

i. e.

Jus et fas (s. quod verum et justum est) progreditur a Deo; Id quisquis animadvertit (s. videt), sane non errat.

Neque cel. Ouseley de hujus interpretatione fide dubitavit (5), neque cel. Klaproth. Hic quidem pro veritate ejus non solum Adleri viri linguarum Orientalium peritissimi nomen celeberrimum, sed etiam formam externam, inprimis autem simili exitu clausum versum utrumque spondere censuit.

Verum enim vero magnopere dubito (id quod sine fraude summae existimationis Adleri, viri meritissimi, dictum esto) 1°. hanc transcriptionem Neschicam satis accurate insistere ductibus scripturae Cuficae, 2°. Arabica transcripta linguae legibus et usui ubique congruere, 3°. versionem corum Germanicam satis recte habere, et cum vero sensu inscriptionis Cuficae consentire.

Ad transcriptionis fidem quod attinet, ipsam primam vocem admitti posse, negabit, quisquis figuram aere expressam inspexerit Quinque apices, non vero sex, in hac voce erecti cernuntur. Occurrit quidem passim in monumentis Cuicis, praesertim numis littera — contracta, veluti in Dschudschidarum numis vocabulum Ullul Sultan omnibus, qui ejus litterae s debentur, apicibus exaratum raro deprehenditur; nunc duobus, nunc uno, nunc nullo prorsus instructa est. (6)

⁽⁵⁾ Or. Coll. 1. c. A letter, dated Aug. 22, 1799, from the learned Adler, whose skill in Cufick literature is universally known, confirms the Doctor Hager's opinion (viz. that the Abbé Vella's explanation was together false and that the words had no relation to Roger, king of Sicily), by thus captaining the Inscription on this Onyx a. s. f.

⁽⁶⁾ De Lae litterae hujus contractione quia non cogitabat Monumentorum Cufico-Siculorum apud Rosarium Gregorio interpres, factum est, u. in 11anica Albae Imp. Friderici II, et in Abaco aeneo Musei Academi-

Idem fere in ejusdem dynastiae numis nomini urbis Giilistan aceidit, quod a paucis si recesseris, vel dit vel dit scriptum. (7) Similiter in numo Harun-Raschidi a. 191, qui hic in Museo Imperiali asservatur, nomen loci, ubi cusus est, طبرسان exaratum pro طبرسةان; et in numo 'Ass - ed - dini Caicausi (apud cel. Tychsen. in Com. Soc. Reg. rec. Fol. III Tab. I. No. XII) nomen ultimi Chalifae Abbasid, luriptum est المستعصم, quod neutiquam aum doctissimo editore (l. c. p. 98, 101 et 102) legere licet el-Motaasem (el-Mota'affem), et in Inscript, apud Rosar, Gregor, p. 184 obvià السعل felicitas quia الدعل scriptum, non captum est ab interprete, qui cum alienà litterà conjunctum inde creavit العدن Sed ejusmodi contractio non cadit fere, nisi in vocabula et nomina translaticia atque nemini non nota, quale Sultan esse et qualia suo quidque aevo suisque in terris nomina Gülistan, Tabristan, Mustafem, fuisse non infitiaberis. Verum in vocibus minus frequentis usus et ambiguitati facile obnoxiis eam nunquam deprehendi nec in numis nee aliis in monumentis; quà in caussà يسير versari patet.

Lectionem secundi vocabuli tueri quidem quodammodo potest tum Elif in priscà scripturà subinde litterae sequenti
conjunctum, tum flexus ille finalis litterae ad figuram $\tau o v$ accedens in hoc ipso vocabulo in numis Chalificis passim obvins (vid. e. c. Goett. N°. VI. Borg. I. N°. IV.). Ultimam tamen litteram quominus pro ifinali habeam, tam ejus figura plus
jnsto extensa in altum, quam apices in superiore ejus parte obvii,
ab hac litterà sane alieni, me impediunt.

Quod in altero versu obvium ven. Adler & transcripsit, ejus litteram priorem vix probaveris exemplo aliquo, quod e chara-

ci, item in vase aeneo Monasterii St. Martini, quae omnia Panormi servaniur. Otho s. Othon ULM s. ULM lectum sit, quod Ulm es Sultan legendum crat. Deleantur itaque, quae apud laudatum auctorem de his monumentis necessitudinem, quae Arabibus Siculis cum Othone IV. Imperatore intercesserit, illustrantibus valde docte disseruntur.

⁽⁷⁾ Unde id Interpretes alii Casan, dii Gidschan, alii aliter legerunt.

etere Cusico priscae aetatis, ad quam haec gemma referenda mihi videtur, petitum sit, estque omnino talis ejus sigura, qualem hie ei attribuendam putavit auctor, a Cusicà scripturà aliena. Medii quidem aevi scriptura Arabica numaria vel lapidaria admisit, sed ea non Cusica, sed ele genere scripturae Sülüs vel Sülüs - dscherisi. Sic e. c. in numo (°) Sultani Seldschukidici Caikobad filii Caichosru (a. H. 617, ut videtur) Latella scriptum dixeris; item in numo (°) Sultani Seldschuk. Caicaus filii Caichosru (a. 644) pro cernitur; item in numo, a rege Georgiae auctoritate Mänguka'ani euso Latella exaratum pro est; (1°) in numo a Timurlengo et Ma'hmude, Chano Dschaghataïdico, cuso prius rov da si guram rov in gemmà obviam accedit. Sie porro in Solarii Panor mitani

Inscriptione triling ui apud Rosar. Gregor. p. 176. Juli scriptum

est الليّا legendum; id quod non adtendens Interpres الليّا transcripsit et in aliis etiam hujus epigraphes vocabulis errans eam minus recte vertit. Est autem sic vertenda: Majestalis (العصلة pro العضرة pro العضرة) regiae

⁽¹⁰⁾ Hujus numi rarissimi, cujus exemplum unum in Bibliothecd Imper. publicd Petropoli, alterum in musco ill. Rühle de Littenstern Berolini servatur, epizgraphas, quoad legi possunt, adjicere juvat.

بترة فدا A. I.	Potestate Dei —
باقبال پادشا	fortuná Imperatoris
جها <i>ن منکو تاا</i> —	Mundi Mängu Ka'an.
سنة فبسين (?) و ستماية M.	anno 650.
داود ملك (?) مالك A, II. — (Dawid Rex (?)
بن کیورکی	filius Giorgi
الغراملي (٢)	
infra: تفليسر Tiflis.	

De hoc Davide cf. cel. Klaprothii Reis. in den Kaukas. T. II, p. 125. et cel. St. Martin. Mémoir. sur l'Aiménie T. I, p. 385.

⁽⁸⁾ Est in Musco Krugiano.

⁽⁹⁾ Exstat in Mus. Lebzelteriano.

(المال) augustae (1. العطية pro العطية) Rogericae celsae — cujus dies perennes esse jubeat (1. יוֹג pro יוֹג) et signa (s. vexilla) stabiliat (s. victricia reddat) Deus - jussum emanavit, ut construatur hoc instrumentum ad observandas horas, (الساعات) in Siciliae Urbe (primarià) quam Deus tueatur (مباعا الله i. q. عاما الله), anno 536. Similiter 1. c. pag. 182. in Abaco aeneo Musei Acad. Panormit. littera (k ad modum 1 l formata, in vocabulis perperam lectis المالي , اللاب , الأثر et , الأملى , quae legenda sunt : Similiter 1. c. p. 184. in Olla aenea, quac Panormi in Parthenop. S. Mariae Virg. asservatur et in cujus inscriptione legendà plus quam cogitaveris erratum est, exaratum pro الكالات (i. e. Ei qui omnibus praeditus est virtutibus). Interpres legit: لولى الأثرى والأد quae sensu carent. Porro apud eundem Ros. Gregor. p. 185 in Vase aen. in Monasterio St. Martini Panormi asservato, wij scriptum est , id quod nec Interpretem fugit. Eodem modo l. c. p. 136 in ejus d. Monasterii abaco aeneo, qui viri alicujus excellentis suit (de tali enim الغر male ibi lectum الغر usurpari

wurpari solebat) اللغي scriptum cernitur, quod non اللهم , ut ibi factum est, sed اللهم legendum; item اللهم non autem اللهم legendum erat. — Etiam in Vasc aenco Musei principis Biscaris Catanae 1. c. pag. 187 ad instar litterae I formata. Sed satis exemplorum est. Ad quae moneo, ut numi illi, ita haec quoque monumenta saeculorum II. sexti, septimi atque adco recentioris esse, et omnia, non charactere Cufico, sed Neschico vel Sillus-Dscherisi exarata.

Quod proxime sequitur, m finale Cuficum est, passim eâdem figurâ in antiquis monumentis gaudens, non vero ω . Hoc quo modo scribatur, ipse prior versus docet.

Nec postrema vox, transcripta غلر, admitti potest. Quem primum hic titulus Cuficus sistit ductum, is litterac e neutiquam respondet. Est omnino . Inspice, si placet, e. e. e. illud in numis Cuficis tritissimum.

Ad Arabica venio eorumque versionem. Ab ipso initio quum legi nequeat; restaret بسر Sed يسير quid sibi velint, non assequaris. In quamcunque partem verteris torserisve, eum, quem versio exhibet, sensum non deprehendes. بَسُر vel بَسُر vel بَسُر quominus efferas, vetat Arabismus hac in caussà aoristum apocope tum non admittens. Pronuntiandum itaque foret بَسُر vel بَسُر (seil. stat. constr. عَالَى عَلَى عَلَى اللهُ عَلَى ا

versum: Deus. Minus recte. القادر i. e. destinans res omnes, hoc sensu utuntur. القدر est fatum, necessitas fatalis etc.

Tota denique sententia, inprimis autem pars ejus posterior, quam langueat, nil attinet multis exponere. Quisque, vel me non monente, id ipse non potest non sentile.

Verbulo adhuc observare juvabit, in transcriptorum Arabicorum pronuntiationem, in Asiatisch. Magazin l. c. litteris latinis expressam additamque, nonnullos operarum lapsus irrepsisse, ut التار akkader pro alkader. Nam etsi lingua vulgaris nonnunquam lam articuli ante litteras nonnullas, quae non sunt e solarium numero, ad harum imitationem coalescere cum sequenti litterà patitur, (ut cum dicunt تنار التجريرة Kantarct-edschedide, التجريرة min eddschubbi): tamen tale quid in litteram والعبر المجريدة nostrà eàque poëticà vulgarem pronunciandi modum sequeremur? Operis etiam debentur vitia o min pro man et rai pro ra-a.

§. 3.

Ill. L. Baro Sylvester de Sacy, quum librum Hagerianum supra laudatum in Magasin encyclopedique, V. année,
Tome VI (a. 1799) recenseret, tantum abfuit, ut onychem hunc silentio practereundum duceret, ut potius dignum haberet, cujus inseriptionem nodosam solvere et illustrare experiretur (vid. l. c. pag.
355 sq.). Idem in tabulá diario adjectà gemmam denuo delineari
curavit; quamquam hace delineatio ab accuratà illà elegantià, quam
Hageriana et Alaprothiana prae se ferunt, remota est. Juvat
viri eruditissimi interpretationem suis ipsus verbis conceptam ponere;
habet ca autem hunc in modum:

"Si je lis bien cette devise, elle n'appartient point à un Musulman, mais a un Chretien. Elle signifie a la lettre:

بِسْمِدِ ٱلْعَلَىّٰ مَنِ ٱلْتَجَى قَامَ رُأَى وَلا نَجَا

In nomine Ali qui refugium quaesierat, Surrexit, vidit, et non (erat) salus.

ce que l'on peut traduire ainsi :

Celui qui avoit mis son refuge dans le nom d'Ali, S'est levé et a vu qu'il n'y avoit point, pour lui, de salut.

C'est donc, à ce qu'il paroit, une sorte de satyre de la confiance que les Arabes de Sicile, partisans d'Ali, comme les Khalifes Fatimis auxquels ils obéissoient, mettoient dans le nom et les merites de cet imam. On pourroit même donner à cette devise une application historique plus précise, en supposant qu'elle a pour objet le Kaïd Ali ben Nama, surnommé Ebn - al - Hawasch, qui lorsque Roger soumit la Sicile, étoit maître d'Agrigente, et de Casriana (Castro Giovanni, anciennement Enna). Ces deux places furent les seuls qui soutinrent, pendant quelque temps, l'effort des armes de Roger. Ali ben Nama soutint même un siège dans Casriana, après avoir été battu, devant cette place, par Roger (Voy. Aboulf. Annal. Most. ed. d'Adler, T. III, pag. 277-279). On pourroit donc supposer que cette pierre fut gravée pour Roger, après qu'il eut vaincu Ali ben Nama, qui avoit inutilement compté sur la protection d'Ali dont il portoit le nom. - Au reste je soumets cette explication au jugement des savans."

Viri doctissimi acutum ingenium quis est qui hie quoque non admiretur? Neque tamen haee interpretatio Cuficis concinit. Ab ipso ill. auctore jam retractatam esse novimus; itaque nostrum esse non censemus eam recensere.

§. 4.

Quam tertio loco ponimus, interpretatio profecta est a viro juveni nescio quo, et in libello menstruo Berolinensi (Neue Eerlinische Monathsschrift, 1799, Novemb. N°. 4, pagg. 386-389.) in vulgus edita a Klaprothio. Transcripsit autem ille Cufica sic in litteras Latinas:

Dasaa saliya man a'lkadri. Dsalulon aaf la battata.

quae ad verbum ita sonare ait:

Expulit tranquillitudo animi amarum providentiae. Obsequens jumentum moritur non prorsus.

et germanice:

Seelenruhe verscheucht die Bitterkeit des Geschicks. Ein folgsames Lastthier stirbt nicht sogleich.

Patet ex transcriptione Latina (11) additàque versione, Cuficum titulum lectum esse ità:

Haec legens olim obstupui, steteruntque comae. Adeo ea tum a characterum Cuficorum ratione tum a linguae Arabicae usu abhorrent, atque auctor tantum abest, ut hujus elogii eruendi difficultatem subolfaceret, ut etiam Cufica haec quasi contemtim haberet levique brachio expediri posse sibi persuaderet (1-1). Id probatum dare, ludus est.

⁽¹¹⁾ Auetor Arabica litteris Latinis expressisse videtur propterea, quod Berolinum tunc temporis typis Arabicis carebat.

⁽¹²⁾ Ipse discris verbis ita: Aus der Cufischen Inschrift geht, wie mit großer Leichtigkeit zu ersehen ist, folgendes hervor -

Ad primum vocabulum, وسع lectum, quod attinet, litteras > et / qui in ipsà Gemmà, h. l. deprehendere sibi persuadeat, nae is nihil non ex Cuficis elicuerit. Harum litterarum figurae Cuficae plane differunt ab iis, quas onyx tibi sistit. Nec verbum دسم sensu eo, quem auctor hic ei attribuit, gaudet. دسع (cum masdaris et شنة , quod posterius Castello addendum) significat quidem pellere, propellere (دنع) (منع), sed usus evaluit, ut specialiter adhibeatur de camelo, qui ex imo in os propellit, protrahit (eructat) pabulum ad ruminationem, vel de homine cibum vomente. Audi الدسع والدسعة دالك فتعمى وسينك سكونيله دفع متناسنه دريقال: Wan-kulium دسعه بدسعه دسعا ودسعة من الباب الثالث ودسع دوه كويش كتورعكه دخى ديرلر ab دسيع Inde . يقال دسع البعير بعِرتُهُ اذا دنعها حتى اخرجها من جوفه الى نيه seu locus, ubi inter scapulas اوموزده بیون بتدوکی پر demersum collum est, interscapinum, vel rectius, ut videtur, a Scholiaste ad Ibn - Doreidi Poëm, ed. Scheid, v. 76: locus, ubi cibus potusque descendunt per gulam (ideoque ruminatione ascendunt).

mana) Non dubium est, quin operarum lapsus sit, pro quo auctor scripserit morra مر. Licet quidem sic etiam pro والماء العربية

tiam potestate dandi, donandi, gaudet, veluti in illà Traditione Muchammedica: الم أجعلك تربع وتلسع i. e. nonne feci ut camelos verno tempore parientes possideas et larga dona effundere possis fan y ro: quartam spoliorum partem accipias) lautisque muneribus afficiaris? Inde فسيعا i. q. الم عظيم الأحسال i. q. المناها عظيم اللسها عظيم المناها المناها عظيم المناها المناها المناها عظيم المناها المن

gere, siquidem r et n finales subinde parum distinguit seriptura Cufica. Nec amaritudo providentiae (imo: fati) ab usu aliena, veluti occurrit مرادة الوت acrimonia mortis, apud Ibn - 'Arab - Schah. T.

II. p. 838; item: fortuna لم تحل الآوترن tam dulcis non est, quin et amaritiem prodat, Abulf. in Annal. Vol. III, p. 638, et Ibn-Dorcid. Poëm. v. 172: امر لى حينًا واحيانًا علا praebuit mihi aliquando potum amarum, aliquando dulcem. Coll. Elmac. pag. 68: أيّام صعبة مرة dies duri et amari (14).

al-kadri) Hoc unicum vocabulum est, quod ab hoc auctore satis recte lectum non negamus.

dsalulon) Versus secundi vocem primam et secundae litteram primam male conjunxit; nec minus ruit in his transcribendis litteris. Primam litteram pro et tertiam pro habere quo pacto possit, qui vel unum monumentum Cuficum legerit, equidem mente non comprehendo. Adeo harum figura aliena ab eà est, quà in charaetere Cufico induuntur.

aaf) Ejusmodi soni vocabulum quomodo ex litteris proxime sequentibus elici queat, assequi non possum. Videtur interpres voluisse أن. Sed quid? habuitne pro nihilo ductum an vero non animadvertit? quamquam oculos fallere neutiquam potest. Numquid illud aaf errori operarum debetur? Nam أن neutiquam denotat: mori, imo vero: nocere, laedere.

la battata) الآبية. Scd interpres he foemininum hujus voeis in ipså G-mma desiderari ait. Igitur الآبت aut ناف deprehendere sibi visus est. Mala noxa (credo) hominem egit. Vocis

in Abulfed. Ann. II, 94. pro مرّ العواقب legendum utique esse — نهن.

primam litteram Cusicam quis pro! habner't? quis in sequentibus deprehenderit, quae noster? Vel tiro in palaes'rà Cusicà adeo non ruerit. Accedit Arabismi, quie hie quoque nulla est, ratio: قالول. Fingamus قالول. Fingamus قالول. Fingamus قالول. Fingamus قالول. Fingamus قالول. Fingamus قالول. Fingamus قالول. Fingamus قال adesse et valere idem ac: moritur; ubinam illa viget dialectus Arabica, quae constructionem hanc tueatur? Dicunt Arabes: قال العالم أنه الله المناه
Intelligitur, tali modo in monumentis Cuficis legendis versari, idem esse atque lubidini et arbitrio fraena laxare; nec hanc explicationem continere nisi امادیت طسم واصلامها, ideoque non lituris, sed liturà inducendam esse. Dieta hace sunto, quo moniti alii, peregrini et hospites in palaestrà Cuficà, temere et petulanter in hanc arenam sese dare caveant!

§. 5.

Quartum solvendae hujus inscriptionis periculum debetur vivo illi, qui actatem fere totus in studiis Cuficis versatus est, qui, quam corum usu subactus esset, multis et egregiis speciminibus probatum dedit, qui (ne longum faciam), dum vivebat, in palaeographiae Cuficae finibus principatum tenuit, — Olaum Gerhardum Tychsenium dico. Hic vir doctissimus MDCCCII cum C. G. de Murr, quo cum amico nunc in beatorum sedibus versatur, hanc hujus tituli explicationem communicabat:

حَسَنُ ٱلْمُنِيِّ [ٱلْحُبِيِّ] مِنَ ٱلْفَدَرُ حَدْنُمْ زِيَانِي وَلَا خَدَرُ addità hac versione:

Praestantior est gratia mea (s. amor mei) potentià; Vigilantia est ornamentum meum, non autem inertia.

Deinceps autem (anno certe MDCCCIX) paullulum mutatà ratione ipsi legenda visa sunt:

quae ab eo hunc in modum versa:

Vortreflicher ist ein Kleinod als die Macht: Standhaftigkeit ist mein Kleinod, nicht Furchtsamkeit.

Latine ita fere sonarent:

Praestat cimelium (ornamentum) potentiae:
Constantia meum est cimelium (s. ornamentum), non trepidatio (s. timor).

In reducendis Cuficis ad Neschica artificem agnoscis diuturno usu exercitatum. Tam curiose, tam religiose ductum fere de ductu expressit, ut quovis pignore contenderis: hic est, aut nusquam quod quaerimus. At secus rem habere, probari potest tum ex transcriptis passim a linguae Arabicae normà aberrantibus, tum ex languare, qui totam sententiam ex transcriptis extorsam tenet. Age jam exploremus singula.

Primae litterae transcriptio sola in hoc titulo est, quam dubito an desendere potuerit vir b. Erectum ductum pro initiali habuit. Ipsa gemma in alterius versus prima littera initiale monstrat et tale ab ipso Tychsenio agnoscitur; sed hujus figura ab illà multum differt. Par erat, cam exemplo uno alterove ex monumentis petito probare. Id saccre supersedit vir optimus.

Equidem, quod eam tueatur, in monumentis aliis invenire non memini. — Cum extrema quidem cjusdem vocis littera similem litterae of figuram in voce tertia versus prioris obviam comparat auctor; id quod non absonum.

etiam minus recte versam esse censeo. Vertens praestantior, attribuit huie adjectivo vim comparativi , quà caret. Neutiquam enim in cadem caussà atque in bonus (id quod optimus T. mente confudisse videtur) versatur. Hoc utique ad instar adjectivorum Hebraicorum, Syriacorum, Chaldaicorum etc., quae formà peculiari comparativum et superlativum indicante carent, sequente comparativi, sequente substantivo superlativi vim induit; coll. Persarum in pro in ea et Turcarum indicate carent, sequente pro in ea et Turcarum indicate carent, sequente in each dem caussà non versetur et in praestantivi vim indicet, praestantivi vel superlativi vindicet, in non potest verti: praestantior, sed: pulcher, egregius debet.

Etiamsi, ita ut legas, utique suadeant litterarum Cuficarum ductus, etiamsi significatione Kicinod i. e. κειμηλιοι, quam Tych senius τω αλω attribuit, substitueris veram illam, quà pecul. mundum mulièbrem, et in genere omne ornamentum, decus, denotat (ut cum dicunt αλω είνει

sis (15) رغبه , فاجه ,

Paucis adhuc notare expediet, on non denotare gratiam, quo tandemcunque sensu hoc vocabulum sumserit vir beatus. Castello quidem si fidem habes, os est and solam primam sensit formam pertinens, quo pacto significare possit zoryn; cordistenerum affectum, quod alias ci et alium; sed Wan-kulio inspecto discimus ad solam eam, quae tertium locum apud Castellum occupat, verbi significationem referendam esse ideoque denotare: prohibitio, retentio.

- التداري) Recte transcripto vocabulo significatio minus apta tributa videtur. Potentiam seu vires potius dixeris قرة s. قدرة s. ترّة . Infra de co loquar.
- ا المزم) Hanc lectionem quum ego quoque elegerim, rationes, quae defendant atque illustrent, §. 6. invenies.
- mavit رَبَانِی. Sed licet etiam animare رَبَانِی, vel رَبَانِی, vel رَبَانِی vel رَبَانِی,

⁽¹⁵⁾ In v. Murr Beyträg. zur Arab. Litt.

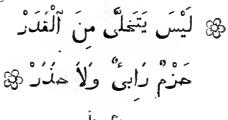
vel زَانَ, quid? quod aliis adhuc modis legeris. Quod ad Tychsenianum زيان, vide, lateatne anguis in herbâ. Seilicet بنان pro (ornamentum) ab usu abhorret, nec apud Wan-kulium inveni nec apud auctores Arabicos. Castellus quidem in Heptagl. sub pro habet, sed nullà addità auctoritate.

ל אונים) nicht aber. Imo potius simpliciter או hoc sensu dicendum fuisse videtur, e. c. Bord. v. 143. סט היים וויילים או מיים של אונים של אונים אונים אונים של אונים של אונים של אונים של שליים

Haee sunt, quae circa hanc explicationem notanda duxi. Apparebit ex iis, etiamsi transcriptio Neschica, (ut a viro palaeographiae Cuficae peritissimo exspectari par erat) ductuum Cificorum rationi per omnia fere congruat, tamen haec transcripta rata haberi non posse. Jam vero totam sententiam, qualem ex iis elicuit, si spectes, fieri non potest, quin eam deprehendas incongruam, hiuleam, languidam et sine nervis. Id quod per singula consectari supersedeo.

§. 6.

Itaque quum in nullà harum interpretationum, vel a peritissimis doctissimisque viris profectarum, acquiescere liceat, non videbor (spero) supersedere potuisse curà atque operà, quam et ipse in novo periculo ponere ausus sum. Jam habe, quae ego quidem mihi videor in Cuficis legere:



Nicht sicher ist vor des Verhängnisses Macht Des Sterblichen Vorsicht und spähinder Bedacht. seu magis κατα λει:

> Non vacat metu fati divini Prudentia speculans, nec cautio.

i. e. Nec ipsa prudentia circumspecta, nec cautio, metu fati divini exemta est.

Ad probandam hanc lectionem haec habeto.

ليس) Lectionem primae litterae simillima figura 78 lam in voce التدر tuetur, quo quidem ut hoc paullo brevius sit, effecit ornamentum oblongum superne additum, quale in extremo versu altero inferne adjectum vides. Sustinet autem hoc utrumque ornamentum vices signi &, quod cum ab initio tum in fine versuum ponere solent.

tuetur المتعالى in numis Samanidarum passim obvium, c. c. in meis Beiträg. z. Muhammedanischen Münzkunde N°. 65. et in Nov. Symbol. ex Mus. Pflug. Tab. I. N°. 19. Mus. Fuchs. Tab. XV, N°. XIV. XXI al. Figuram litterae proxime sequentis وريابع, ubi conjuncta a dextrà est وريابع, ubi conjuncta a dextrà est وريابع, ubi conjuncta a dextrà est وريابع, ubi conjuncta a dextrà est وريابع, ubi conjuncta a dextrà est وريابع, ubi conjuncta a dextrà est وريابع, ubi conjuncta a dextrà est وريابع, ubi conjuncta a dextrà est وريابع, ubi conjuncta a dextrà est وريابع, المعالى in numis modo laudatis, tum المعالى in numo Isma'ilis Atabeki apud Barthelemium in Mémoires de Littérature etc. Tom. XXVI. Tab. I. N°. 7 (16), tum المعالى,

⁽¹⁶⁾ In hujus numi Areà non figuratà legendum monco the side de la lut Deguign. in Geneal. Chronol. Einleit. p. 312 et Barthel. l. c. p. 564 legerunt. Etiam id monco, ex hoc numo Parisiensi illustrandum esse cum, quem ill. de Hallenberg in fronte libri: Quatuor Monumenta acnea, aere expressum dedit et p. 57 sq. explicare studuit.

⁽¹⁷⁾ Ex multis aliis exemplis unum adjicere placet sigillum Cuficum Musei Prauniani septimum (ed. a b. de Murr in Cordonne's Gesch. von A.

I agnoscere, simile in superiore quidem parte eidem litterae vocabulorum القدر et التدر: Ultimam litteram pro القدر habui (18); licet tamen eam etiam pro caudà litterae J habere. Nimirum ut cauda litterae finalis تى passim ad modum تى inflectitur (vid. حتى in fragmento Korani Cufici in Niebuhr. Descript. Arab. Tab. V, et العت in numis Chalificis multis, item دمشت in numis Umaijadicis sculptum in لم scriptum), ita accidit, ut et لم pro لم sculptum in numis Cuficis deprehendatur. Exempla habe numos ab Emiro Samanide, Isma'il ben A'hmed, Schaschae (19), Balchae, Anderabae, Bijarae, Samarkandae, nec non ab ejus successore et filio A'hmede in urbe Meru cusos, in quibus nomen اسمعيلي sane legeres اسمعيل, nisi priorem lectionem unice veram esse constaret. Quod quum ita sit quumque primos duos ductus etiam pro " ll habere liceat, nil obstat, quominus hoc secundum vocabulum المعلى legas; id vero an per linguae rationem admitti possit, infra in ipsà explicatione tituli examinabimus.

et 151 فات من شهر (sic leg.) it. in Nieb. Descr. Arab. Tab. V vers. 2 ab init., nisi quod quae in nostra gemma disjunctae cernuntur duae litterae, ibi rectius conjunctae sunt.

الله ولى الله رموم frica u. Span. T. III) male lectum a Casirio et Reiskio مؤسى (deus tutor, deus misericors. Moses.), quum legi debuisset الله ولى فرسى i. c. deus tutor (s. amicus) est Is haki filii Musae. Hic nomen السعة المعتا inspice pro caussà nostrà.

⁽¹⁸⁾ Pro tali si habes, vocabulum Cuficum etiam lectionem admittit (ad grave negotium fati, contra fatum ubi grave volvitur)

⁽¹⁹⁾ Vide Adleri Mus. Cuf. Borgianum, Tom. II, No. XXXI.

التدر) Hujus vocabuli lectio quidem mihi convenit cum Adlero et Tychsenio, sensu autem, qui ei tribuendus, ab utroque dissentio.

ر مزم) Litterae primae figura paullulum prona omnino jubet eam pro م habere, coll. بالرخام, فلك al. in Inscript. Kiblac Kordub. Est, ubi linea superior magis depressa est, veluti in Fragm. Kor. Cuf. apud Niebuhrium; est etiam, ubi erecta fere stat, ut in ادخل apud Greg. Ros. l. c. p. 146 et in مسبى Onychis ornantis frontem libri: Berättelse om Svenska Kongl. Mynt - Cabinettet etc. af J. Hallenberg (10). - In litterà secundà ; adeo in altum productà, ut pene d referat, non est quod haereas. Litteras i et i scriptura Cufica passim sursum extendit. Cf. sis الرحيم in Monum. Puteol. apud Rosarium Greg. pag. in Epit. Beit-e'l-Fakihensi الرحمن ib. p. 146. et الرحمة (Nieb. Descr. Arab. Tab. VI.), item نعزع in Monum. Puteol. 1. c. p. 144, et in Epitaph. Ghalefkae (Nicb. l. c. Tab. VIII.), item بن أ ct الأمير in numo Panormit. apud Tychs. Additam. Tab. I. No. 7, denique عمر apud Rosar. Greg. p. 158. (2). Nempe in litteris erectis, quales I et J sunt, pars elegantiae Cuficae versatur caque eo major in epigraphe aliquà censetur, quo frequentior harum similiumque (1) litterarum in altum extensa figura recurrit. Vel hodie glypta, qui nusum habet, tergiversatur aggredi scalpturam, si epigraphe Arabica scalpenda eget tam ejusmodi litteris, quae aut

⁽²⁰⁾ Epigraphe onychis ita legenda:

اهنت بالله ربّی الله الله هسبی

i. e. Credo in Deum. Dominus mens est Deus. Deus mihi sufficit.

⁽²¹⁾ Ita enim ibi versu 7 Cuf. legendum, non vero المحل. Nempe illa, quae in fine versus sexti eernitur, linea ad معلم pertinet. Illud igitur epitaphium.nom A'hmedis, sed 'Omari est.

⁽²²⁾ Ut 1, 4 al. vid. e. c. 4213 agud Greg. p. 150.

per se gaudent figurà crectà aut ad candem aptari possunt, quam talibus, quas, veluti et et finales, in planum porrigere et per illas erectas, tignorum transversariorum ad instar, trajicere licet, quam posteriorem rationem aetas recentior nasci vidit. Ab illo elegantiae judicio est, quod in titulis Cuficis caudae etiam litterarum ل , ن , ن , d aliarumque similium , contra priscum scribendi morem sursum reflexae et porrectae reperiantur, scilicet quo columnarum augeatur numerus. Inspice, si placet, Pallii Imper. German. inaug. inscriptionem apud Gregor. Rosar. p. 172 et alia monumenta Cufica ib. ut pag. 150. 151. etc. Quid? quod artifices reperti sunt, qui huic generi elegantiae adeo indulgerent, ut insuper lineas tales in altum crectas, omnino illas superfluas, adderent; ven finale in altum الميمور n finale in altum flexum est eique a dextrà addita cernitur aequalis fere linea 1, co nimirum eonsilio ut vocis finis compositus sit ad similitudinem initii. Id quod palacographiae Cuficae studiosos admonitos volo, ne tale quid deprehendentes ad alia omnia suspicanda abripiantur. -tertiam hujus_vocis litteram venio. Jam supra negavi pro o haberi posse. Utique e finale est. Hanc litteram modo caudà brevissima sive horizontali sive perpendiculari, modo longiore càque nunc pendente nunc in altum erectà instruit scriptura Cufica. Longiore quidem et pendente instructam, ut in onyche nostro, habes etiam in Jaspide, aere expressà in Adleri Mus. Cuf. Borgiano, Tom. II, p. 32, sed minus recte lectà (ib. p. 180), unde ejus explicationem hac datà occasione emendatam addere non ab re erit. Lege:

i. e. O tu, qui perspectum tenes arcanum meum, veniam da delicto meo. Ad priorem versum quod attinet, conf. غالم الغيب والشوادة (Jel) Ad quot lectiones varias pateant hi duetus, jam supra p. 538 sq. innui. Non est mihi in animo, hie omnes, quas insuper admittant, enumerare. Prima littera و est, coll. رمضان in Rosarii Gregor. Coll. pag. 157, XIX. sic enim ibi legendum loco pravi بنشال, quod ibi non minus prave versum est, in excellentiâ. Secundum ductum pro duplici litterâ, quod utique licet, b habuit Tychsenius, legens نبانی; ego pro simplici / habere malui; Passim namque scriptura Cufica litteram 1, non connexam, infra a dextrà auget vel lineolà horizontali (sic fere in Pallio saepe memorato et in numis Panormi cusis, apud Tychs. in Addit. Tab. I. No. 7. 8.) vel unco plus minus curvato, quem facile induci possis, ut pro litterà ; aut ; aut ; aut ; aut ; habeas. sis Inscript, in aedib, familiae de Emmanuele Drepani apud Ros. Greg. p. 141. (23) et passim ibid. it. Fragment. Kor. Cuf. apud Niebuhr., Inscript. Kiblae Kordub. apud de Murr. aliaque Monumenta Cuf. In eo autem noli ofiendere, quod Elif alterum in gemmà nostrà obvium ejusmodi unco careat. adco sibi constare solent glyptae, vel unà in epigraphe. Vide

quantum in hac ipså litterå variet Epitaphium Melitense in Fodinis Or. Vol. I. editum; adi etiam Inscriptionem Pallii Imper. Germ. et vide, quantà in varietate ibi figura litterae , versetur. In ipsà Gemmà nostrà duas varias figuras litterae J habes. - Extrema denique hujus vocis pars, incertum, pro duabus litteris , an pro unà o habenda sit. Priorem rationem ubi sequeris, pronuntiare licet vel ين ini, vel الله vel الله vel الله vel الله vel الله vel الله vel الله vel الله vel الله etiam. Altius erectam figuram prioris litterae tuetur nomen الله بانى in multis numis Dschani - Bek - Chani (veluti Mus. Acad. Petrop. No. 63, 94 al.). Tychsenio visum est legere in , mihi bi, eoque pacto elicui vocabulum رابي. Quod ad alteram rationem, ei et ipsi fidem adstruere licet ex numis Cuficis. Similem litterae finalis separatae o figuram, apice nimirum recto sursum vergente, monstrat vocabulum اهدى in numis Kahir-billah a. 311, et nomen المهدى in numo ipsius Muhtedi - billah. Quid? quod ille apex altius erectus vel litterae huic a dextrà connexae nonnunquam manet, veluti in numis multis Isma'ilis, Emiri Samanidici, المكتفى ita scriptum, ut pro المكتفلي, et in numo Leilae filii No'mani (vid. Prolus. meam p. 45 sq.) ليلم ita, ut pro ليلبى habere possis. Hae igitur admissà ratione, prodit lectio .

مذر) Ad tuendam primae litterae lectionem jam supra adduxi وعلى numorum Cuficorum, ut in numo Panormi cuso, in Tychs. Addit. Tab. I, N°. 9., adde et عبر in Adderi Mus. Cuf. II, N°. XLIV. Mediam عند simillimam habes in يولد عاد العبر Epitaph. Panormit. apud Ros. Greg. pag. 146. et in Kibid Kordub. (v. supr. ad. عبر). Litterae autem ultimae in altum retorsae figuram probat, alia ut taeeam, العبورة in Pallio Imperat. Germ. inaug.

Cuficis a me in Neschica transcriptis fide factà, congruantne haec cum linguae Arabicae usu eoque plus nanciscantur ponderis, exponere fas est.

Verbum نفلى من التدر) Verbum خلا vacuus fuit, ut locus ab incolis etc., transfertur ad animum curâ, sollicitudine alioque affectu vacuum, e. c. Poët. apud Elmac. 225: نم اخل قط من اشنائ nunquam liber metu fui; et alius apud Golium ad Erpen. Ty-

roc. pag. 158. يغلو من الهم vacat sollicitudine. Sed vel suppresso affectus vocabulo (24) eadem vi gaudet, veluti in sententià apud Gol. لا تخل من عدوك عاتل او جاهل فاهذر هيلة العاتل وجهل (c. p. 271 obvià ne sis vacuus ab inimico tuo (i. e. ne sis vacuus s. exemtus metu inimici tui, seu, ne male securus sis ab inimico tuo) sive prudente illo sive stulto; sed cave, ut prudentis astutiam, ita. stulti stoliditatem. Adde Kaswin. in S. de Sacy Chr. Arab. p. 567 l. 5. Potissimum autem hic usus absolutus viget in Participio Passivi فاي , veluti Diwan Huseil. (apud Schultens. ad Iob. p. 843. Dseherir apud Reisk. ad Abulf. Ann. II, pag. 620.) أم الغلمي dormit curis vacuus (25), et poëta apud Lett. ad Caab. p. 96: الفليول نوم curis vacui dormiebant (sic verte. Male Lette: Amici somnolcuti erant), quo sensu tamen nonnunquam addunt homo فليّ البال لا يغشى معادًا : ut Ibn-'Arabschah II, 434 البال securi animi non timet diem; quo ad deum redeundum. quum Forma quinta plerumque secundae passivum sit, secunda autem significet: vacuum reddere, vides eam sere cum primà conve-

⁽²⁴⁾ Quemadmodum et in فرغ observare est, e. c. S. de Sacy Chrest. Arab. p. المال الغارغ: 65: فرغ et Ibn_'Arabsch. II, 386: المال الغارغ

⁽²⁵⁾ Adde Kall. Philos. Arab. popul. p. 183: قالية خالية الهم خالية

prudentia exemta est metu fati. ليس autem loco ما vel كا positum, ut passim e. c. مبّة من الجوهر ليس يتتومّ لها عُن

Supra diximus, ductus Cuficos aliam etiam lectionem patinempe النيل . Circa eam haec observanda sunt. Verbum وقل propr solvere, ut nodum, denodare, inde 2) καταλυείν, divertere aliquo, descendere alicubi (propr. solvere jumentum, scu ex itinere soluto jumento descendere in diversorium); inde porro per metaphorana 3) descendit in aliquem ira dei, vindicta s. poena divina, calamitas, et, quod ad caussam nostram facit, fatum divinum. Sie poëla noscio quis : عَلَى القَصَاء بِالصَّيَاد coelo ruit fatum in venatorem, et Ibn-'Arabsch. II, 58: בני ולאיפט מויי ולאיפט descendit in ipsos inevitabile fatum. Conferatur verbum idescendit, 2) diversatus est, 3) coela descendit poena divina, mor's, fatum, et انتض القضا coclo praecipitarit fatum, ad instar vulturis in praedam ex alto irruen-Jam Masdara quidem مُلُولٌ et مُلُولٌ ad hane potestatem metaphoricam a Castello certe et Wan-kulio non video relata esse. Apud posteriorem haec inveni: ايضا يقال هل وهلاً وهعلاً اذا نزل Sed non video quid impediat, quominus ambobus, practer sensum proprium, metaphoricus ille quoque tribuatur. Atque sane فأول passim hac vi gaudet, veluti Bord. v. 60 والمقم: jam portentus ipsis est descensus calamitatis et vinaictarum divinarum, et Liber Bedajet - el - hedajet p. m. 6: ان وُفِّق للدّوبة قبل هاول si secundatus a deo est ad resipiscentiam ante descensum necessitatis fatalis. Quidni eodem sensu etiam خل in nostra sententia poëtica adhibitum censeamus, et vertamus التل من القلار de-60*

ente, ut passim apud poètas Arabicos (velut Elmac. 52. 146. Abulf. Ann. 1. not. 142. et 68. etc.) quâ in caussà nune post, nunc ante regens ponitur. Esset igitur idem atque على والمتناب والمت

Wenn Gottes Verhängnifs herniedersteigt, Dann spähinder Bedacht und Vorsicht weicht.

Quâ cum sententià conserendae essent, quas in جامع الفنوك s. Collectione rerum utilium ex omni scientiarum genere (MS.

Musei Asiat. Petrop.) deprehendi: מו ולו מו וודער אלט וודער אלט וודער אלט וודער אלט וודער אלט וודער אלט וודער אלט וודער אלט וודער אלט וודער אלט וודער אלט מיט פער מיט

 etsi plerique ex alia hujus verbi vi vertant: praevalens, potens, equidem mallem vertere: praedestinans, sapienter ex aeterno decreto res omnes disponens. In verbi Passivo quoque illa notio peculiaris obtinet, veluti Poëta dixit apud Temimium in Vat. et Rinek. Ar. Les. pag. 120: قدر البين بينا فافترتنا فافترتنا فافترتنا فافترتنا, et Poëta alius apud Abulf. in Annal. T. III, pag. 641:

mihi non decernitur (a Deo, seu a fato) nisi cum nautis societatem gerere, mihi fatum est cum solis nautis societatem gerere. Ellipsin Dei in Passivo non est quod mireris. Est enim ea linguae Arabicae indoles, ut in verbo passivo id, quod in activo ejus subjectum constituebat, raro aut nunquam praepositionis ope exprimant. Aut omittere solent, ut cum dicunt مدينة فلانة العروسة بالله pro عدينة فلانة العروسة بالله مدينة. A verbi hujus formâ primá descendunt masdara فكان المعروسة الله

et تقرير (26), a secundà تقرير (26), a secundà تقرير (26), a secundà تقرير (26), a secundà تقرير (26), a secundà تقرير (26), a secundà تقرير (26), a secundà تقرير (26), a secundà تقرير (26), ومن الله (26), قدر الله) الله (26), قدر الله) الله (26), sive praesixo articulo (تقرير الله) (27) decretum dei, decretum divinum, dei voluntas, quà bonum malumve ab aeterno determinatum, quod mortalis nullà cautione evitare, nullà ratione neque retardare neque accelerare potest, inevitabile fatum (27). Quamquam hic distinxerunt Mu'hammedanorum theologi inter التقرير الله التقرير الله التقرير الله المتعربة والمناطقة والمن

⁽²⁶⁾ Cum plur. اقدار qui in Lexicis desideratur.

etiam gaudere, id quod a lexicographis non observatum esse video. Adi Ibn_Doreidi Poëm. v. 62 et 214 ed Scheid. ubi ejus singularem, et ibid. v. 36. Schult. Monum. 2. 57. 62. Abd-ul-latifi Mem. باوج. p. 54. 152, ubi ejus pluralem مقادير habes; quamquam hune quidem numerum etiam a مقادر

Ad hujus vocis vim rite explanandam non sufficient neque Wan-kuli, qui habet: هزم بر كمينه كندن احوالن ضبط و تدارك التمكه ديرار est quum quis res suas bene administrat iisque rite providet, neque Meidani (apud Reisk. ad Abulf. Ann. II, not. 256): الحرم هنظ ها كانت و ترك ها كنيت i. e. ودر و عا كنيت و الكانت و ترك ما كنيت و الكانت و ترك ما كنيت و الكانت
exempla. 'Hamas. p. 424: قاعن بالعزم حتى اذا حلّ حلّ العزم حيث يعلّ verte cum Reiskio: quem proficiscentem prudentia et circumspectio tam nunquam deserit, ut ea ibi sua figat tentoria, ubi ille sua figit. Poët. in Abulf. Ann. IV, 598: جاعا بعزم وحزم venit

⁽²⁸⁾ Vid. Pocock. ad Specim. hist. Arab. p. 207 seqq. Hottingeri Histor. Orient. (cd. 2.) p. 572 sq. Herbel. Bibl. Orient. art. Cadha.

ad nos cum virili et constante, sed circumspecta prudentia. Golius ad Erpen. Tyr. pag. 265: من السوّ بالناس من العرم cautae
prudentiae est, inique opinari de hominibus. Adde et Ibn-Doreid. v. 165. Schult. Monum. pag. 10. Ibn-'Arabschah II,
8: فن العزم Linde passim abud Ibn-Sinam فون العزم cautae
vel وذلك هو العزم cautae prudentiae autem est, sic medicum cautum
et circumspectum agere fas est; et طبيب عان apud Elmacin. pag.
123 non est medicus insignis, sed med. caute et considerate in
curandis morbis agens.

integrum articulum ex Wan-kulio رابئ proferre placet, quo conferri posset Turca Interpres (et in aliis quidem Epitomator etiam) cum Arabe Dschenhario apud Schei-الْمُرْبَأَة كوزه دجك ير مرقبه معناسنه المربأ بعناه المُرْبَبأ كذلك ومنه 92 sq. المُرْبَأة قيل لهان الباذي (البازي ١٠) الذي يتن عليه مرباً الرَّبا كوزتك يتال ربأت التوم ان رقبتهم الارتباء بمعناه يقال ارتبأتهم ونظر ايتمك معناسنه وه كاور يقال ربأ لنا فلان وارتبأ اذا اعتال والربأ والارتبأ يوترو چتمت معناسنه دمكاور يتال ربأت المرباة وارتبأتها اذا علوتها واعتبار معناسنه ده كاور يتال ما ربّاب رباء فلان ان ما علمت به ولم اكترت (اكترث ١) له ان لم ابال به الربيَّ على وزن فعيل والربينَّة قراول كه عسكرده دشهن جانبنه تورار جمعى الربايا كاور وتولهم في لاربًا بك عن هذا الامران ارفعك عنه المرابأة على وزن المفاعلة صقنمت مذر ايتمك معناسنه تقول ربأت الشي مرابأة اذا مذرته واتقيمه Itaque quod in lectione meà cernitur participium رَابِي (pro quo et راب dicunt) valet : speculans, explorans, excubitorem agens. Tali epitheto quidni in genere dicendi sublimi vel poëtico apte et commode ornetur prudentia cautiove, oculos quasi ipsa circumferens, ne quid mali ex improviso obruat? Atque sane in simili caussà

usurpatum idem habes a poëtâ in Schultensii 'Hamasā pag. 400, qui de heroë forti simul et circumspecto: عبيل عينيه رابعًة تلبه , constituit oculos suos speculatores sui cordis adversus evaginationem mucronis glabrum nitentis."

Sin vero ductum illum Cuficum finalem non pro را بر , sed pro مرا بر , sed pro مرا بر , sed pro

ولا) neque. Sic tandem, ubi praecesserit وليس, optime locum suum occupat hoc عن المناس عصلم antepositim. Sic dicunt: لا يمان الله ولا يليق بك ليس يصلم et simil.

العذر هانك كسرى وذالك سكونيله والعذر فتعتيناه : Wan-kuli والعذر هانك كسريله والعذر هذرا من الباب الرابع صقنوت تحذر (? تحرّز ۱) معناسنه يقال هذرت الشي اهذره هذرا من الباب الرابع مناسنه متنبه معناسنه و ذالك كسريلة اهتراز ايد يعي كيسنه متنبه معناسنه و فراد الله عنوس نقط المعناسنة و فراد الله و العذر هانك نتعى وذالك كسريلة اهتراز ايد يعي كيسنه متنبه معناسنه و فراد و العذر هانك نتعى وذالك كسريلة اهتراز ايد يعي كيسنه متنبه معناسنه و فراد و فراد و العذر الله و فراد و العذر الله و فراد و العذر المناسفة و فراد و العذر و الله و فراد و فراد و فراد و الله و فراد و

omnis securitas tandem evadit in sollicitudinem, et in hoc alius poëtae apud Jones. in poës. Asiat. Comment. p. 278 (ed. Lips.) العيش سطرال ذا امن وذا هذر vita duobus constat ordinibus, securitate et sollicitudine.

Tantum ad probāndam Arabicorum a me datorum fidem. Quod superest عَذَرُ scripsi pro مَذَرُ , et التَدَرُ pro التَدَرُ , et التَدَرُ pro التَدَرُ , et مَذَرُ , ut distichon sit ὁμοιοτελευτον , qualis apocope a prosodià Arabicà admittitur.

Quod denique attinet ad ipsam sententiam, quam lectio mea suppeditat, eam apto commodoque esse sensu, et opinioni praeceptoque sacro populi ejus, unde ipsa inscriptio profecta est, plane congruere,

- non hoc, quae centum continet urbes, Quamvis sit mendax, Creta negare potest.

Quem enim fugit illa, quae doctrinae Mu'hammedicae sectatores tenet, de decreto absoluto (de praedestinatione, fato inevitabili) communis opinio ex ipsorum hausta sacro codice? (ut S. 17, v. 14. 3, v. 139.) Doctores Mu'hammedici licet dogmatis hujus sensum prudenter circumscripserint et temperàrint, ad solum animi hominum statum adque vitam futuram restringendo et liberum homini in hac vità rebusque suis attribuendo arbitrium; nihilosecius omnes fere Mu'hammedani quam opinioni de fato inevitabili indulgeant constat. Putant non solum hominum alios, deo probatos (qualem عنه dicunt), acternae felicitati, alios, a Deo repudiatos (qualis عنه vel عنه vocatur) acternae infelicitati ab acterno et immutabili decreto divino destinatos csse, sed etiam nihil sive boni sive mali in hac vità accidere, quin ab acterno jam sit decretum, nec ullà prudentià humanà vel accelerari vel evitari posse;

mori debuisse, qui in bello ceciderint, etiamsi domi resedissent; horam satalem unius cujusque sponti occultis litteris a manu divina esse inscriptam, etc. Atque hac quippe opinione imbuti, constat, quam torpere soleant ad calamitates, quae forte ingruunt, quam sere negligant capere consilia et remediis uti, quibus avertant vel imminuant pestis, incendiorum aliarumque calamitatum frequentes atque sunestas clades, quam passim coeco impetu se offerentes in ipsum capitis discrimen, in praesentissima belli pericula, summae sortitudinis exempla exstiterint. Inde sit, ut semper illis in ore sint sententiae huic opinioni saventes, utque Arabum, Persarum, Turcarum libri et prosaïci et poëtici pleni sint sententiis hoc idem dogma aliis alio modo repetentibus. En tibi ex ingenti numero paucas.

non vincuntur fata. Cui geminum illud Per-sarum: با تضا كارزار نتوال كرد cum fato pugnari haud licet. — ما للعبد من الذي يقضى به الله امتناع homo ab eo, quod in ipsum decrevit Deus, defendere sese nequit. اذا جاء القضاعين البعر

visus s. intelligentia coecutit. التدابير بطلت التدابير بطلت التدابير بطلت التدابير بطلت التدابير بطلت التدابير (20) الغدر بطل (20) الغدر بطل (20) الغدر بطل (20) الغدر بطل (20) الغدر بطل (20) الغدر بطل (20) الغدر بطل (20) إلى المورد وفرد بطل (20) إلى المورد وفرد بطل (20) إلى المورد إلى المورد (20) إل

quum decidunt sagittae decreti divini s. fati, annuli loricae com-

⁽²⁹⁾ Seu J

paetissimae defluunt. Similiter Turcae: المراكة والمنال قدرون تير قفا كان قدرون المال قدرون المال والمنز المال والمنز المال والمنز المال والمنز المال والمنز المال المنز المال والمنز المنز
Sisto calamum; jam enim sat prata biberunt. Vel ex adductis exemplis satis superque intelligitur, quam adamata et trita Muchammedanis et quam alio ab aliis modo variata sit sententia ea, quam e gemmae nostrae ductibus Cuficis eruderavi. Quin vidistis inter citatas, quae, non sensu tantum, sed oratione etiam quodammodo ad nostram accedunt. Haec ipsa si forte aliquando in libro aliquo deprehenderetur, appareret, quatenus scopum ferierim.

Juvat in extremà hac commentatione varias, quas haec gemma nacta est, interpretationes Italico quidem idiomate expressas (ad Italiam enim potissimum attinet) junctim contuendas proponere:

I. G. C. Adleri:

Tutto ciò che è vero e giusto viene da Dio; Chiunque vede questo, certamente non erra.

Berolinensis enjusdam:

La tranquillità dell' animo scaccia le acerbità del Fato. Il flexibile giumento non così presto muore.

O. G. Tychsenii:

La mia grazia à più di merito chè la potenza; La vigilanza è l'ornamento mio, ma non l'inerzia.

Ejusdem:

L'ornamento è qualche cosa più preziosa che la potenza; La costanza è il mio ornamento, c non il timore.

C. M. Fraehnii:

Prudenza avveduta e cauzione invano Dal timor del Fato corron lontano.

Ejusdem:

Quando il Fato divin dal Cicl discende, La più cauta prudenza a nulla intende.

Scr. anno MDCCCXVI.

EPILOGUS.

Marmorum aliorunque monumentorum Cuficorum, quae in vulgus edita exstant, bona pars dici non potest quam temerarias vanasque nacta sit interpretationes, sive alia, quam translaticia lippisque et tonsoribus nota continebant sive charactere minus perspicuo erant exarata. Forum interpretes aut idoneà destituebantur linguae Arabicae peritia, aut in palaestrà trabico - palaeographicà non satis subacti erant, aut inscriptionum exemplis minus accuratà eurà expressis utebantur; subinde accidedat, ut haec tria simul in unum convenirent. Adde, quod plerique nonnunquam pravo et praepostero indulsisse videntur pudori, quo moti ne auctoritas sua imminuatur verebantur, si hanc illamve inscriptionem, ipsis ut solverent propositam, vel totam vel ex parte capere se posse ingenue

negàssent. Ex hisce fontibus pravae monumentorum Cuficorum profluxerunt interpretationes haud paucae, quibus ut fidem haberent, mox alii viri docti, utpote Arabicae vel linguae vel palaeographiae certe expertes, facile inducebantur; quin eo progressi inveniuntur, ut illis interpretationibus conjecturas historicas superstruerent, sed subsessuras illas cum solo, cui impositae.

Tempus monere mihi visum est, ut non solum temeritas illa atque levitas, quà monumenta Cufica aliquam multa tractata video, retegatur eoque alii in fide eorum explicationibus adhibendà cautiores reddantur, sed etiam rectior aenigmata Cufica solvendi via monstretur. Id geminum consilium existimavi a me effectum dari posse, si unam alteramve inscriptionem, lectu illam quidem difficiliorem, sed illaesam et integram, sed fideli delineatione expressam, atque talem, quam alii ante me explicare parum prospero successu conati sint, mihi sumerem accurate commentandam ita, ut tum priorum interpretum examinarem pericula, tum meum qualecunque pro virili probarem. Atque tales deprehendi talique modo tractavi, quas tenetis, Inscriptiones Melitensem et Soranam.

Utramque hanc commentationem abhinc quatuor vel quinque annos a paucis si discesseris talem, qualem nunc edidi, seribebam in abdito recessu Kasanensi versans et idoneo apparatu nudus. Nunc ubi prelo subjiciendas percurrebam, potuissem meherele multa eaque non nullius momenti ad positorum a me fidem corroborandam addere. Id enim illustrissimi Ouwarowii, Praesidis hujus Academiae, singularis in litteras Asiaticas amor et gravis quà pollet auctoritas effecit, ut harum litterarum cultori jam in hac Septentrionis metropoli, quemadmodum numorum aliarumque antiquae memoriae Asiaticae rerum, sie librorum Orientalium et typis excusorum et manuscriptorum apparatus adsit sane quam invidendus. Verum utut co utendi etiam pro ca, quae nunc cum maxime agebatur, caussa lubido animum incesseret, ab eo in praesenti abstinendum arbitratus sum.

Scilicet in immensum excrevissent hae scriptiunculae, quarum quidem in copiolà acquiescere animus posse videtur. Uno tamen opere, quod et ipsum Viri laudatissimi sapienti consilio Museum Asiaticum acceptum refert, non uti nesas duxi; dico ven. Rosarii Gregorio Rerum Arabicarum, quae ad Historiam Siculam spectant, amplam Collectionem, quippe quae monumentorum Cufico-Siculorum numerum haud exiguum sistit. Nec frustra hace quidem monumenta consului. Ea enim perlustrans non modo inveniebam quae ad lectiones meas firmandas adjicerem testimonia, verum etiam mirabundus deprehendi hanc speciosam monumentorum Cuficorum Collectionem indignum in modum ab interprete تغمل ه الله تع habitam esse, ita quidem, ut exceptis sex vel septem omnium برحمة reliquarum interpretationum nulla deprehendatur labe vacua, quid? quod complures, eaeque fere inscriptionum historicarum, a capite ad calcem inducendae sunt; adeo earum auctor a veritate aberravit, aut explicare sustinuit, quae utpote vel temporum injuriam nimiam passa, vel minus fideli arte delineata, explicari nequeunt. Mirabundus etiam deprehendi ex illis monumentis adscripta et afficta esse Siciliae, quae Aegypto patrià usa sunt, veluti N. XXXIX et XL, et pravis interpretationibus inductum editorem doetissimum super rebus prorsus alienis fuse disseruisse; veluti cum de Othonis IV Imperatoris cum Saracenis Siculis conjunctione ad Monumentum XXXV disputat, in quod, ut in alia nonnulla, prava interpretatio Othonem male ingessit (*). Hoc illius Collectionis splendidissimae ulcus num ante me alii jam animadverterint et animadversum prodiderint, ut nescio, ita vix eredo; nam censores doctos, etsi, circa alias operis memorati sectiones varie peccatum esse, in ephemeridibus litterariis notaverint, de hac sectione sententiam pressisse video. Itaque haud cunctatus sum id nunc tandem in antecessum patefacere, non quiden singula atque omnia illa monumenta Siculo - Cufica de industrià recensendo et no-

^{**)} Vide Comm. de Onyche Sorano not. 6.

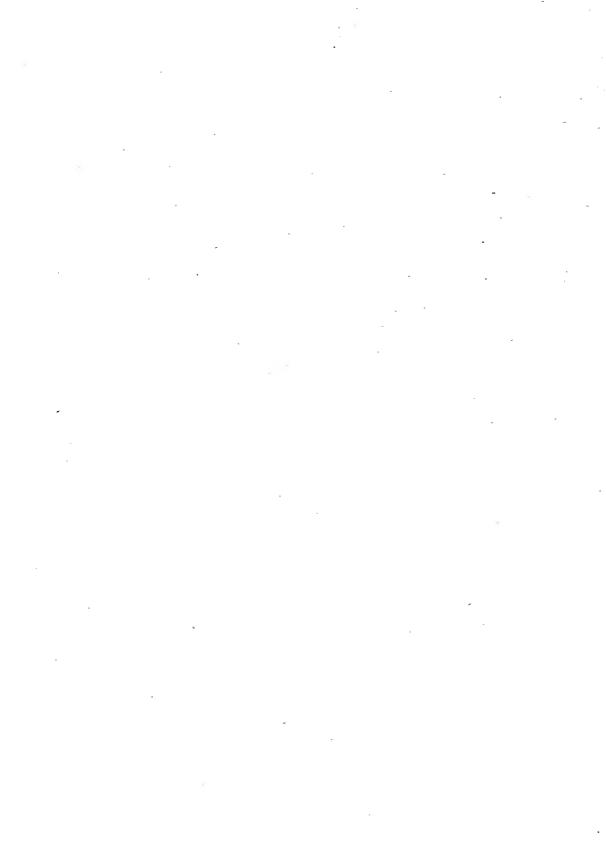
tando, (id inpraesentiarum fieri vetabat locus) sed non nisi quae datà occasione offerebantur vitia corrigendo (*); unde jam sat exemplorum natum est, ut ex ungue leonem hunc cognoscas.

Est mihi animus hanc meam operam in Monumentis Cuficis illustrandis inchoatam continuare, et posthac non solum quidquid corum tam a Resario Gregorio quam ab aliis viris doctis editorum minus recte lectum est, singulari commentatione junctim notare et, si pote, emendare, verum etiam complura id genus monumenta inedita, in Russia vel reperta vel nunc quidem asservata, meà interpretatione aucta in vulgus dare. Ex posteriore genere nominatim hic commemorare placet Thecam Koranicam Chani alicujus Kasimowiensis, Poculum cum inscriptione gemină, ună Arabică, Belgică alteră, Epitaphia Bulgharica, Cippum Cuficum in sede Archiepiscopi Kasanensis et Simb., Lampadem Bylarensem, Ocream ferream Aegyptiacam, Talismanum Kasanensem, Concham magicam, et all. Neque tamen ea, quà in his duobus primis monumentis commentandis utendum censui, prolixitate posthac utar. Pensum ut peragere queam, commoda defungar brevitate. Scr. Petropoli m. Febr. a. MDCCCXX.

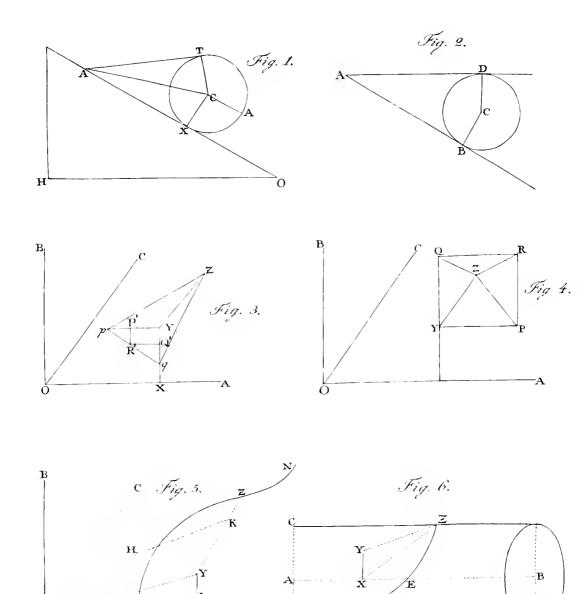
Nota. Id unum moneo, in Comment. de Epit. Melitensi litteras $\mathcal{L}d$ et $\mathcal{L}ds$ passim pro et $\mathcal{L}ds$ adhibitas esse; cui vitio in alterà de Onyche, cujus sp.cimina prima ad memet mitti curavi, occursum est, ejectis nunc quidem duabus illis formis, quas, etsi huic typorum minusculorum generi, ad similitudinem scripturae Taflik accedenti, magis conveniant, a typothetà hoc parum distingui a $\mathcal{L}ds$ videbam, et in carum locum substitutis, quas ex formis minusculis Schnoorianis jam antea additas deprehendebam.

^(*) Vid. pagg. 493, not. 18. 495, 503, 525, not. 6, 526, 527, 528, 541, 542, not. 21, 544 et not. 23,



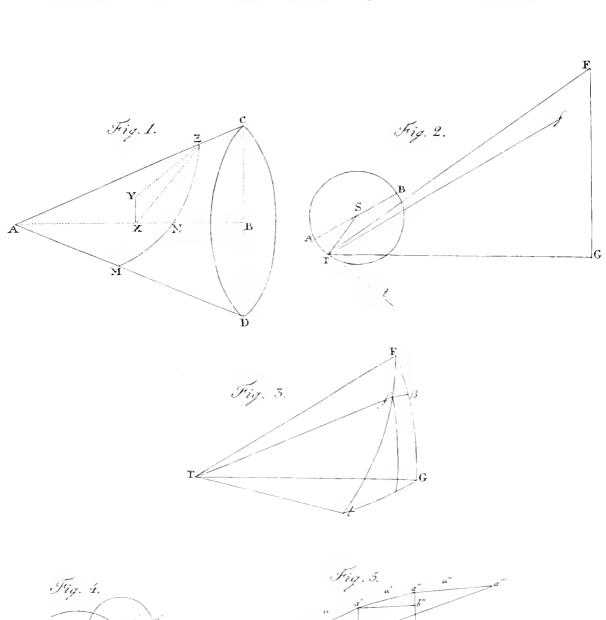


Mémoires de l'Académie Imp. des Sc. Tome VII. Tab. 1.



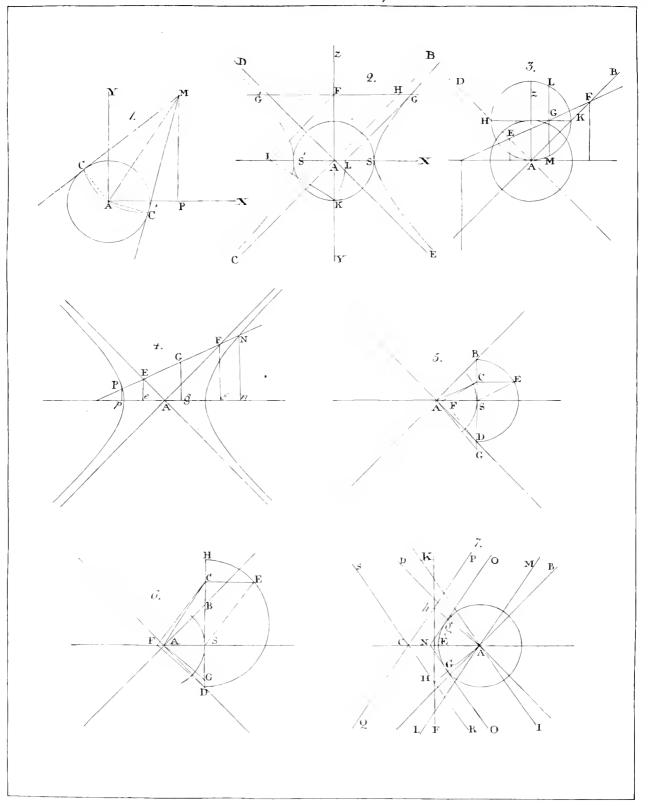
F

Mémoires de l'édeadémie Imp. des Sc. Tome VII. Tab II.

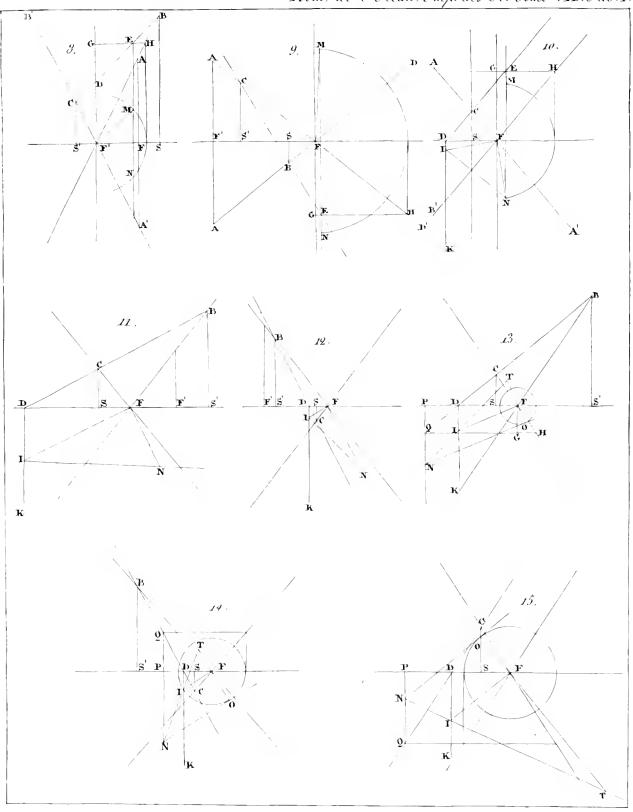


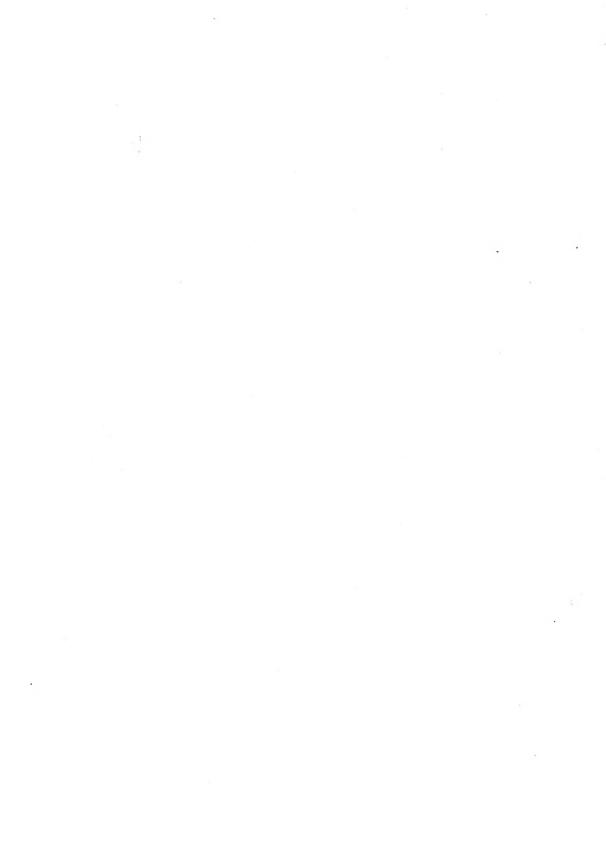


Mém. de l'Acad. Imp. des Sc. Tome VII. Tab.III.

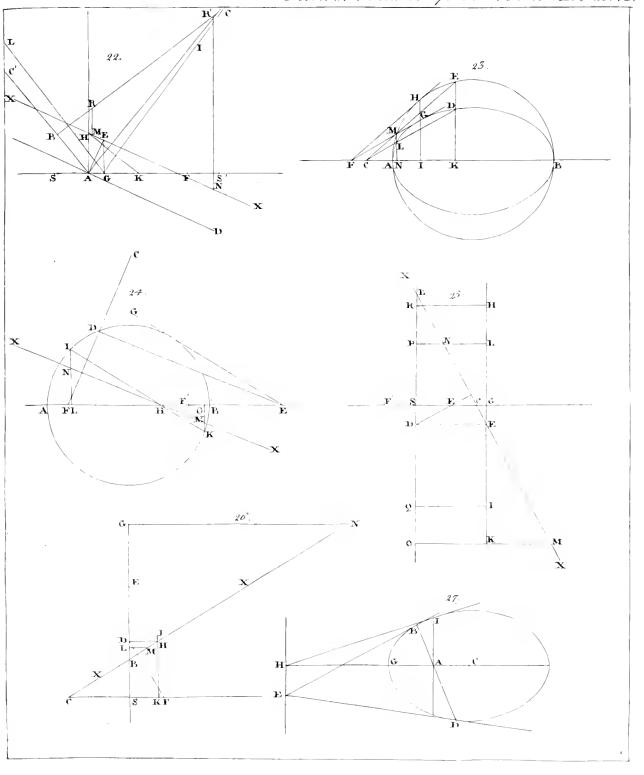




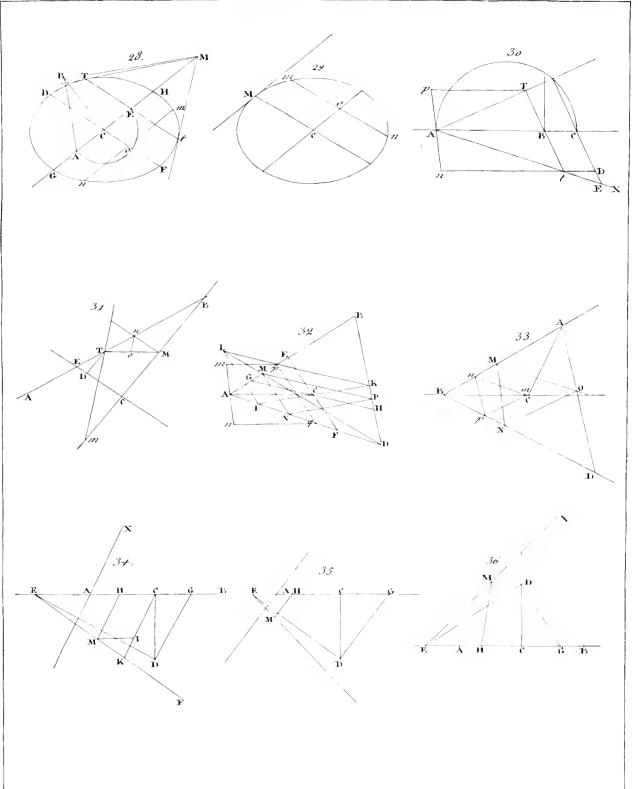




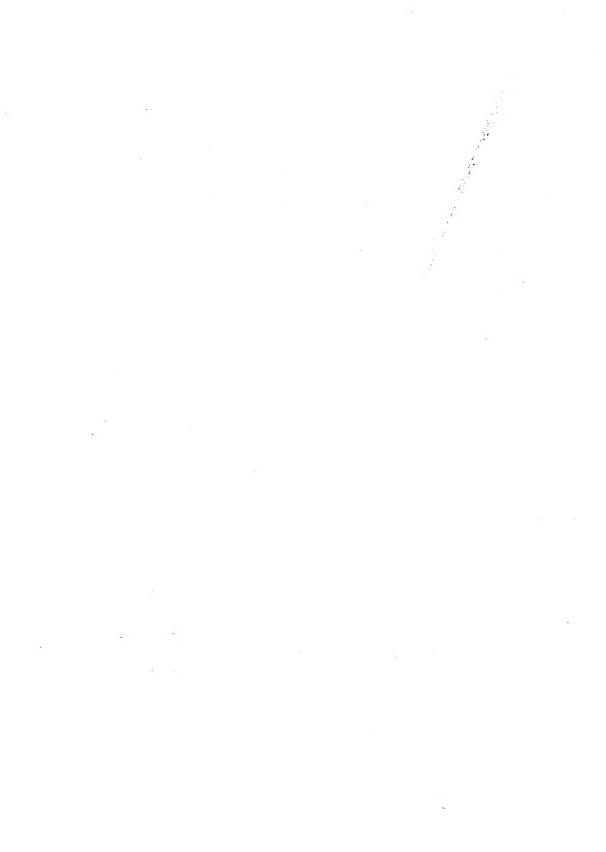


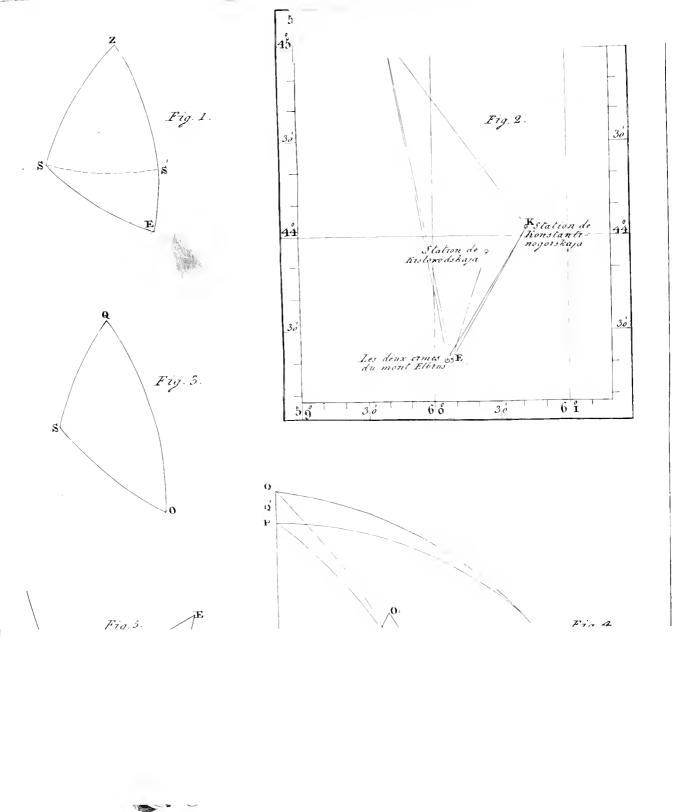


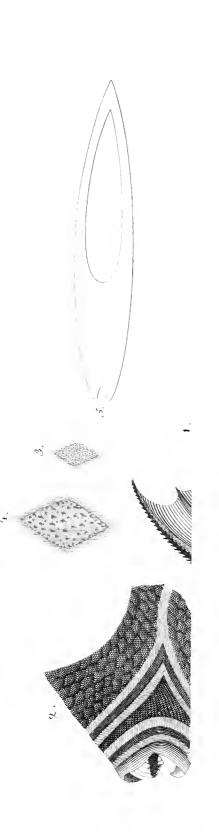


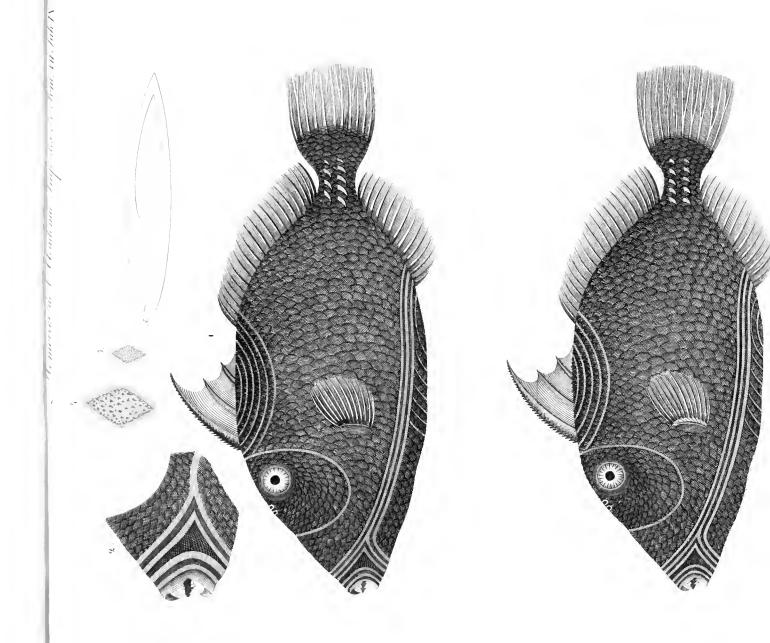






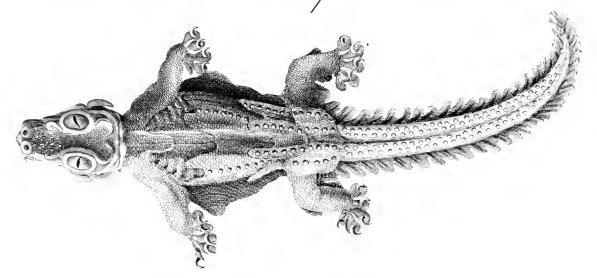




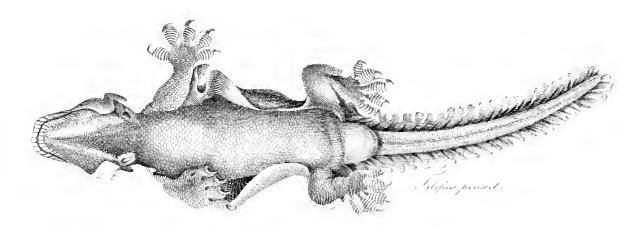


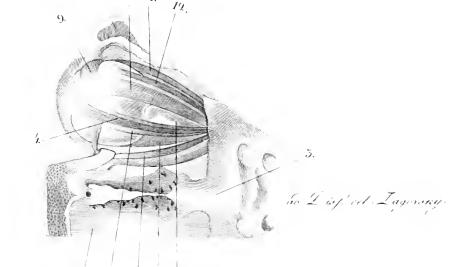
Jelefin Jament

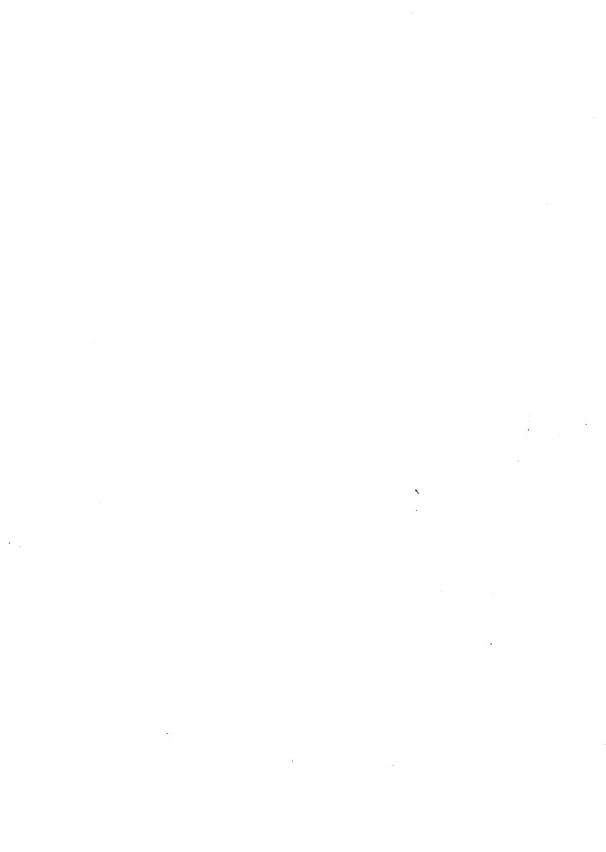
Mémoires de l'Académie Imp. des Sc. Tom. vu. Tab. x.



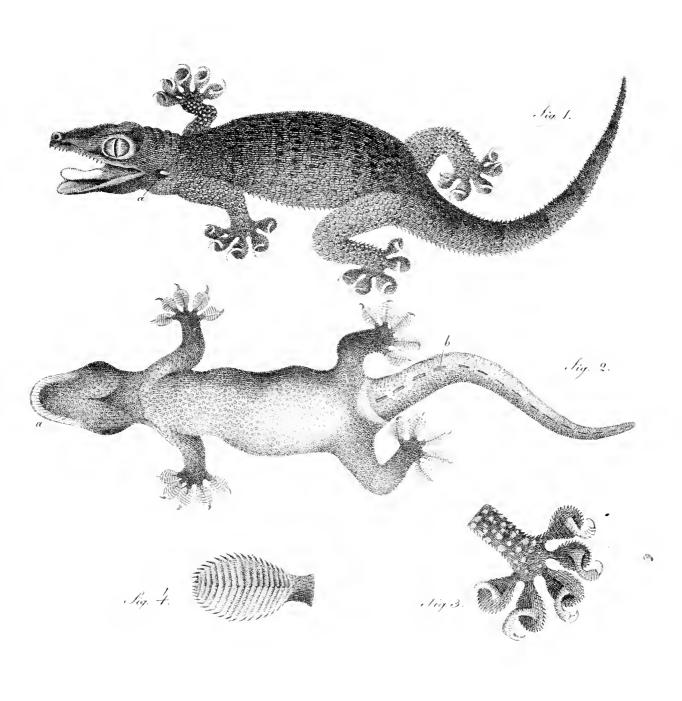
I tellio Simbriatus Ichn. vel Georo homalocephalus Creveldi





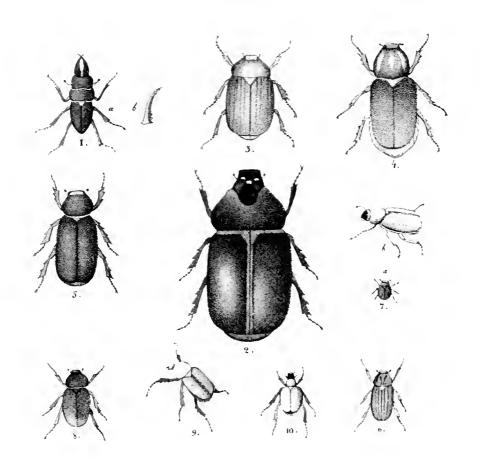


Minoires de l'Académie Timp, des Se. Tom: VII. Tab. X.



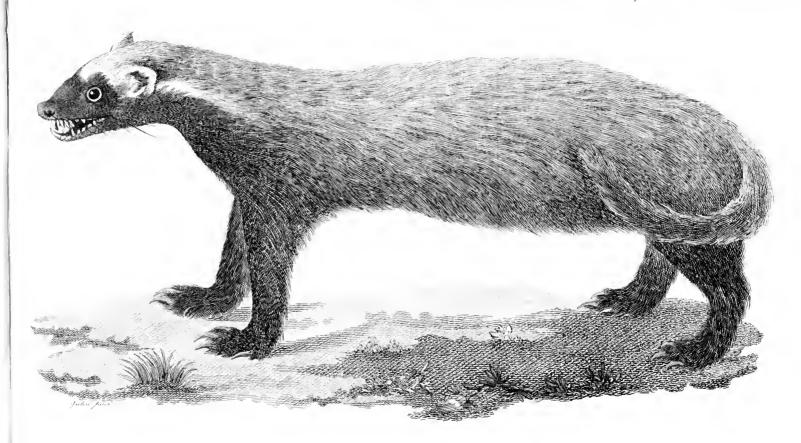
Gecko vel Atellio argyropia.











111.111.1 Benedeen fic

